УДК 517.956

Е.С. Алимжанов

НИИ Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан; e-mail: aermek81@gmail.com

Решение модельной задачи Веригина с малым параметром в пространстве Гельдера*

В данной работе исследуется модельная задача Веригина, возникающая при решении нелинейной задачи со свободной границей с условием Веригина на неизвестной (свободной) границе. Будут доказаны существование, единственность и равномерные по малому параметру оценки решения. Полученные результаты будут использованы для доказательства существования, единственности и оценок решения линеаризованной и нелинейной задач Веригина с малым параметром. Кроме того, будет установлена оценка производной $\varepsilon\rho'(t)$, что существенно для обоснования предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в этих задачах.

Ключевые слова: задача Веригина, задача со свободными границами, уравнение параболического типа, пространство Гельдера, оценка решения.

Ye.S. Alimzhanov

Solution of the model Verigin problem with a small parameter in the Holder space

In this paper we study the model Verigin problem arising on solving nonlinear free boundary problem with Verigin condition on the unknown (free) boundary. We prove existence, uniqueness and uniform respect to the small parameter estimates of solution. Obtained results will be used to prove the existence, uniqueness and estimates of solution of the linearized and non-linear Verigin problems with a small parameter. Furthermore, the estimate of the derivative $\varepsilon\rho'(t)$ will be established, which is essential for justification limit as $\varepsilon \to 0$ in these problems.

Key words: Verigin problem, free boundary problem, parabolic equation, Holder space, estimate of the solution.

Е.С. Әлімжанов

Гельдер кеңістігіндегі кіші параметрлі Веригин моделді есебінің шешімі

Бұл жұмыста белгісіз шекарада Веригин шарты қойылған еркін шекаралы сызықсыз есепті шешу барысында пайда болатын Веригин моделді есебі қарастырылған. Есеп шешімінің бар, жалғыз және кіші параметрге қатысты бірқалыпты бағалаулары орнатылады. Алынған нәтижелер кейін кіші параметрлі сызықтанған және сызықсыз Веригин есеп шешімінің бар, жалғыз және бағалауларын дәлелдеу үшін қажет. Сонымен қатар, $\varepsilon\rho'(t)$ туындысының бағалауы орнатылған, ол нәтиже осы есептерде $\varepsilon \to 0$ шектік жағдайын дәлелдеу үшін маңызды.

Түйін сөздер: Веригин есебі, еркін шекаралы есеп, параболалық теңдеу, Гельдер кеңістігі, шешім бағалауы.

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 0736/ГФ.

1. Постановка задачи

Пусть $D_1 := \{x \,|\, x < 0\}$, $D_2 = \{x \,|\, x > 0\}$, $D_{jT} := D_j \times (0,T)$, $j = 1,2$, $\sigma_T = (0,T)$. Сформулируем модельную задачу Веригина с малым параметром $\varepsilon > 0$ в граничном условии.

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\rho(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\partial_t u_j(x,t) - a_j^2 \partial_x^2 u_j(x,t) - \alpha_j \rho'(t) = f_j(x,t) \quad \text{в} \ D_{jT}, \ \ j = 1,2, \tag{1}$$

начальным условиям

$$\rho(t)\big|_{t=0} = 0, \quad u_j(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \ D_j, \ \ j = 1,2, \tag{2}$$

условиям сопряжения на границе $x = 0$, $t \in \sigma_T$:

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = \varphi_1(t), \tag{3}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1(x,t) - \lambda_2 \partial_x u_2(x,t) = \varphi_2(t), \tag{4}$$

$$\lambda_1 \partial_x u_1(x,t) + \varepsilon \rho'(t) = \varphi_3(t), \tag{5}$$

где коэффициенты a_j, α_j, λ_j, $j = 1,2$ – положительные постоянные, $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, $\partial_t = \partial / \partial t$, $\rho' = d\rho/dt$, $k = 1,2,\ldots$

Задача Веригина описывает процесс нагнетания (вытеснения) жидкости в пористой среде и состоит в определении положения поверхности раздела нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, а также давлений этих жидкостей. При $\varepsilon = 1$ нелинейная одномерная задача Веригина со свободной границей была сформулирована впервые Н.Н. Веригиным в 1952 г. статье [1], где было найдено точное автомодельное решение двухфазной задачи с рассогласованием начальных и краевых данных и вырождением области начального существования одной из фаз. Также существование и единственность решения одномерной задачи Веригина исследовали Л.И. Рубинштейн [2], Л.И. Камынин [3], L.C. Evans, A. Fridman [4], А.М. Мейрманов [5], и другие. В статье [6] Г.И. Бижановой были доказаны существование и единственность решения в весовых и классических пространствах Гельдера и установлены коэрцитивные оценки решения. В работе [7] T. Youshan, F. Yi изучена двумерная задача Веригина с малым параметром в граничном условии и доказаны существование и оценки решения в пространстве Гельдера. Нелинейные и линеаризированные задачи Стефана с малым параметром в граничных условиях были рассмотрены в работах J.F. Rodrigues, V.A. Solonnikov, F. Yi, [8] и Г.И. Бижановой [9], [10].

