УДК 510.5

К.Ш. Абешев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: Kuanysh.Abeshev@kaznu.kz

Главные вычислимые нумерации в иерархиях*

В данной статье рассматриваются немонотонные равномерные вычисления. Показано, что коллекция конечного числа конечных расширений множества в данном классе иерархии Ершова образует главное подмножество этого класса.
Ключевые слова: вычислимые нумерации, главные нумерации, иерархия Ершова.

K. Abeshev
Universal numberings in Hierarchies

This article discusses the non-monotonic uniform enumerations. It is shown that the collection of a finitely many finite extensions of a set of the class in the Ershov hierarchy forms a universal subset of the class.
Key words: computable numbering, universal numbering, Ershov hierarchy.

К.Ш. Абешев
Иерархиялардағы басты есептелімді нөмірлеулер

Осы мақалада монотонды емес біркелкі есептелімдер қарастырылады. Ершов иерархиясында аныкталған жиынға саны ақырлы, ақырлы жиындардың кеңейімі аркылы құрастырылған ұйірде басты ішкі жиын бар екенін көрсеттік.
Түйін сөздер: есептелімді нөмірлеулер, басты нөмірлеулер, Ершов иерархиясы.

Вычислимые нумерации в иерархии Ершова

В статье [6], С. С. Гончарова и А. Сорби предлагается общий подход к изучению классов объектов, которые допускают конструктивное описание на формальном языке, с помощью Гёделевской нумерации формул языка. Согласно их подходу, нумерация называется вычислимой, если существует вычислимая функция, которая, для каждого объекта и каждого индекса этого объекта в нумерации, производит некоторые Гёделевские индексы его конструктивного описания.

Мы будем использовать символ Σ^{-1}_n для обозначения класса уровня n семейства множеств Иерархии Ершова, тогда, как обычно Σ^0_n обозначается класс уровня n арифметической иерархии. Понятие вычислимой нумерации для семейства $\mathcal{A}$ множеств в классе Σ^i_n, при $i \in \{-1, 0\}$, могут быть выведены из подхода Гончарова - Сорби следующим образом.

Нумерация α семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_n$ называется Σ^i_n-*вычислимой* если выполняется $\{\langle x, m\rangle : x \in \alpha(m)\} \in \Sigma^i_n$, т.е. бесконечная последовательность $\alpha(0), \alpha(1), \dots$ элементов семейства $\mathcal{A}$ является равномерным по Σ^i_n.

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 95/ГФ1.

Обозначим множество всех Σ^i_n-вычислимых нумерации семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_n$ через $Com^i_n(\mathcal{A})$. Так как из $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_n$ следует $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_m$ для всех $m > n$, следует, что мы должны быть осторожны в определении понятия главной нумерации.

Определение 1 Пусть $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_n$ и $m \geq n$. Нумерация $\alpha : \omega \longrightarrow \mathcal{A}$ называется *главной нумерацией в* $Com^i_m(\mathcal{A})$ если $\alpha \in Com^i_m(\mathcal{A})$ и $\beta \leqslant \alpha$ для всех $\beta \in Com^i_m(\mathcal{A})$.

Точное значение фразы "равномерная Σ^i_n последовательность $\alpha(0), \alpha(1), \ldots$ элементов семейства $\mathcal{A}$"можно объяснить следующим образом. Пусть через $A(n, x, t)$ обозначим функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $range(A) \subseteq \{0, 1\}$;

2. $A(e, x, 0) = 0$, для всех e и x.

Мы можем рассматривать эту функцию как единую процедуру для вычисления множеств $\alpha(e)$. Дано e и x, $A(e, x, 0) = 0$ означает, что первоначально число x не перечисляется в $\alpha(e)$. Номер x остается вне $\alpha(e)$ до тех пор, пока функция $\lambda t A(e, x, t)$ не поменяет своего значения с 0 на 1. Когда это произойдет, число x перечислится в $\alpha(e)$. Теперь, x остается в $\alpha(e)$ до тех пор, пока функция $\lambda t A(e, x, t)$ не поменяет своего значения с 1 в 0. В этом случае, число x покидает множество $\alpha(e)$. И вновь мы ожидаем значения функции $\lambda t A(e, x, t)$ которое может измениться с 0 на 1, чтобы положить x в множество $\alpha(e)$ во второй раз, и так далее.

