УДК 517.927.6

Б.Е. Кангужин, Г.М. Нальжупбаева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: kanbalta@mail.ru, nalzhuppa@list.ru

О свойствах одной задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом*

В гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ исследуются некоторые спектральные свойства обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с сингулярным потенциалом на отрезке. При накладках некоторых условии на граничную функцию получена формула регуляризованного следа исследуемого оператора.

Ключевые слова: регуляризованный след, интегральное граничное условие, обыкновенный дифференциальный оператор, резольвента.

B.E. Kanguzhin, G.M. Nalzhupbayeva

On properties of the Sturm – Liouville operator with a singular potential

In the Hilbert space $L^2(0,1)$, we study some spectral properties of ordinary differential operator second order with a singular potential in the interval. At linings of some condition on the boundary function, a formula regularized trace of the test operator.

Key words: regularized trace, integral boundary condition, ordinary differential operator, resolvent.

Б.Е. Кангужин, Г.М. Нәлжүпбаева

Сингулярлы потенциалмен болған Штурм–Лиувилль операторының кейбір қасиеттері

$L^2(0,1)$ гильберт кеңістігінде сингулярлы потенциалмен болған кесіндідегі екінші ретті қарапайым дифференциалдық операторының кейбір қасиеттері зерттелді. Шекаралық функцияға шарттар қою арқылы регуляризацияланған із формулаларын алуға мүмкіндік болды.

Түйін сөздер: регуляризацияланған із, шекаралық функция, екінші ретті қарапайым дифференциалдық оператор, резольвента.

Введение.

Задачи, связанные с изучением оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, возникли в физической литературе. Математическое исследование таких физических моделей было начато в 60-ые годы прошлого века в работах [1], [2]. Современное состояние и новые направления развития спектральной теории таких операторов изложено в монографиях [3], [4].

В данной работе в гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$, для произвольных элементов f и g из $L^2(0,1)$ со скалярным произведением $< f, g >:= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$, исследуются

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 0732 / ГФ.

свойства оператора Штурма – Лиувилля $\mathcal{P}_k$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv -y''(x) + q(x)y(x),\ x \in I_0 := I \setminus \{x_0\},\ \ I := (0,1),\ \ x_0 \in I, \tag{1}$$

и удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

$$[y(x_0)] = 0, [y'(x_0)] = \int_0^1 l(y)\overline{k(x)}dx, \tag{3}$$

где $q(x)$ – непрерывная и вещественнозначная функция на отрезке $[0,1]$, $k(x)$ – граничная функция из $L^2(0,1)$, $\overline{z}$ означает комплексное сопряжение числа $z \in \mathbb{C}$,

$$[y] = y(x_0+0) - y(x_0-0),$$

и

$$[y'] = y'(x_0+0) - y'(x_0-0).$$

Обозначим последний функционал через $\alpha(\cdot)$, т.е. $\alpha(y) := [y']$.

Имеет место

Теорема 1 *Резольвента оператора $\mathcal{P}_k$ определяется по формуле*

$$R_\lambda f(x) = R^0_\lambda f(x) + < f, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda k > \mathcal{P}_k R_\lambda \varphi(x, x_0), \tag{4}$$

где $R_\lambda := (\mathcal{P}_k - \lambda I)^{-1}$, $R^0_\lambda := (\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}$, $\varphi(x, x_0)$ является решением однородного уравнения $l(\varphi) = 0$ в I_0 и удовлетворяет условиям (2), $[\varphi] = 0$ и $\alpha(\varphi) = 1$.

Теорема 1 доказывается аналогично теореме о резольвентном представлении работы [8].