Задача (1) – (5) будет изучаться в пространствах Гельдера $\overset{\circ}{C}{}_{x\,t}^{2+l,1+l/2}(\bar{D}_{jT})$, $l-$ нецелое положительное число, $j = 1,2$ и $\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar{\sigma}_T)$ функций $v_j(x,t)$ и $\rho(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\partial_t^i v_j\big|_{t=0} = 0, \quad j = 1,2, \qquad \frac{d^i \rho}{dt^i}\bigg|_{t=0} = 0, \ \ i = 0,\ldots,1+[l/2],$$

и имеющих нормы

$$|v_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} := \sum_{2p+q\le 2+[l]} |\partial_t^p \partial_x^q v_j|_{D_{jT}} + \sum_{2p+q=2+[l]} [\partial_t^p \partial_x^q v_j]^{(\alpha)}_{D_{jT}}$$

$$+ \sum_{2p+q=1+[l]} [\partial_t^p \partial_x^q v_j]^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{t,D_{jT}}, \quad \alpha = l-[l] \in (0,1), \ \ j=1,2, \tag{6}$$

$$|\rho|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} := \sum_{p\le 1+[l/2]} |d_t^p \rho|_{t\in\sigma_T} + \left[d_t^{1+[l/2]}\rho\right]^{(l/2-[l/2])}_{t\in\sigma_T}, \tag{7}$$

где $d_t^p = d^p/dt^p$, $|v|_{D_{jT}} = \sup\limits_{(x,t)\in D_{jT}} |v(x,t)|$, $\ [v]^{(\alpha)}_{D_{jT}} = [v]^{(\alpha)}_{x,D_{jT}} + [v]^{(\alpha/2)}_{t,D_{jT}}$,

$$[v]^{(\alpha)}_{t,D_{jT}} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in D_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^\alpha}, \qquad [v]^{(\alpha)}_{x,D_{jT}} = \sup_{(x,t),(y,t)\in D_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(y,t)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Справедлива следующая лемма [11].

Лемма 1 *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}^{(1+l)/2}(\bar\sigma_T)$, $\ l$ *– нецелое положительное число, норма* $|\rho|^{(1+l)/2}_{\bar\sigma_T}$, *определенная в формуле* (7), *эквивалентна норме*

$$\|\rho\|^{(1+l)/2}_{\bar\sigma_T} = \sup_{t\in\sigma_T} t^{-\frac{1+l}{2}} |\rho|_{\bar\sigma_T} + \left[d_t^{[(1+l)/2]}\rho\right]^{\left(\frac{1+l}{2}-\left[\frac{1+l}{2}\right]\right)}_{\bar\sigma_T}. \tag{8}$$

2. Основные результаты

Сформулируем теоремы.

Теорема 1 *Пусть* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\alpha_2-\alpha_1>0$, $l-$ *нецелое положительное число.*

Для любых функций $f_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{x\ \ t}(\bar D_{jT})$, $j=1,2$, $\varphi_1(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar\sigma_T)$, $\varphi_i(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar\sigma_T)$, $i=2,3$, *задача* (1)-(5) *имеет единственное решение* $u_j(x,t)\in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\ \ \ \ \ t}(\bar D_{jT})$, $j=1,2$, $\rho(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar\sigma_T)$, $\varepsilon\rho'(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar\sigma_T)$, *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} + |\rho|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + |\varepsilon\rho'|^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}_{\sigma_T} \le C_1 \left(\sum_{j=1}^{2} |f_j|^{(l)}_{D_{jT}} + |\varphi_1|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + \sum_{i=2}^{3} |\varphi_i|^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}_{\sigma_T} \right),$$

где постоянная C_1 *не зависит от* ε.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда производная* $\varepsilon\rho'(t)$ *в условии* (5) *задачи* (1)-(5) *удовлетворяет неравенству*

$$|\varepsilon\rho'(t)|^{\left(\frac{1+[l]+\beta}{2}\right)}_{\sigma_T} \le C_2 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} |f_j|^{(l)}_{D_{jT}} + |\varphi_1|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + \sum_{i=2}^{3} |\varphi_i|^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}_{\sigma_T} \right), \ \beta\in(0,\alpha), \tag{9}$$

где постоянная C_2 *не зависит от* ε.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Преобразуем задачу (1) – (5) к эквивалентной с однородными уравнениями (1) и условиями (3), (4). Для этого построим вспомогательные функции $V_j(x,t),\ j=1,2$, которые являются решением следующей краевой задачи:

$$\partial_t V_j - a_j^2\partial_x^2 V_j = f_j(x,t) \quad \text{в} \ D_{jT}, \quad V_j\big|_{t=0} = 0 \ \text{в} \ D_j, \ \ j=1,2, \tag{10}$$

$$(V_1 - V_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \ \ \lambda_1\partial_x V_1\big|_{x=0} - \lambda_2\partial_x V_2\big|_{x=0} = \varphi_2(t), \ \ t\in\sigma_T. \tag{11}$$

Известно [12], что задача (10), (11) в условиях теоремы 1 имеет единственное решение $V_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\bar{D}_{jT}),\ j=1,2$, удовлетворяющее оценке

$$\sum_{j=1}^{2}|V_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_3\left(\sum_{j=1}^{2}|f_j|_{D_{jT}}^{(l)} + |\varphi_1|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |\varphi_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\right). \tag{12}$$

С помощью замены в задаче (1) – (5)

$$u_j(x,t) = v_j(x,t) + V_j(x,t) + \alpha_j\rho(t), \quad j=1,2, \tag{13}$$

получим следующую задачу для нахождения функций $v_j(x,t),\ j=1,2,\ \rho(t)$:

$$\partial_t v_j(x,t) - a_j^2\partial_x^2 v_j(x,t) = 0 \quad \text{в} \ D_{jT}, \ \ j=1,2, \tag{14}$$

$$\rho(t)\big|_{t=0} = 0, \quad v_j(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \ D_j, \ \ j=1,2, \tag{15}$$

$$(v_1(x,t) - v_2(x,t))\big|_{x=0} = (\alpha_2-\alpha_1)\rho(t), \quad (\lambda_1\partial_x v_1(x,t) - \lambda_2\partial_x v_2(x,t))\big|_{x=0} = 0, \tag{16}$$

$$\lambda_1\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} + \varepsilon\rho'(t) = \Phi(t), \quad t\in\sigma_T, \tag{17}$$

