УДК 517.984.5

Жуманова Л.К.[1*], Садыбеков М.А.[2**]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г.Алматы
[2]Институт математики и математического моделирования, Республика Казахстан, г.Алматы
E-mail: *Lyazzat.Zhumanova@kaznu.kz, **sadybekov@math.kz

Первый регуляризованный след интегро-дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий склеивания

Работа посвящена вычислению первого регуляризованного следа одного интегро-дифференциального оператора с главной частью типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "склейки". Рассматривается оператор Штурма-Лиувилля $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$, заданный на отрезках $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1,n}$; $n \geq 2$. На левом и правом концах отрезка $[0,\pi]$ задаются краевые условия типа Дирихле: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Решениями являются непрерывные на $[0,\pi]$ функции, первые производные которых имеют скачки в точках $x = \frac{\pi}{n}k$. Величина скачков выражается формулой $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1}$. Основным результатом работы является точная формула первого регуляризованного следа рассматриваемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: Первый регуляризованный след, интегро-дифференциальный оператор, внутренне-краевое условие.

Zhumanova L.K., Sadybekov M.A.,

The first regularized trace of integro-differential Sturm-Liouville operator on the segment with punctured points at integral perturbation of transmission conditions

The paper is devoted to calculating a first regularized trace of one integro-differential operator with the main part of the Sturm-Liouville type on the segment with punctured points at integral perturbation of "transmission" conditions. The Sturm-Liouville operator $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$ given on the segments $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1,n}$; $n \geq 2$ is considered. Boundary conditions of the Dirichlet type: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ are given on the left-hand and right-hand ends of the segment $[0,\pi]$. The functions continuous on $[0,\pi]$, the first derivatives of which have jumps at the points $x = \frac{\pi}{n}k$, are solutions. The value of jumps is expressed by the formula $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1}$. The basic result of the paper is the exact formula of the first regularized trace of the considered differential operator. **Key words**: first regularized trace, integro-differential operator, inner-boundary condition.

Жуманова Л.К., Садыбеков М.А.,

Ойық нүктелі кесіндідегі желімдеу шарты интегралдық ауытқулармен берілген Штурм-Лиувилл интегро-дифференциалдау операторының бірінші регулярланған ізі

Жұмыс ойық нүктелі кесіндідегі "желімдеу" шарты интегралдық ауытқулармен берілген басты бөлігі Штурм-Лиувилл тектес интегро-дифференциалдау операторының бірінші регулярланған ізін есептуге арналған. $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1,n}$; $n \geq 2$ кесіндісінде берілген $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$ Штурм-Лиувилл операторы қарастырылады. $[0,\pi]$ кесіндісінің оң жақ және сол жақ шеттерінде $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ түрдегі Дирихле тектес шарт беріледі. Шешімі $[0,\pi]$ аралығында үзіліссіз, бірінші ретті туындылары $x = \frac{\pi}{n}k$ нүктелерінде секіріске ие функция болады. Секіріс ұзындығы $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, k = \overline{1, n-1}$ формуласымен өрнектеледі. Жұмыстың негізгі нәтижесі қарастырылатын дифференциалдау операторының бірінші регуляризацияланған ізінің айқын формуласын анықтау болып табылады.

Түйін сөздер: бірінші регуляризацияланған із, интегро-дифференциалдау операторы, ішкі-шеттік шарт.

1 Введение

На сегодняшнем этапе своего развития спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов является одним из важных разделов общей спектральной теории и активно разрабатывается различными математическими школами. Одним из её направлений является теория следов дифференциальных операторов, которая разрабатывается, прежде всего, московской школой под руководством академика В. А. Садовничего [1, 2]. Только за последние годы ими представлены формулы первого регуляризованного следа для дискретных операторов, регуляризованные следы сингулярных операторов, регуляризованные следы несамосопряженных дискретных операторов с неядерной резольвентой, формулы следа М. Г. Крейна на случай возмущения типа Гильберта–Шмидта, регуляризованный след операторного уравнения Штурма–Лиувилля на конечном отрезке, формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции, формулы регуляризованных следов операторов с относительно компактным возмущением и т. д.

