УДК 515.12

Т.Ж. Жумалиев

Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И. Скрябина, Бишкек, Кыргызстан; e-mail: turgun_80@mail.ru

О некоторых кардинальнозначных инвариантах равномерно непрерывных отображений

В работе рассматриваются поведение некоторых кардинальнозначных инвариантов равномерно непрерывных отображений (вес, квазивес, псевдовес, индекс ограниченности) при произведении, суммы, прямых и обратных спектров.
Ключевые слова: Кардинальные инварианты, вес, квазивес, псевдовес, индекс ограниченности. Произведение, сумма кардинальных инвариантов и прямые, обратные спектры кардинальных инвариантов равномерно непрерывных отображений.

T.Zh. Zhumaliev

Some cardinal digit in variants of uniformly continuous transformations

This work is examined some cardinal digit invariants of uniformly continuous transformations (weight, quasi-weight, pseudo-weight, bounded ness index) in product, sums, straight and inverse spectrums.
Key words: cardinal invariants, weight, quasi-weight, pseudo-weight, bounded ness index. Product, the sum of cardinal invariants and straight and inverse spectrums of cardinal invariants of uniformly continuous transformations.

Т.Ж. Жумалиев

Кейбір кадиналмағынасының инвариантық бірқалыпты үздіксіз бейнеленуі

Бұл жұмыста бірнеше кадиналмағынасының инвариантының бір қалыпты үздіксіз бейнелеуі (салмақ, квазисалмақ, псевдосалмақ, шектеулік индекісі) соманың түзу және кері спектрдің туындысы қарастырылады.
Түйін сөздер: кардинальды инварианты, салмақ, квазисалмақ, псевдосалмақ, шектеулік индекісі. Туынды, кардиналдық инварианттың сомасы және кардиналдқ инварианттың кері спектрлері нің бір қалыпты кескіндерді.

Пусть (X, Y) – произвольное равномерное пространство. Рассмотрим категорию $Unif(Y, V)$, объектами которой являются равномерно непрерывные отображения $f : (X, U, U_f) \to (Y, V)$ произвольного равномерного пространства (X, U) на данное равномерное пространство (Y, V), где U_f – фиксированная база отображения f. Псевдоравномерность $U_f \subset U$ называется базой равномерно непрерывного отображения f, если для любого $\alpha \in U$ существуют такие $\beta \in V$ и $\gamma \in U_f$, что покрытие $f_\beta^{-1} \wedge \gamma$ вписано в покрытие α. Другими словами, псевдоравномерность $U_f \subset U$, называется базой отображения f, если $U = \sup U_f, f^{-1}V$, где $f^{(-1)}V = \alpha \in U$: существует $\beta \in V$ такое, что $f^{(-1)}\beta \succ \alpha$. У каждого равномерно непрерывного отображения существует, вообще говоря, много баз (см. [1]).

Наименьшее кардинальное число τ, являющееся весом какой–либо базы U_f отображения f, называется весом равномерно непрерывного отображения f и обозначается через $w(f)$. Другими словами вес равномерно непрерывного отображения f определяется равенством, т.е. $w(f) = w(U_f)$.

Аналогично определяются квазивес $qw(f) = qw(U_f)$, псевдовес $pw(f) = pw(U_f)$ и индекс ограниченности $l(f) = l(U_f)$ равномерно непрерывного отображения f (см. [1]).

Морфизмами категории $Unif(Y, V)$ из объекта $f : (X, U, U_f) \to (Y, V)$ в объект $g : (Z, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_g) \to (Y, V)$ являются такие отображения $h : (X, U, U_f) \to (Z, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_g)$, что, во-первых, отображение $h : (X, U_f) \to (Z, \mathfrak{M}_g)$, псевдоравномерного пространства (X, U_f) в псевдоравномерного пространства $(Z, \mathfrak{M}_g)$ является равномерно непрерывным и, во–вторых, $f = g \circ h$. Если h морфизм из объекта f в объект g, то записываем это как $h : f \to g$.

Отметим, что равномерной непрерывности отображения $h : (X, U_f) \to (Z, \mathfrak{M}_g)$, и из соотношения $f = g \circ h$ следует равномерная непрерывность отображения $h : (X, U) \to (Z, \mathfrak{M})$ (см. [1]).

Если Y одноточечное множество, то категория $Unif(Y, V)$ совпадает с категорией $Unif$ равномерных пространств.

Пусть $\{f_a\}_{a\in M}$ – произвольное семейство объектов категории $Unif(Y, V)$, то произведение $\Pi_{a\in M} f_a$ определяется следующим образом. Через X обозначим множество всех точек $x = \{x_a\}_{a\in M}$ декартова произведения $\Pi_{a\in M} X_a$ таких, что $f_a x_a = f_b x_b$ для любых $a, b \in M$. Не исключено, что $X = \emptyset$. Если $X = \emptyset$, то из условия $f_a x_a = f_b x_b$ для любых $a, b \in M$. следует, что определено отображение $f : X \to Y$ по формуле $fx = f_a x_a$ для любых $x \in X$, $x = \{x_a\}_{a\in M}$.