где функция $\Phi(t) = \varphi_3(t) - \lambda_1\partial_x V_1\big|_{x=0}$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{(1+l)/2}(\bar{\sigma}_T)$ и подчиняется оценке

$$|\Phi|_{\sigma_T}^{(1+l)/2} \le C_4\left(\sum_{j=1}^{2}|f_j|_{D_{jT}}^{(l)} + |\varphi_1|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + \sum_{j=2}^{3}|\varphi_j|_{\sigma_T}^{(1+l)/2}\right). \tag{18}$$

В работе [13] была доказана

Лемма 2 *Пусть* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\ \alpha_2-\alpha_1>0$. *Решение задачи* (14) – (17) *имеет вид*

$$\rho(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Phi(\tau)G(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}(\Phi * G), \tag{19}$$

$$v_j(x,t) = \frac{k}{\varepsilon b_j}\int_0^t \Phi(\tau)G_j(x,t-\tau)\,d\tau = \frac{k}{\varepsilon b_j}(\Phi * G_j) \quad j=1,2, \tag{20}$$

где

$$G(t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_x \Gamma_j(a_j k\sigma/\varepsilon + (-1)^j x, t-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma, \;\; j = 1, 2, \tag{21}$$

$$G_j(x,t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_x \Gamma_j(ka_j\sigma/\varepsilon + (-1)^j x, t-\sigma)\, d\sigma, \;\; j = 1, 2, \tag{22}$$

$$b_j = \frac{\lambda_j}{a_j} > 0, \;\; j = 1, 2, \qquad k = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1\lambda_2}{a_1\lambda_2 + a_2\lambda_1} > 0, \tag{23}$$

$\Gamma_j(x,t) = \dfrac{1}{2a_j\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a_j^2 t}}$ – *фундаментальное решение уравнения теплопроводности* (14), *удовлетворяющее оценке*

$$|\partial_t^p \partial_x^q \Gamma_j(x,t)| \le \frac{C_5}{t^{\frac{1+2p+q}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}}, \;\; j = 1, 2. \tag{24}$$

Теорема 3 *Пусть* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$, $l-$ *нецелое положительное число. Для любой функции* $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *задача* (14)-(17) *имеет единственное решение* $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l, 1+l/2}_{x \quad t}(\bar{D}_{jT})$, $j = 1, 2$, $\rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar{\sigma}_T)$, $\varepsilon d_t \rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} |v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} + |\rho|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |\varepsilon\rho'|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)} \le C_6 |\Phi|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}, \tag{25}$$

где постоянная C_6 *не зависит от* ε.

Для доказательства этой теоремы установим сначала следующую лемму.

Лемма 3 *В условиях теоремы 3 производная* $\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}$ *функции* $v_1(x,t)$, *определенной по формуле* (20), *принадлежит пространству* $\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar{\sigma}_T)$ *и подчиняется оценке*

$$\left|\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)} \le C_7 |\Phi(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}, \tag{26}$$

где C_7 – *постоянная, не зависящая от* ε.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \frac{k}{\varepsilon b_1}\left(\Phi * \partial_x G_1\big|_{x=0}\right)$ (см. формулу (20)). Для доказательства леммы согласно определению нормы (7) нужно оценить производные

$$\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \frac{k}{\varepsilon b_1} \int_0^t \Phi_i(t-\tau)\partial_x G_j(x,\tau)\big|_{x=0} d\tau, \quad i = 1, 2, \tag{27}$$

где $q = \left[\frac{1+l}{2}\right]$ и

$$\Phi_1(t) := d_t^p \Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T) \;\text{ при }\; [l] = 2p - \text{четном}, \tag{28}$$

$$\Phi_2(t) := d_t^{p+1} \Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T) \;\text{ при }\; [l] = 2p+1 - \text{нечетном}, \tag{29}$$

$p = 0, \dots, \left[\frac{1+l}{2}\right]$, $\alpha = l - [l] \in (0,1)$.

Так как $\Phi_i(t) \in \overset{\circ}{C}^{\frac{2+\alpha-i}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, $i = 1, 2$, то для них справедливы следующие неравенства при $t_1 < t$:

$$|\Phi_i(t) - \Phi_i(t_1)| \le M_i (t - t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}},\ |\Phi_i(t)| \le M_i t^{\frac{2+\alpha-i}{2}},\ M_i = [\Phi_i]_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)}, \tag{30}$$

$i = 1, 2$, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

В зависимости от значения показателя l нам необходимо оценить нормы $\left|\frac{k}{\varepsilon b_1}\left(\Phi_1 * \partial_x G_1\big|_{x=0}\right)\right|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$ и $\left|\frac{k}{\varepsilon b_1}\left(\Phi_2 * \partial_x G_1\big|_{x=0}\right)\right|_{\sigma_T}^{(\alpha/2)}$. Учитывая формулу (22), запишем производную $\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}$ в виде

$$\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \frac{2a_1^2 k}{\varepsilon b_1} \int_0^t \Phi_i(t-\tau) d\tau \int_0^\tau \partial_x^2 \Gamma_1(k a_1 \sigma/\varepsilon - x, \tau - \sigma)\big|_{x=0} d\sigma,$$

затем поменяем порядок интегрирования, произведем замену $t - \tau + \sigma = \tau_1$ в интеграле по τ и запишем в виде

$$\begin{aligned}\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} =& \frac{2a_1^2 k}{\varepsilon b_1} \left\{ \int_0^t d\sigma \int_\sigma^t [\Phi_i(\tau_1 - \sigma) - \Phi_i(t-\sigma)] \partial_x^2 \Gamma_1(\cdot, t - \tau_1)\big|_{x=0} d\tau_1 \right. \\ &\left. + \int_0^t d\sigma \int_\sigma^t \Phi_i(t-\sigma) \partial_x^2 \Gamma_1(\cdot, t-\tau_1)\big|_{x=0} d\tau_1 \right\}.\end{aligned}$$