Однако ряд существенных проблем спектральной теории остается по-прежнему не разрешенным. К их числу относится нахождение регуляризованных следов дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками. Данное направление тесно связано с исследованием операторов с потенциалами, содержащими дельта–функции, однако имеет и свои особенности. На сегодняшний день это направление находится на стадии накопления первичной информации, для чего необходимо получение формул явного вида вычисления регуляризованных следов различных конкретных дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками.

2 Понятие регуляризованного следа

Теория регуляризованных следов линейных операторов берёт своё начало с фундаментального факта конечномерной теории — инвариантности матричного следа линейного оператора и совпадении его со спектральным следом, и исследует вопрос о распространении понятия инвариантности следа на неограниченные операторы.

Исследования регуляризованных следов операторов с дискретным спектром было начато в знаменитой работой И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [3], в которой авторы нашли след оператора в задаче Штурма–Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \;\; y'(0) = 0, \;\; y'(\pi) = 0.$$

Для $q(x) \in C^1[0, \pi]$ при выполнении условия $\int_0^\pi q(x)dx = 0$ была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}\big(q(o) + q(\pi)\big),$$

где λ_n - собственные значения задачи, а $\mu_n = n^2$ - собственные значения этой же задачи с $q(x) = 0$. Сумма ряда называется *первым регуляризованным следом оператора.* Формулы такого типа называются формулами первого регуляризованного следа. Одним из преимуществ подобных формул является то, что хотя собственные значения оператора при $q(x) \neq 0$ не могут быть вычислены в явном виде, сумма регуляризованного следа определяется точно и всегда может быть вычислена.

К аналогичным результатам пришел в том же году Л.А. Дикий, использовавший несколько иные методы. Получению формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов были посвящены работы И.М. Гельфанда, М.Г. Гасымова, Р.Ф. Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего и многих других. Наиболее общие результаты для обыкновенных дифференциальных операторов получены В.Б. Лидским и В.А. Садовничим [4]. Ими было установлено, что вывод формул указанного типа для широкого класса краевых задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра, сводится к изучению регуляризованных сумм корней целых функций с определенной асимптотической структурой.

3 Краткий обзор близких по тематике работ казахстанских авторов

Среди большого количества опубликованных работ по формулам регуляризованного следа дифференциального оператора необходимо отметить работы казахстанских математиков. Это прежде всего работы профессора Б.Е. Кангужина и его учеников и последователей.

В работе [5] предложена математическая модель о вынужденных колебаниях пакета плоских пластин с точечными упругими связями. В [6, 7] дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для бигармонического оператора в круге и шаре, выписаны их корректно разрешимые конечномерные возмущения, возникающие при рассмотрении задачи в проколотой области. В [8] найдены тождества для собственных значений оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением с внутренне краевыми условиями. В работе [9] дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в круге и в проколотом круге, приведены формулы резольвент корректных задач. В [10] в гильбертовом пространстве изучен оператор Лапласа в проколотой области, получен аналог формулы Грина и описан класс самосопряженных расширений. В [11, 12] рассмотрен класс корректных задач для оператора m-Лапласа в проколотой области и получены формулы регуляризованного следа.

Наиболее близкой к настоящей работе по тематике является [14]. В ней получена формула первого регуляризованного следа одного дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "скачка" первых производных в этих проколотых точках. Приведем этот результат более подробно.

Рассмотрена задача на собственные значения:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k,\ \ k = \overline{1,n};\ n \geq 2; \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(\frac{\pi k}{n} - 0) = y(\frac{\pi k}{n} + 0), \quad y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

где $q(x)$ – достаточное число раз дифференцируемая действительнозначная функция; β_k - действительные константы, λ – спектральный параметр.