Несложно проверить что, для $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_1$, нумерация α является Σ^0_1-вычислимой тогда и только тогда когда существует вычислимая функция A такая, что для всех e, x, $\lambda t A(e, x, t)$ является **монотонной** функцией, и

$$x \in \alpha(e) \iff \lim_t A(e, x, t) = 1.$$

Если выполняется $\mathcal{A} \subseteq \Delta^0_2$ тогда нумерация α является Δ^0_2-вычислимой тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция A такая, что для всех e, x, существует

$$\lim_t A(e, x, t) \text{ и } x \in \alpha(e) \iff \lim_t A(e, x, t) = 1.$$

Если $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_2$ то нумерация α Σ^0_2-вычислима тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция A такая, что для всех e, x,

$$x \in \alpha(e) \iff \lim_t A(e, x, t) \text{ существует и } \lim_t A(e, x, t) = 1.$$

Если $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^{-1}_{n+1}$ то нумерация α Σ^{-1}_{n+1}-вычислима тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция A такая, что для всех e, x,

$$|\{t : A(e, x, t+1) \neq A(e, x, t)\}| \leq n + 1$$

Где символом $|X|$ моьность данного множества X.

Для Σ^i_n-вычислимой нумерации α, скажем, что такая вычислимая функция A *представляет* Σ^i_n вычисления нумерации $\alpha(e)$.

Наконец, для семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+3}$ мы можем использовать критерии вычислимости похожие на то что, мы использовали выше, но с соответствующей функцией A вычислима относительно соответствующей итерации с скачоком над пустом множеством.

Обратите внимание, что вычислимая функция $A(e, x, t)$ монотонна по t только в Классическом случае в.п. множеств (т.е. $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_1$. Кажется, что немонотонное Поведеное этой функции является основной причиной для теоремы 1 на неудачу во всех неклассических случаях. Напомним, следующий известный результат.

Теорема 1 (Бадаев, Гончаров, Сорби, [3]) *Пусть $\mathcal{A}$ любое конечное семейство Σ^0_{n+2} множеств. Тогда семейство $\mathcal{A}$ содержит главную нумерацию в $Com^i_{n+2}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, если $\mathcal{A}$ содержит наименьшее множество по включению.*

Главные вычислимые нумерации в иерархии Ершова

Мы попытаемся найти главные вычислимые нумерации для конечного семейства в иерархии Ершова. Мы не уверены, что такая нумерация может быть найдена для всех конечных семейств.

Теорема 2 . *Для любого n, класс Σ^{-1}_{n+2} иерархии Ершова содержит главную вычислимую нумерацию в $Com^{-1}_{n+2}(\Sigma^{-1}_{n+2})$.*

Доказательство очевидно, так как несложно построить равномерно все Σ^{-1}_{n+2}-вычислимые нумерации для всех Σ^{-1}_{n+2}-вычислимых семейств. Обозначим эту главную нумерацию через $W^{(-1,n+2)}$.

Следующая теорема возникла как попытка приспособить идею wn-подмножества, к классу Σ^{-1}_{n+2} содержащая нумерацию $W^{(-1,n+2)}$. Мы будем использовать понятие wn-подмножество в форме, которая немного отличается от оригинала в книге Ершова, [4].

Определение 2 . Семейство $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_k$ называется *wn-подмножеством* Σ^{-1}_k, если существует вычислимо перечислимое (в.п.) множество I и поледовательность $\{V_e\}_{e\in\omega}$ такая, что

1. I содержит индексное множество семейства $\mathcal{A}$ по отношению к нумерации $W^{(-1,k)}$;
2. V является Σ^{-1}_k-вычислимой нумерацией;
3. для всех $e \in I$, $V_e \in \mathcal{A}$;
4. для всех $e \in I$, если $W^{(-1,k)}_e \in \mathcal{A}$, тогда $V_e = W^{(-1,k)}_e$.

Лемма 1 . *Если семейство $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^i_k$ является wn-подмножеством семейства Σ^{-1}_k, тогда $\mathcal{A}$ имеет главную нумерацию в $Com^{-1}_k(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Доказательством является простая модификация оригинального доказательства Ершова, [4].

Теорема 3 .*[1] Для любых $k > 1$ и $m > 0$. Пусть множества $F_0, F_1, \ldots, F_m$ являетюся конечной последовательностью конечных множеств и $B \in \Sigma^{-1}_k$ множество такое, что пересечение любого F_i из последовательности с B пусто, тогда семейство $\mathcal{A} = \{B \cup F_i : i \leq m\}$ является wn-подмножеством Σ^{-1}_k.*

Доказательство. Мы будем строить вычислимую функцию $V(e,x,s)$ по шагам конструкции, которая будет представлять нумерацию V.

Множество I будет определено в конце конструкции.

Пусть $B(x,s)$ является вычислимой функцией которая представляет Σ_k^{-1} вычисление множества B.