Во втором интеграле заменим $\partial_x^2 \Gamma_1$ на $1/a_1^2 \partial_t \Gamma_1$ и проинтегрируем по τ_1, тогда получим

$$\begin{aligned}\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \frac{2a_1^2 k}{\varepsilon b_1} &\left\{ \int_0^t d\tau \int_0^\tau [\Phi_i(\tau - \sigma) - \Phi_i(t - \sigma)] \times \right. \\ \times \partial_x^2 \Gamma_1(a_1 k \sigma/\varepsilon - x, t - \tau)\Big|_{x=0} d\sigma &+ \left. \frac{1}{a_1^2} \int_0^t \Phi_i(t-\sigma) \Gamma_1(a_1 k \sigma/\varepsilon - x, t - \sigma)\big|_{x=0} d\sigma \right\},\end{aligned} \tag{31}$$

где $i = 1, 2$, $q = \left[\frac{1+l}{2}\right]$, а вместо τ_1 мы снова записали τ.

Оценим модуль производной (31). Применим оценку (24) для $\Gamma_1(x,t)$ и неравенства (30), тогда

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right| \le \frac{C_7 M_i}{\varepsilon} &\left(\int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t-\tau)}} d\sigma + \right. \\ &\left. + \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t-\sigma)}} d\sigma \right),\ \ i = 1, 2,\ q = \left[\tfrac{1+l}{2}\right].\end{aligned}$$

Затем произведем замену $\dfrac{k\sigma}{\varepsilon\sqrt{8(t-\tau)}} = \xi$ в первом интеграле по σ, применим неравенства $1/(t-\sigma) \ge 1/t$ в экспоненте и $t - \tau \le t$ в числителе дроби, а во втором интеграле, воспользовавшись неравенством $t - \sigma \le t$ и оценкой [9]

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{(k a_j \sigma/\varepsilon)^2 + x^2}{8a_j^2(t-\sigma)}} d\sigma \le \frac{C\varepsilon}{t} e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}}, \quad j = 1, 2, \tag{32}$$

будем иметь

$$\left|\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right| \le C_8 M_i \left(\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{i-\alpha}{2}}} + t^{\frac{4+\alpha-i}{2}} \frac{1}{t} \right) \le C_9 M_i t^{\frac{2+\alpha-i}{2}}, \tag{33}$$

где $i = 1, 2$, $q = \left[\frac{1+l}{2}\right]$, постоянные C, C_8 C_9 не зависят от ε.

Приняв $0 < t_1 < t < T$, для определенности, и воспользовавшись формулой (31), запишем разность производных $\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} - \partial_{t_1}^q \partial_x v_1(x,t_1)\big|_{x=0}$ в виде

$$\begin{aligned}
\Delta &= \partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} - \partial_{t_1}^q \partial_x v_1(x,t_1)\big|_{x=0} \\
&\equiv \frac{k}{\varepsilon b_1} \left(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau [\Phi_i(\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\sigma)] \partial_x^2 \Gamma_1(\cdot, t-\tau)\big|_{x=0} d\sigma \right. \\
&+ \int_0^{t_1} d\tau \int_0^\tau [\Phi_i(\tau-\sigma) - \Phi_i(t_1-\sigma)] d\sigma \int_{t_1}^t \partial_{t_2} \partial_x^2 \Gamma_1(\cdot, t_2-\tau)\big|_{x=0} dt_2 \\
&\quad + \int_{t_1}^t \Phi_i(t-\sigma)\Gamma(\cdot, t-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma + \int_0^{t_1} [\Phi_i(t-\sigma) - \Phi_i(t_1-\sigma)]\Gamma_1(\cdot, t-t_1)\big|_{x=0} d\sigma \\
&\quad \left. + \int_0^{t_1} \Phi_i(t_1-\sigma) d\sigma \int_{t_1}^t \partial_{t_2} \Gamma_1(\cdot, t_2-\sigma)\big|_{x=0} dt_2 \right).
\end{aligned}$$

Для оценки Δ используем неравенства (24) и (30), тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\le \frac{C_9 M_i}{\varepsilon} \left(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t-\tau)}} d\sigma \right. \\
&+ \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t_2-\tau)^{5/2}} d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t_2-\tau)}} d\sigma + \int_{t_1}^t \frac{(t-\sigma)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t-\sigma)}} d\sigma \\
&\left. + (t-t_1)^{\frac{1+\alpha-i}{2}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t-t_1)}} d\sigma + \int_0^{t_1} (t_1-\sigma)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} d\sigma \int_{t_1}^t \frac{e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t_2-\sigma)}}}{(t_2-\sigma)^{3/2}} dt_2 \right).
\end{aligned}$$

Применив неравенства $t_1 - \tau \le t_2 - \tau$ во втором, $t - \sigma \le t - t_1$, $1/(t-\sigma) \ge 1/(t-t_1)$ – в третьем, и $(t_1-\sigma) \le t_1 \le t_2$ – в последнем интегралах и проинтегрировав первый и четвертый интегралы, найдем

$$|\Delta| \le \frac{C_{10} M_i}{\varepsilon} \left((t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} \varepsilon + \int_{t_1}^t t_2^{\frac{2+\alpha-i}{2}} dt_2 \int_0^{t_2} \frac{e^{-\frac{k^2\sigma^2}{8\varepsilon^2(t_2-\sigma)}}}{(t_2-\sigma)^{3/2}} d\sigma \right).$$

Воспользовавшись в интеграле по σ оценкой (32), получим

$$|\Delta| \le C_{11} M_i (t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}, \quad \left[\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right]_{t,\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)} \le C_{11} M_i,\ i = 1, 2, \tag{34}$$