Отметим, что при $\beta_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$ для уравнения (1) с дополнительными слагаемыми вида $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y(\frac{\pi k}{n})$ в работах [13], [2, с. 112] были выписаны формулы первого регуляризованного следа задачи. Данные работы вместе с [14] являются наиболее близкими по тематике к рассматриваемой нами задаче.

Основным результатом работы [14] является

Теорема 1 [14] *Для первого регуляризованного следа задачи (1) -(3) справедлива следующая формула:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\left(\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2-\left(1+\frac{1}{2nm+j}\right)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\Big(q(0)+q(\pi)\Big)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt, \tag{4}$$

где $\lambda_{m,j}$ - собственные значения задачи (1) - (3). При этом собственные значения имеют асимптотику $\lambda_{m,j}=s_{m,j}^2$, где

$$s_{m,j}=(2nm+j)+\frac{c_{1,j}}{2nm+j}+\frac{c_{2,j}}{(2nm+j)^2}+O\left(\frac{1}{(2nm+j)^3}\right), \tag{5}$$

$$c_{1,j}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt, c_{2,j}=\frac{1-(-1)^j}{2}\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\beta_k+\beta_{n-k}\right)e^{\frac{i\pi jk}{n}}, \tag{6}$$

$$j=\overline{1,2n}, m=0,1,2,\ldots.$$

4 Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим задачу на собственные значения для интегро-дифференциального оператора:

$$-y''(x)+q(x)y(x)+\gamma\int_0^{\pi}y(t)dt=\lambda y(x),\ \ \frac{\pi}{n}(k-1)<x<\frac{\pi}{n}k,\ \ k=\overline{1,n};\ n\geq 2; \tag{7}$$

с краевыми условиями (2) и с обобщенными условиями "склеивания" (3) в проколотых точках отрезка.

Нашей целью является построение формулы первого регуляризованного следа, наподобии формулы (4), для рассматриваемой спектральной задачи (7), (2), (3).

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2 *Для первого регуляризованного следа задачи (7), (2), (3) справедлива формула:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2n}\left(\lambda_{m,j}-(2nm+j)^2-\left(1+\frac{1}{2nm+j}\right)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\Big(q(0)+q(\pi)\Big)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt-\gamma\pi, \tag{8}$$

где $\lambda_{m,j}$ - собственные значения задачи (7), (2), (3). При этом собственные значения при больших m имеют асимптотику $\lambda_{m,j}=s_{m,j}^2$, $j=\overline{1,2n}$, где величины $s_{m,j}$, $c_{1,j}$, $c_{2,j}$ определяются формулами (5) и (6) соответственно.

5 Краткий ход доказательства теоремы

Стандартными вычислениями на каждом интервале $I_k : \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, можно выписать асимптотики (при $|s| \to \infty$) двух линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_{1,k}(x,s) \sim e^{isx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,k}(x)}{s^\nu}, \; y_{2,k}(x,s) \sim e^{-isx} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a_{\nu,k}(x)}{s^\nu},$$

где $a_{0,k}(x) \equiv 1$,

$$a_{\nu,k}(x) = \frac{i}{2} \left\{ a'_{\nu-1,k}(x) - a'_{\nu-1,k}\left(\pi \frac{k-1}{n}\right) - \int_{\pi\frac{k-1}{n}}^{x} q(t) a_{\nu-1,k}(t) dt \right\}. \tag{9}$$

Здесь, как обычно, предполагается, что комплексная плоскость ($\lambda = s^2, s = \sqrt{\lambda}$) разбита на четыре сектора лучами $\arg s = 0$ и $\arg s = \frac{\pi}{2}$ и данная асимптотика имеется в каждом из четырех секторов.