Пусть U – равномерность на X, индуцированная произведением $\Pi_{a\in M} U_a$ равномерностей U_a, а U_f псевдоравномерность на X, индуцированная произведением $\Pi_{a\in M} U_{f_a}$ псевдоравномерностей U_{f_a}. Тогда отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ является равномерно непрерывным, а псевдоравномерность U_f является базой отображения f. Тогда равномерно непрерывное отображение $f : (X, U, U_f) \to (Y, V)$ является объектом категории $Unif(Y, V)$ и называется произведением семейства объектов $\{f_a\}_{a\in M}$, т.е. $f = \Pi_{a\in M} f_a$.

Теорема 1 *Для любого объекта f категории $Unif(Y, V)$ справедливо неравенство $w(f) \le qw(f) \le (w(f))^{\aleph_0}$.*

Теорема 2 *Пусть $\{f_a\}_{a\in M}$ – произвольное семейство объектов категории $Unif(Y, V)$. Если произведение f семейство $\{f_a\}_{a\in M}$ существует, то справедливо следующие неравенства:*

1) $w(f) \le \max\{\sup\{w(f_a) : a \in M\}, |M|\}$;
2) $qw(f) \le \max\{\sup\{w(f_a)^{\aleph_0} : a \in M\}, |M|\}$;
3) $pw(f) \le \max\{\sup\{pw(f_a) : a \in M\}, |M|\}$;
4) $l(f) \le \{\sup\{l(f_a) : a \in M\}$.

Доказательство теоремы сводится к случаю произведения псевдоравномерных пространств. Неравенства 1) – 4) для псевдоравномерных пространств доказаны в работах [2], [3].

Пусть дано направленное множество M и каждому элементу $a \in M$ поставлен в соответствие объект f_a категории $Unif(Y,V)$ и всякий раз, как только $b > a$, определены морфизмы $h_a^b : f_b \to f_a$ категории $Unif(Y,V)$, причем, если $c > b > a$, то $h_a^c = h_a^b \cdot h_b^c$. Тогда говорят, что дан проективный (обратный) спектр $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ в категории $Unif(Y,V)$ (см. [1]).

Через X обозначим множество всех таких точек $x \in X$, $x = \{x_a\}_{a\in M}$. произведения $\Pi_{a\in M}X_a$, что 1) $f_a x_a = f_b x_b$ для любых $a, b \in M$ и 2) $x_a = h_a^b x_b$ при $b > a$. Не исключено, что $X = \emptyset$.

Если $X = \emptyset$, то определено отображение $f : X \to Y$, равномерность U и псевдоравномерность U_f на X как в случае произведения объектов $\{f_a\}_{a\in M}$ категории $Unif(Y,V)$. Причем отображение $f : (X,U,U_f) \to (Y,V)$ является равномерно непрерывным, псевдоравномерность U_f является базой отображения f, т.е. отображение f является объектом категории $Unif(Y,V)$. В этом случае объект f называется пределом проективного (обратного) спектра S в категории $Unif(Y,V)$ и пишется $f = \lim_{\leftarrow} S$.

Теорема 3 *Пусть $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ – проективный спектр в категории $Unif(Y,V)$. Если предел $f = \lim_{\leftarrow} S$ спектра S существует, то справедливы неравенства:*
1) $w(f) \le \max\{\sup\{w(f_a) : a \in M\}, |M|\}$;
2) $qw(f) \le \max\{\sup\{w(f_a)^{\aleph_0} : a \in M\}, |M|\}$;
3) $pw(f) \le \max\{\sup\{pw(f_a) : a \in M\}, |M|\}$;
4) $l(f) \le \{\sup\{l(f_a) : a \in M\}$.

Доказательство следует из определения предела проективного спектра.

Теперь определим сумму семейства объектов прямой спектр категории $Unif(Y,\,V)$. Пусть $\{f_a\}_{a\in M}$ – произвольное семейство объектов категории $Unif(Y,V)$, т.е. $f : (X_a, U_a, U_{f_a}) \to (Y,\,V)$ – равномерное непрерывное отображение для каждого $a \in M$, причем U_{f_a} – база отображения f_a. Рассмотрим дизъюнктную сумму $(X,U) = (\coprod_{a\in M} a, \coprod_{a\in M} U_a)$ равномерных пространств и дизъюнктную сумму $(X,U_f) = (\coprod_{a\in M} X_a, \coprod_{a\in M} U_{f_a})$ псевдоравномерных пространств. Определим отображение $f : X \to Y$ следующим образом: пусть $x \in X$, тогда существует $a \in M$ такое, что $x \in X_a$, в этом случае положим $fx = f_a x$.

Полученное отображение $f : (X,U,U_f) \to (Y,V)$ – является равномерно непрерывным отображением, причем псевдоравномерность U_f является базой отображения f. Следовательно f является объектом категории $Unif(Y,V)$ и называется прямой суммой семейства объектов $\{f_a\}_{a\in M}$ и пишется $f = \coprod_{a\in M} f_a$.