здесь постоянная C_{11} не зависит от ε. Отсюда будет следовать неравенство

$$\left[\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right]_{t,\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)} \le C_{11} [\Phi(t)]_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}.$$

Из оценок (33), (34) следует, что $\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{2+\alpha-i}{2}}(\bar\sigma_T)$ и

$$\left|\partial_t^q \partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}\right|_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)} \le C_{12}|\Phi_i(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)},\ i=1,2,\ q=\left[\tfrac{1+l}{2}\right], \tag{35}$$

где C_{12} не зависит от ε. Отсюда, учитывая (27)–(29), мы получим неравенство (26). □

Доказательство теоремы 3. По лемме 3 производная $\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar\sigma_T)$, тогда из второго равенства в (16) следует, что $\partial_x v_2(x,t)\big|_{x=0}$ тоже принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar\sigma_T)$. В таком случае, по теореме о следах функций общей теории параболических уравнений мы получим, что $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\bar D_{jT})$, $j=1,2$, и $|v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_{13}|\partial_x v_j\big|_{x=0}|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)} \le C_{14}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}$, $\quad j=1,2$. Из первого равенства в условии (16) вытекает, что функция $\rho(t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar\sigma_T)$ и подчиняется оценке $|\rho(t)|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} \le C_{15}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}$, а из равенства (17) будет следовать, что $\varepsilon\rho'(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\bar\sigma_T)$ и $|\varepsilon\rho'(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)} \le C_{16}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+l}{2}\right)}$, где постоянные $C_{13}-C_{16}$ не зависят от ε. Тем самым мы доказали теорему 3 и неравенство (25). □

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 3 и неравенства (25), учитывая замену (13) и оценки (12), (18) для функций $V_j(x,t)$, $j=1,2$ и $\Phi(t)$, вытекает справедливость теоремы 1. □

Приступим к доказательству теоремы 2. Для этого установим теорему 4 для задачи (14)–(17), к которой мы свели задачу (1)–(5).

Теорема 4 *Пусть* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\Phi(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+p+\alpha}{2}}(\bar\sigma_T)$, $p=0,1,\ldots$.

Тогда производная $\varepsilon\rho'(t)$ *в условии* (17) *задачи* (14)-(17) *удовлетворяет неравенству*

$$|\varepsilon\rho'(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\beta}{2}\right)} \le C_{17}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\alpha}{2}\right)}, \quad \beta\in(0,\alpha), \tag{36}$$

где постоянная C_{17} *не зависит от* ε.

Доказательство. Рассмотрим задачу (14)-(17). Мы построили ее решение в виде (19)-(23). Из условия (17) найдем

$$\varepsilon\rho'(t) = \Phi(t) - \lambda_1\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \Phi(t) - \frac{k\lambda_1}{\varepsilon b_1}(\Phi * \partial_x G_1), \tag{37}$$

где константы $k>0$, $b_1>0$ и функция $G_1(x,t)$ определены в (23), (22), соответственно. Вычислим выражение $\lambda_1\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}$:

$$\begin{aligned}\lambda_1\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} &= \frac{2ka_1^2\lambda_1}{\varepsilon b_1}\int_0^t \Phi(\tau)d\tau\int_0^{t-\tau}\partial_x^2\Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0}d\sigma\\ &= \frac{2ka_1^2\lambda_1}{\varepsilon b_1}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \Phi(\tau)\partial_x^2\Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma - w_1(t),\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} w_1(t) = \frac{2ka_1^2\lambda_1}{\varepsilon b_1}\int_0^t d\tau\int_0^\tau [\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(\tau)]\partial_x^2\Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma\\ \equiv \frac{2ka_1^3}{\varepsilon}\int_0^t d\tau\int_0^{t-\tau}[\Phi(t-\tau-\sigma)-\Phi(t-\tau)]\partial_x^2\Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0}d\sigma.\end{aligned} \tag{39}$$

В формуле (38) интеграл по σ можно записать в виде

$$\int_0^\tau \partial_x^2\Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, t-\tau)\big|_{x=0}\,d\sigma = -\frac{\varepsilon}{ka_1}\int_0^\tau \frac{d}{d\sigma}\partial_x\Gamma_1(\cdot)\big|_{x=0}\,d\sigma$$
$$= \frac{\varepsilon}{ka_1}\left[\partial_x\Gamma_1(-x,t-\tau)\big|_{x=0} - \partial_x\Gamma_1(ka_1\tau/\varepsilon - x, t-\tau)\big|_{x=0}\right].$$

Подставив это выражение в (38) и применяя формулу скачка потенциала двойного слоя

$$2a_1^2\int_0^t \Phi(\tau)\partial_x\Gamma_1(-x,t-\tau)\,d\tau \to \Phi(t) \ \text{ при } \ x\to 0,$$

получим

$$\lambda_1\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} = \Phi(t) + w_1(t) + w_2(t), \tag{40}$$

где $w_1(t)$ определена по формуле (39),

$$w_2(t) = -2a_1^2\int_0^t \Phi(\tau)\partial_x\Gamma_1(ka_1\tau/\varepsilon - x, t-\tau)\big|_{x=0}\,d\tau$$
$$\equiv 2a_1^2\int_0^t \Phi(t-\tau)\partial_x\Gamma_1(ka_1(t-\tau)/\varepsilon - x,\tau)\big|_{x=0}\,d\tau.$$

Подставляя выражение (40) в формулу (37), найдем

$$\varepsilon\rho'(t) = -w_1(t) - w_2(t). \tag{41}$$

Рассмотрим функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Мы должны оценить нормы этих функций в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{(1+p+\beta)/2}(\bar\sigma_T)$, $\beta\in(0,\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$, $p=0,1,2,\dots$ По лемме 1 нам достаточно оценить норму (8) вместо нормы (7).