Из рекуррентной формулы (7) получаем

$$a_{1,k}(x) = -\frac{i}{2} \int_{\pi\frac{k-1}{n}}^{x} q(t)dt, \;\; a_{2,k}(x) = \frac{1}{4} \left\{ q(x) - q\left(\pi\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\int_{\pi\frac{k-1}{n}}^{x} q(t)dt\right)^2 \right\}, \ldots,$$

$$a_{\nu,k}\left(\pi\frac{k-1}{n}\right) = 0, \nu = 1, 2, \ldots;$$

$$y_{1,k}\left(\pi\frac{k-1}{n}, s\right) = e^{i\frac{\pi(k-1)s}{n}}, \;\; y_{2,k}\left(\pi\frac{k-1}{n}, s\right) = e^{-i\frac{\pi(k-1)s}{n}}.$$

На каждом из интервалов I_k общее решение интегро–дифференциального уравнения (7) строим методом вариации произвольных постоянных. Представляем решение в виде

$$y(x) = A_k(x) y_{1,k}(x,s) + B_k(x) y_{2,k}(x,s).$$

Получаем представление общего решения уравнения (7). Это решение является двупараметрическим семейством. Обозначим эти константы через A_k^0, B_k^0.

Удовлетворяя условиям краевым условиям (2) и обобщенным условиям "склеивания" (3), получаем относительно постоянных A_k^0, B_k^0 линейную систему из $2n$ уравнений, определитель $\Delta(s)$ которой и будет характеристическим определителем спектральной задачи (7), (2), (3).

Эта функция $\Delta(s)$ определяется следующим асимптотическим выражением:

$$\Delta(s) = e^{i\pi s}\left\{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 - (\beta_1 + ... + \beta_{n-1}) + \gamma\pi}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right\} +$$

$$+ e^{-i\pi s}\left\{-1 + \frac{a_1}{s} - \frac{a_2 - (\beta_1 + ... + \beta_{n-1}) + \gamma\pi}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{\pi k}{n}s}\left\{\frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right\} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-i\frac{\pi k}{n}s}\left\{\frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right\} + \left\{\frac{4i\gamma}{s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right)\right\}.$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{i}{2}\int_0^\pi q(t)dt,\ a_2 = \frac{1}{4}\left\{q(\pi) - q(0) - \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi q(t)dt\right)^2\right\}.$$

Анализируя уравнение $\Delta(s) = 0$, получаем, что задача (7), (2), (3) имеет $4n$ серий собственных значений с асимптотиками (5), (6). Учитывая, что функция $\Delta(s)$ - нечетная, получаем, что вместе с собственными значениями $s_{m,j}$ из (5) числа $-s_{m,j}$ также являются корнями характеристического многочлена. Их мы обозначим через $s_{m,j+2n}, j = \overline{1,2n}$. Отсюда получаем обращение в нуль коэффициентов $c_{2,j}$ из (6) с четными номерами j. Таким образом, в терминах спектрального параметра λ мы получим $2n$ серий собственных значений.

При этом функция $\Delta(s)$ принадлежит классу K целых функций первого порядка [4]. Поэтому для нее применима методика вычисления регуляризованной суммы корней квазимногочленов, основанная на построении дзета-функции, ассоциированной с функцией $\Delta(s)$ и использовании метода последовательных приближений Хорна (см. [4]).

Так как данная методика хорошо разработана, в силу громоздкости вычислений мы их здесь приводить не будем и на этом завершим доказательство теоремы.

Замечание 1 *В частном случае, когда $\gamma = 0$, задача (7), (2), (3) совпадает с задачей (1) - (3) и формула (8) теоремы 2 совпадает с результатом теоремы 1 – формулой (4).*

Замечание 2 *В частном случае, когда $\gamma = 0$, $\beta_k = 0, k = \overline{1, n-1}$, задача (7), (2), (3) совпадает с задачей Дирихле и основной результат теоремы 2 – формула (8) – совпадает с классическим результатом:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\lambda_m - m^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt\right) = -\frac{1}{4}\big(q(0) + q(\pi)\big) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)dt.$$

В заключение авторы выражают признательность Т.Ш. Кальменову, Б.Е. Кангужину и всем участникам Общегородского научного семинара "Дифференциальные операторы и их приложения" за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

Литература

[1] *С*адовничий В.А. Теория операторов. – М.: "Дрофа" , 2004. – 384 с.