Теорема 4 *Пусть $\{f_a\}_{a\in M}$ – произвольное семейство категории $Unif(Y,V)$, а $f = \coprod_{a\in M} f_a$ – его прямая сумма. Тогда справедлива следующие неравенства:*
1) $w(f) \le \sup\{w(f_a) : a \in M\}$;
2) $qw(f) \le \sup\{w(f_a)^{\aleph_0} : a \in M\}$;
3) $pw(f) \le \sup\{w(f_a) : a \in M\}$;
4) $l(f) \le \Sigma_{a\in M} l(f_a)$.

Определим индуктивный (прямой) спектр в категории $Unif(Y,V)$. Пусть M – направленное множество и для каждого $a \in M$ определим объект f_a категории $Unif(Y,V)$. Если $a < b$, то определен морфизм $h_a^b : f_b \to f_a$, причем, если $a < b < c$, то $h_a^c = h_a^b \cdot h_b^c$.

Тогда говорят, что определен индуктивный (прямой) спектр $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ в категории $Unif(Y,V)$. Теперь определим предела индуктивного (прямого) спектра S. Пусть $X = \coprod_{a \in M} X_a$ – дизъюнктная сумма семейства множеств $\{X_a : a \in M\}$. Рассмотрим в X отношение эквивалентности $\sim$, следующим образом: если x', x'' некоторые точки из X, причем $x\prime \in X_a\prime$, $x\prime\prime \in X_a\prime\prime$, то $x\prime \sim x\prime\prime$ означает существование такого индекса $b \in M$, что $a\prime < b$, $a\prime\prime < b$, и $h_b^{a\prime}(x\prime) = h_b^{a\prime\prime}(x\prime\prime)$. Рефлективность и симметричность бинарного отношения $\sim$ очевидна. Транзитивность отношении проверяется непосредственно и ее проверка не составляет труда. Пусть $X_s = X/\sim$ – фактор – множество, а (X^s, U^s) – фактор – пространство равномерного пространства (X,U), а $(X^s, U^s_{f_a})$ – фактор – пространство псевдоравномерного пространства (X, U_f). Пусть $\varphi : X \to X/\sim$ – фактор отображение. Пусть ξ – произвольный элемент из X^s, т.е. некоторый класс $\sim$ эквивалентности в X, а $x_a \in X_a$ какой – нибудь представитель из класса ξ, т.е. $\varphi(x_a) = \xi$. Положим $f^s\xi = fx_a$. Нетрудно проверить, что корректность этого отображения, т.е. независимости от произвола в выборе представителя класса x_a из класса ξ. Тогда отображения $f^s : X^s \to Y$ определено, причем отображения $f^s : (X^s, U^s, U^s_f) \to (Y, V)$ является равномерно непрерывным, причем псевдоравномерность U^s_f является базой отображения f^s. Следовательно, отображение f^s является объектом категории $Unif(Y,V)$ и называется пределом индуктивного (прямого) спектра $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ и пишется $f^s = lim_{\to} S$.

В отличие от предела проективного спектра ясно, что предел индуктивного спектра всегда существует.

Теорема 5 *Пусть $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ – индуктивный спектр в категории $Unif(Y,V)$. Тогда справедливы неравенства:*

1) $qw(f) \leq \sup\{w(f_a)^{\aleph_0} : a \in M\}$;

2) $qw(f) \leq \sup\{w(f_a)^{\aleph_0} : a \in M\}$;

3) $l(f) \leq \Sigma_{a \in M} l(f_a)$.

Список литературы

[1] *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990. – 171 с.

[2] *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.

[3] *Жумалиев Т.Ж.* О кардинальных инвариантах инициальных равномерностей равномерных пространств. // Наука и новые технологии №1, Бишкек, 2012. – С. 10–12.

[4] *Жумалиев Т.Ж.* О некоторых кардинальных инвариантах дизъюнктной суммы равномерных пространств. // Вестник к 80-летию образования КНАУ им. К.И. Скрябина, №1, Бишкек 2013. – С. 489–494.

References

[1] *Borubaev A.A.* Ravnomernye prostranstva i ravnomerno nepreryvnye otobrazheniya. - Frunze: Ilim, 1990. – 171 s.

[2] *Aleksandryan R.A., Mirzakhanyan E.A.* Obshchaya topologiya: Uchebnoe posobie lkya vuzov. – M.: Vysshaya shkola, 1979. – 336 s.

[3] *Zhumaliev T.Zh.* O kardinal'nykh invariantakh initsial'nykh ravnomernostei ravnomernykh prostranstv. // Nauka i novye tekhnologii №1, Bishkek, 2012. – S. 10–12.

[4] *Zhumaliev T.Zh.* O nekotorykh kardinal'nykh diz'yunktnoi summy ravnomernykh prostranstv. // Vestnik k 80-letiyu obrazovaniya KNAU im. K.I. Skryabina, №1, Bishkek, 2013. – S. 489–494.

Поступила в редакцию 13 сентября 2013 года