Оценим модуль потенциала $w_1(t)$. Для этого используем неравенство (24) для $\Gamma_1(x,t)$ и оценки для функции $\Phi(t)\in \overset{\circ}{C}{}^{(1+p+\alpha)/2}(\bar\sigma_T)$:

$$\begin{aligned}|\Phi(\tau)-\Phi(\tau-\sigma)| &\le \begin{cases} M\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \text{при } \ p=0,\\ C_{18}M\sigma\tau^{\frac{p-1+\alpha}{2}}, & \text{при } \ p\ge 1,\end{cases}\\ |\Phi(t)| &\le Mt^{\frac{1+p+\alpha}{2}}, \quad M = [D_t^m\Phi]_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\alpha}{2}-m\right)}, \ m = [frac1+p+\alpha 2].\end{aligned} \tag{42}$$

Тогда при $p=0$ получим

$$|w_1(t)| \le \frac{C_{19}M}{\varepsilon}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \frac{\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}d\sigma, \tag{43}$$

а при $p\ge 1$

$$|w_1(t)| \le \frac{C_{20}M}{\varepsilon}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \frac{\sigma\tau^{\frac{p-1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}d\sigma. \tag{44}$$

В (43) применяя неравенства

$$|\xi|^\gamma e^{-\xi^2} \le C_\gamma e^{-\xi^2/2}, \quad \gamma \ge 0 \tag{45}$$

и $\sigma^{(1+\beta)/2} \le \tau^{(1+\beta)/2} \le t^{(1+\beta)/2}$, $\beta \in (0,\alpha)$, и интегрируя по σ, получим

$$|w_1(t)| \le C_{21} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+\beta}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} = C_{22} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}.$$

Далее, в (44) ($p \ge 1$) используем неравенства $\tau^{\frac{p-1+\alpha}{2}} \le t^{\frac{p-1+\alpha}{2}}$ и (45), затем $\sigma^{1-(\alpha-\beta)/2} \le \tau^{1-(\alpha-\beta)/2} \le t^{1-(\alpha-\beta)/2}$, $\beta \in (0,\alpha)$, и проинтегрировав по σ, найдем

$$|w_1(t)| \le C_{23} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+p+\beta}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} = C_{24} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+p+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}, \tag{46}$$

где M – константа Гёльдера из (42).

Оценка модуля функции $w_2(t)$ производится аналогично

$$\begin{aligned} |w_2(t)| &\le C_{25} M \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\frac{1+p+\alpha}{2}}}{\tau} e^{-\frac{k^2(t-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}} d\tau \\ &\le C_{26} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+p+\beta}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \le C_{27} M \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+p+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}, \end{aligned} \tag{47}$$

$\beta \in (0,\alpha)$, $p = 0,1,2,\ldots$

В зависимости от четности и нечетности числа p показатель Гёльдера старшей производной функции $\Phi(t)$ из (42) будет разным:

1) при $p = 2m$ – четном, $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+2m+\alpha}{2}}(\sigma_T)$ и $d_t^m \Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\sigma_T)$;

2) при $p = 2m+1$ – нечетном, $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{2+2m+\alpha}{2}}(\sigma_T)$ и $d_t^{m+1}\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{\alpha}{2}}(\sigma_T)$, $m = 0,1,\ldots,\left[\dfrac{1+p+\alpha}{2}\right]$.

Обозначим

$$\Phi_1(t) := d_t^m \Phi(t), \text{ при } p = 2m, \quad \Phi_2(t) := d_t^{m+1}\Phi(t), \text{ при } p = 2m+1, \tag{48}$$

тогда $\Phi_i(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{2+\alpha-i}{2}}(\bar\sigma_T)$, $i = 1,2$, и для них справедливы неравенства (30).

Мы можем представить производные функции $\varepsilon\rho'(t)$ в формуле (37) следующим образом:

$$\varepsilon d_t^{\left[\frac{1+p+\beta}{2}\right]} \rho'(t) = \Phi_i(t) - \frac{k\lambda_1}{\varepsilon b_1}(\Phi_i * \partial_x G_1), \quad i = 1,2.$$

Тогда применяя обозначения (48) и произведя преобразования, как в (38)–(40), получим $\varepsilon d_t^{\left[\frac{1+p+\beta}{2}\right]} \rho'(t) = -\bar w_1(t) - \bar w_2(t)$, где

$$\bar w_1(t) = \frac{2ka_1^3}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(\Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\tau)\right) \partial_x^2 \Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\sigma,$$

$$\bar{w}_2(t) = 2a_1^2 \int_0^t \Phi_i(t-\tau)\partial_x \Gamma_1(ka_1(t-\tau)/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\tau = -\bar{w}_1(t) - \bar{w}_2(t). \tag{49}$$

Теперь оценим константы Гельдера. Для этого сформируем разности $\Delta_j := \bar{w}_j(t) - \bar{w}_j(t_1)$, $j = 1, 2$, взяв $t > t_1$:

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \frac{2a_1^3 k}{\varepsilon} \Bigg\{ &\int_{t_1}^t d\tau \int_0^{t-\tau} \left[\Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\tau)\right] \partial_x^2 \Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\sigma \\ &+ \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{t_1-\tau} \tilde{\Delta}_1\, \partial_x^2 \Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\sigma \\ &+ \int_0^{t_1} d\tau \int_{t_1-\tau}^{t-\tau} \left[\Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\tau)\right] \partial_x^2 \Gamma_1(ka_1\sigma/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\sigma \Bigg\},\end{aligned} \tag{50}$$