[2] *М*итрохин С.И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. – М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2009. – 364 с.

[3] *Г*ельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – С. 593–596.

[4] *Л*идский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. – 1967. – Т.1. – №2. – С. 52-59.

[5] *Б*ерикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е. Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2010. – № 1(9). С. 72–86.

[6] *Б*ерикханова Г.Е., Кангужин Б.Е. Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора // Уфимск. матем. журн. – 2010. – Т. 2, № 1. – С. 17–34.

[7] *К*ангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимск. матем. журн. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.

[8] *К*ангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т. 3, № 3. – С. 80–92.

[9] *К*ангужин Б.Е., Анияров А.А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотом круге // Матем. заметки – 2011. – Т. 89, № 6. – С. 856–867.

[10] *К*ангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Оператор Лапласа с δ-подобными потенциалами // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 2. – С. 9–16.

[11] *К*ангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О формуле регуляризованного следа корректно возмущенного оператора Лапласа // Доклады РАН. – 2015. – Т. 460, № 1. – С. 7–10.

[12] *К*ангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О формулах регуляризованного следа корректно возмущенного оператора m-Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 12. – С. 1606–1611.

[13] *М*артинович М. Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т.18. – №3. – С. 537-540.

[14] *И*манбаев Н.С., Садыбеков М.А. Первый регуляризованный след дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. – 2014. – № 2(81). – С. 66-71.

References

[1] *S*adovnichij V.A. Teorija operatorov. – M.: "Drofa" , 2004, 384 s.

[2] *M*itrohin S.I. Spektral'naja teorija operatorov: gladkie, razryvnye, summiruemyekojefficienty. – M.: Internet-Universitet informacionnyh tehnologij, 2009, 364 s.

[3] *G*el'fand I.M., Levitan B.M. Ob odnom prostom tozhdestve dlja sobstvennyh znachenij differencial'nogo operatora vtorogo porjadka. // Dokl. AN SSSR, 1953, t. 88, s. 593-596.

[4] *L*idskij V.B., Sadovnichij V.A. Reguljarizovannye summy kornej odnogo klassa celyh funkcij. // Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija, 1967, t. 1,№ 2, s. 52-59.

[5] *B*erikhanova G.E., Zhumagulov B.T., Kanguzhin B.E. A mathematical model of vibrations for a stack of rectangular plates with allowance for pointlike constraints. // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 2010,№. 1(9), s. 72–86.

[6] *B*erikhanova G.E., Kanguzhin B.E. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufimsk. Mat. Zh., 2010, t. 2, № 1, s. 17–34.

[7] *K*anguzhin B.E., Koshanov B.D. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufimsk. Mat. Zh., 2010, t. 2, № 2, s. 41-52.

[8] *K*anguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufimsk. Mat. Zh., 2010, t. 3, № 3, s. 80-92.

[9] *K*anguzhin B.E., Aniyarov A.A. Well-posed problems for the Laplace operator in a punctured disk. // Mathematical Notes, 2011, t. 89,№ 5-6, s. 819-829

[10] *K*anguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. Laplace operator with δ-like potentials. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2014, № 2, 9–16

[11] *K*anguzhin B.E., Tokmagambetov N.E. A Regularized Trace Formula for a Well-Perturbed Laplace Operator. // Doklady Mathematics, 2015, t. 91, № 1, s. 1-4.

[12] *K*anguzhin B.E., Tokmagambetov N.E.

On Regularized Trace Formulas for a Well-Posed Perturbation of the m-Laplace Operator. // Differential Equations, 2015, t. 51,№ 12, s. 1583-1588.

[13] *M*artinovich M. Ob odnoj kraevoj zadache dlja funkcional'no-differencial'nogo uravnenija // Differenc. uravnenija, 1982, t. 18№ 3, s. 537-540.

[14] *I*manbaev N.S., Sadybekov M.A. The first regularized trace of a dierential operator of the Sturm–Liouville problem on the segment with punctured points. // ISSN 1563-0285. Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. 2014,№ 2(81), s. 66-71.