Можно предположить, что $B(x,s)=0$ для всех пар (x,s) с условием $x\in F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_m$. Допустим, что $V(e,x,s)=B(x,s)$ для всех троек (e,x,s) с условием $x\notin F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_m$. Таким образом, зафиксируем e и опишем, равномерно по e, как получить значения необходимые для определения функции $V(e,x,s)$ для всех пар (x,s) с условием $x\in F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_m$.

Пусть $P(e,x,s)$ вычислимая функция, которая представляет нумерацию $W^{(-1,k)}$ и обозначим объединение $F_0\cup F_1\cup\cdots\cup F_m$ через F.

Конструкция. При $s=0$ пусть $V(e,x,0)=0$ для всех $x\in F$. Для определения $V(e,x,s+1)$ мы выделим следующие случаи.

Случай 1: Существует $i\le m$ такой, что

$$P(e,x,s)=1 \iff x\in F_i$$

для всех $x\in F$.

Тогда пусть

$$V(e,x,s+1)=\begin{cases}1, & \text{if } x\in F_i;\\ 0, & \text{if } x\in F\setminus F_i.\end{cases}$$

Случай 2: В противном случае, пусть $V(e,x,s+1)=V(e,x,s)$ для всех $x\in F$.

Теперь определим множество I. Если последовательность $F_0,F_1,\dots,F_m$ содержит пустое множество то, пусть $I=\omega$. В противном случае, пусть $I=\{e:\exists x\exists s(x\in F\wedge V(e,x,s)=1)\}$.

Остается только проверить, что требования определения 2 выполнены этой последовательностью $\{V_e\}_{e\in\omega}$ и множеством I.

Список литературы

[1] *Абешев, К.Ш., Бадаев, С.А.*, Заметки об универсальных нумерациях, 5-я Конференция по вычислимости в европе, CiE 2009, 23-27.

[2] *Бадаев, С.А., Гончаров, С.С.*: Теория нумерации: Открытые проблемы. В: Чолак, П.А., Лемпп, Ш., Лерман, М., Соар, Р.А. (и т.д.): Теория вычислимости и его приложения. Современные тенденции и открытые проблемы. Амер. Мат. Общ., (2000) 23-38.

[3] *Бадаев, С.А., Гончаров, С.С., Сорби, А.*: Арифметические нумерации: полнота и универсальность. В: *Купер, С.Б., Гончаров, С.С.* : Вычислимость и модели Клювер / Пленум Publishers, Нью-Йорк (2003), 11–44.

[4] *Ершов, Ю.Л.*: Теория нумерации. Наука, Москва (1977)

[5] *Ершов, Ю.Л.*: Теория нумерации. В: Справочник по Теории вычислимости. Северная Голландия, Амстердам (1999), 473-–503.

[6] *Гончаров, С.С., Сорби А.*: Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса. // Алгебра и Логика, 1997, vol. 36, no. 6, 621–641 (Russian); [Algebra and Logic, 1997, vol. 36, no. 6, 359–369 (English translation)].

[7] *Мальцев, А.И.*: К теории вычислимых семейств объектов. // Алгебра и Логика, 1963, том. 3, №4, 5–31.

References

[1] *K. Abeshev and S. Badaev*, A note on universal numberings, 5th Conference on Computability in Europe, CiE 2009, pp. 23-27.

[2] *Badaev, S.A., Goncharov, S.S.*: The Theory of Numberings: Open Problems. In: Cholak, P.A., Lempp, S., Lerman, M., Shore, R.A. (eds.): Computability Theory and its Applications. Current Trends and Open Problems. Amer. Math. Soc., Providence, (2000) 23-–38

[3] *Badaev, S.A., Goncharov, S.S., Sorbi, A.*: Arithmetical numberings: completeness and universality. In: Cooper, S.B., Goncharov, S.S. (eds.): Computability and Models Kluwer / Plenum Publishers, New York (2003), 11–44.

[4] *Ershov, Yu.L.*: Theory of Numberings. Nauka, Moscow (1977)

[5] *Ershov, Yu.L.*: Theory of Numberings. In: Handbook of Computability Theory. North-Holland, Amsterdam (1999), 473-–503

[6] *Goncharov, S.S., Sorbi A.*: Generalized computable numerations and non-trivial Rogers semilattices. Algebra i Logika, 1997, vol. 36, no. 6, 621–641 (Russian); Algebra and Logic, 1997, vol. 36, no. 6, 359–369 (English translation).

[7] *Mal'tsev, A.I.*: Towards a theory of computable families of objects. Algebra i Logika, 1963, vol. 3, no. 4, 5–31 (Russian); English translation in: A.I. Mal'tsev, The Metamathematics of Algebraic Systems. North-Holland, Amsterdam, 1971, pp. 353–378.

Поступила в редакцию 16 сентября 2013 года