где $\tilde{\Delta}_1 = \Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\tau) - \Phi_i(t_1-\tau-\sigma) + \Phi_i(t_1-\tau)$;

$$\begin{aligned}\Delta_2 = 2a_1^2 \Bigg\{ &\int_{t_1}^t \Phi_i(t-\tau)\partial_x \Gamma_1(ka_1(t-\tau)/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\tau \\ &+ \int_0^{t_1} \tilde{\Delta}_2\, \partial_x \Gamma_1(ka_1(t-\tau)/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} d\tau \\ &+ \int_0^{t_1} \Phi_i(t_1-\tau) d\tau \int_{t_1}^t \left(-\frac{ka_1}{\varepsilon}\right) \partial_x^2 \Gamma_1(ka_1(t_2-\tau)/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} dt_2 \Bigg\},\end{aligned} \tag{51}$$

$\partial_{t_2}\partial_x \Gamma_1(ka_1(t_2-\tau)/\varepsilon - x, \tau)\big|_{x=0} = -ka_1/\varepsilon \partial_x^2 \Gamma_1(\cdot, \tau)\big|_{x=0}$, $\tilde{\Delta}_2 = \Phi_i(t-\tau) - \Phi_i(t_1-\tau)$, $i = 1, 2$.

Оценим разности $|\tilde{\Delta}_j| = |\tilde{\Delta}_j|^\theta |\tilde{\Delta}_j|^{1-\theta}$, $j = 1, 2$. Взяв $\theta = \dfrac{2+\beta-i}{2+\alpha-i}$, $\beta = (0, \alpha)$, $i = 1, 2$, и используя неравенства (30) для Φ_i, получим

$$\begin{aligned}|\tilde{\Delta}_1| &= |\,(\Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t_1-\tau-\sigma)) + (\Phi_i(t_1-\tau) - \Phi_i(t-\tau))\,|^\theta \\ &\times |\,(\Phi_i(t-\tau-\sigma) - \Phi_i(t-\tau)) + (\Phi_i(t_1-\tau) - \Phi_i(t_1-\tau-\sigma))\,|^{1-\theta} \\ &\le C_{28} \left(M_i (t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\right)^\theta \left(M_i \sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\right)^{1-\theta} \le C_{28} M_i (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}} \sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}};\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{\Delta}_2| &\le C_{29} \left(M_i (t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\right)^\theta \left(M_i \left((t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} + (t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\right)\right)^{1-\theta} \\ &\le C_{29} M_i (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}} (t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \theta = \frac{2+\beta-i}{2+\alpha-i},\end{aligned} \tag{53}$$

здесь $\sigma \ge 0$, $t_1 < t$, $t_1, t \in (0, T]$.

Рассмотрим разность (50). Воспользуемся неравенствами (24) для Γ_1, (30) для Φ_i и (52), тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned}|\Delta_1| \le \frac{C_{30} M_i}{\varepsilon} \Bigg\{ &\int\limits_{t_1}^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \frac{\sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}} d\sigma + \int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_0^{t_1-\tau} \frac{\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau^{3/2}} (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}} d\sigma \\ &+ \int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_{t_1-\tau}^{t-\tau} \frac{\sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}} d\sigma \Bigg\}.\end{aligned}$$

В первом и последнем интегралах применим неравенства $\sigma^{\frac{2+\beta-i}{2}} \leq (t-\tau)\dfrac{2+\beta-i}{2} \leq (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}$ и (45), и интегрируя по σ, получим

$$|\Delta_1| \equiv |\bar{w}_1(t)-\bar{w}_1(t_1)| \leq C_{31}M_i\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-(\alpha-\beta)/4}}$$
$$\leq C_{32}M_i\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}},$$

и $$[\bar{w}_1(t)]_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\beta-i}{2}\right)} \leq C_{32}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}[\Phi_i]_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)}, \tag{54}$$

здесь $\beta \in (0,\alpha)$, $i=1,2$, $t_1<t$, $t_1,t \in (0,T]$.

Рассмотрим разность Δ_2, которая была определена в (51). После применения неравенств (24), (30) и (53), найдем

$$|\Delta_2| \leq C_{33}M_i\left\{\int\limits_{t_1}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau}e^{-\frac{k^2(t-\tau)^2}{\varepsilon^2\tau}}d\tau+(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau}e^{-\frac{k^2(t-\tau)^2}{\varepsilon^2\tau}}d\tau\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t}dt_2\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau^{3/2}}e^{-\frac{k^2(t_2-\tau)^2}{\varepsilon^2\tau}}d\tau\right\}.$$

Воспользуемся неравенствами $(t-\tau)^{\frac{2+\beta-i}{2}} \leq (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}$, $\quad \tau \in (t_1,t)$, и

$$(t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} \leq (t_2-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} \leq \frac{(t_2-\tau)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(t_2-t_1)^{\frac{i-\beta}{2}}}, \quad t_2 \in (t_1,t), \quad \tau \in (0,t_1),$$

в первом и последнем интегралах соответственно, затем применяя неравенство (45) во всех интегралах, будем иметь

$$|\Delta_2| \leq C_{34}M_i\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\left((t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{1-(\alpha-\beta)/4}}+\int_{t_1}^t\frac{dt_2}{(t_2-t_1)^{\frac{i-\beta}{2}}}\int_0^{t_1}\frac{d\tau}{\tau^{1-(\alpha-\beta)/4}}\right),$$

и после интегрирования получим

$$[\bar{w}_2(t)]_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\beta-i}{2}\right)} \leq C_{35}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}[\Phi_i]_{\sigma_T}^{\left(\frac{2+\alpha-i}{2}\right)}, \tag{55}$$

здесь $\beta \in (0,\alpha)$, $i=1,2$, $t_1<t$, $t_1,t \in (0,T]$.

Собирая все оценки (46), (47), (54), (55), мы получим оценки норм (8) функций $w_1(t)$, $w_2(t)$: $\|w_j(t)\|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\beta}{2}\right)} \leq C_{36}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|\Phi\|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\alpha}{2}\right)}$, $\quad j=1,2$. В силу леммы 1 получим $|w_j(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\beta}{2}\right)} \leq C_{37}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\alpha}{2}\right)}$, $\quad j=1,2$. Тогда из формулы (41): $\varepsilon\rho'(t)=-w_1(t)-w_2(t)$ будет следовать оценка (36)

$$|\varepsilon\rho'(t)|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\beta}{2}\right)} \leq C_{17}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+p+\alpha}{2}\right)}, \quad \beta \in (0,\alpha), \ t \in (0,T],$$

где постоянные C_{36}, C_{37}, C_{17} не зависят от ε. □

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 4 и неравенств (36) и (18) для функции $\Phi(t)$ вытекает оценка (9) и, следовательно, теорема 2. □

Список литературы

[1] *Веригин Н.Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений // Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, 1952. – С. 674-687.

[2] *Рубинштейн Л.И.* О решении задачи Н.Н. Веригина // ДАН СССР 113, №1 (1957), С. 50-53.

[3] *Камынин Л.И.* О существовании решения задачи Веригина // Журн. выч. матем. и мат. физики 2, №5 (1962), С. 833-858.

[4] *Evans L.S., Friedman A.* Regularity and asymptotic behavior of two immiscible fluids in a one dimensional porous medium, J.Differ.Equat. 31, No. 3 (1979), 366-391.

[5] *Мейрманов А.М.* О разрешимости задачи Веригина в точной постановке // ДАН СССР 253, №3 (1980), С. 588-591.

[6] *Бижанова Г.И.* О классической разрешимости одномерных задач со свободной границей Флорина, Маскета-Веригина и Стефана // Зап. научн. сем. ПОМИ, 243 (1997), С. 30–60.

[7] *Youshan T., Yi F.* Classical Verigin problem as a limit case of Verigin problem with surface tension at free boundary, Appl. Math. – JCU 11B (1996), 307-322.

[8] *Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi F.,* On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems, Math. Ann., 315 (1999), 61–95.

[9] *Bizhanova G.I.* Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boundary, Stefan type problems, Zapiski nauchn. semin. POMI, 2008, Vol. 362, P. 64-91.

[10] *Bizhanova G.I.* On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. I-II, Математический журнал. Алматы, 2012. Том 12. №1 (43). С. 24-37; №2 (44). 70-86.

[11] *Солонников В. А.* Об оценке максимумов модулей производных решений однородной параболической начально-краевой задачи. – Препринт ЛОМИ, (1977). – С. 2-77.

[12] *Бижанова Г.И.* Оценки решения $n-$мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах, I, II. // Известия АН РК, сер. физ.-мат. № 5 (1992). – С. 7-13; № 1 (1993), – С. 11-17.

[13] *Алимжанов Е.С.* Модельная задача Веригина с малым параметром // Вестник КазНУ им. ал-Фараби, сер. матем., мех. и инф., № 1 (2011). – С. 20-28.

References

[1] *Verigin N.N.* Nagnetaniye vyazhushchikh rastvorov v gornyye porody v tselyakh povysheniya prochnosti i vodonepronitsayemosti osnovaniya gidrotekhnicheskikh sooruzheniy // Izv. AN SSSR, Otdel tekhn. nauk, 1952. – S. 674-687.

[2] *Rubinshteyn L.I.* O reshenii zadachi N.N. Verigina // DAN SSSR 113, №1 (1957), S. 50-53.

[3] *Kamynin L.I.* O sushchestvovanii resheniya zadachi Verigina // Zhurn. vych. matem. i mat. fiziki 2, №5 (1962), S. 833-858.

[4] *Evans L.S., Friedman A.* Regularity and asymptotic behavior of two immiscible fluids in a one dimensional porous medium, J.Differ.Equat. 31, No. 3 (1979), 366-391.

[5] *Meyrmanov A.M.* O razreshimosti zadachi Verigina v tochnoy postanovke // DAN SSSR 253, №3 (1980), S. 588-591.

[6] *Bizhanova G.I.* O klassicheskoy razreshimosti odnomernykh zadach so svobodnoy granitsey Florina, Masketa-Verigina i Stefana // Zap. nauchn. sem. POMI, 243 (1997), S. 30–60.

[7] *Youshan T., Yi F.* Classical Verigin problem as a limit case of Verigin problem with surface tension at free boundary, Appl. Math. – JCU 11B (1996), 307-322.

[8] *Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi F.*, On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems, Math. Ann., 315 (1999), 61–95.

[9] *Bizhanova G.I.* Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boundary, Stefan type problems, Zapiski nauchn. semin. POMI, 2008, Vol. 362, P. 64-91.

[10] *Bizhanova G.I.* On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. I-II, Математический журнал. Алматы, 2012. Том 12. №1 (43). С. 24-37; №2 (44). 70-86.

[11] *Solonnikov V. A.* Ob otsenke maksimumov moduley proizvodnykh resheniy odnorodnoy parabolicheskoy nachalno-krayevoy zadachi. – Preprint LOMI, (1977). – S. 2-77.

[12] *Bizhanova G.I.* Otsenki resheniya n-mernoy zadachi sopryazheniya dlya uravneniya teploprovodnosti v vesovykh gelderovskikh normakh, I, II. // Izvestiya AN RK, ser. fiz.-mat. № 5 (1992). – S. 7-13; № 1 (1993), – S. 11-17.

[13] *Alimzhanov Ye.S.* Modelnaya zadacha Verigina s malym parametrom // Vestnik KazNU im. al-Farabi, ser. matem., mekh. i inf., № 1 (2011). – C. 20-28.

Поступила в редакцию 16 сентября 2013 года