Класс функций, представимых в виде

$$u(x) = u_0(x) + \alpha_u \varphi(x, x_0),$$

обозначим через $\mathcal{D}$, где α_u – некоторая постоянная, $u_0(x) \in \mathbb{D}$:

$$u_0 \in W^2_2[0,1],\ \ u_0(0) = u_0(1) = 0.$$

Заметим, что для $h \in C^1(0,1)$ $\alpha(h) = 0$. Тогда для произвольных $u, v \in \mathcal{D}$ справедливы разложения вида

$$u(x) = u_0(x) + \alpha(u)\varphi(x, x_0),\ v(x) = v_0(x) + \alpha(v)\varphi(x, x_0), \tag{5}$$

где $u_0, v_0 \in \mathbb{D}$. Обозначим через $\xi^-(u) := u_0(x_0)$, $\xi^+(u) := \alpha(u)$. С дифференциальным выражением $l(u)$ свяжем оператор $\mathcal{P}_M$ на $u \in \mathcal{D}$. Оператор $\mathcal{P}_m$ определим как сужение $\mathcal{P}_M$ на область

$$D(\mathcal{P}_m) := \{u | u \in \mathcal{D},\ \xi^-(u) = 0, \xi^+(u) = 0\}.$$

Через $\mathcal{R}(\mathcal{P}_m)$ обозначим область значения оператора $\mathcal{P}_m$.

Класс самосопряженных задач

Следующая теорема является аналогом формулы Лагранжа.

Теорема 2 *Пусть $u, v \in \mathcal{D}$. Тогда*

$$< \mathcal{P}_M u, v >=< u, \mathcal{P}_M v > +\xi^-(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u).$$

Доказательство осуществляется непосредственными вычислениями с использованием разложений (5) и свойствами функции φ.

Лемма 1 *Уравнение $\mathcal{P}_m u = f$ имеет решение $u \in D(\mathcal{P}_m)$ тогда и только тогда, когда найдется такое $f \in L^2(0,1)$, что для любого $v \in \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M$ справедливо $< f, v >= 0$; или*

$$\mathcal{R}(\mathcal{P}_m) \oplus \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M = L^2(0,1).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{R}(\mathcal{P}_m)$. Тогда для произвольного $v \in \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M$ в силу аналога формулы Лагранжа имеем

$$< f, v >=< \mathcal{P}_m u, v >=< u, \mathcal{P}_M v >= 0.$$

Пусть теперь найдется такое $f \in L^2(0,1)$, что для любого $v \in \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M$

$$< f, v >= 0.$$

Несложно убедится в том, что $\varphi(x, x_0) \in \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M$. Тогда для функции

$$u_0(x) = \int_0^1 \varphi(\xi, x) f(\xi) d\xi$$

выполнены следующие включения и равенства:

$$u_0 \in \mathbb{D};\ (l(u_0))(x) = f(x),\ x \in I_0;\ u_0(x_0) =< f, \varphi >= 0;\ \alpha(u_0) = 0.$$

То есть $u_0 \in D(\mathcal{P}_m)$. Таким образом, Лемма 1 доказана.

Лемма 2 *$D(\mathcal{P}_m)$ плотно в $L^2(0,1)$.*

Доказательство. Пусть функция $g \in L^2(0,1)$ ортогональна линеалу $D(\mathcal{P}_m)$. Найдем функцию v–произвольное решение уравнения $\mathcal{P}_M v = g$. Тогда для любого $u \in D(\mathcal{P}_m)$ имеем

$$0 =< u, g >=< u, \mathcal{P}_M v >=< \mathcal{P}_m u, v > .$$

В силу Леммы 1 выполнено $v \in \mathbf{Ker}\mathcal{P}_M$. Поэтому $g = \mathcal{P}_M v = 0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3 *Оператор $\mathcal{P}_\theta$ порожденный дифференциальным выражением $l(u) = f$ в I_0 для $u \in \mathcal{D}$ с условием*

$$\theta_1 \xi^-(u) = \theta_2 \xi^+(u) \tag{6}$$

является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{P}_m$ в пространстве $\mathcal{D}$, где $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$, θ_1, θ_2– некоторые вещественные числа и $\theta_1^2 + \theta_2^2 \neq 0$.

Доказательство. Так как для любых $u, v \in D(\mathcal{P}_m)$ $\quad < L_m u, v >=< u, L_m v >$, то по определению [5] $\mathcal{P}_m$ – эрмитовый оператор. А в силу Леммы 2 $\mathcal{P}_m$ – симметрический оператор. Таким образом, для того чтобы оператор $\mathcal{P}_\theta$ был самосопряженным, достаточно, чтобы

$$D(\mathcal{P}_\theta) = D(\mathcal{P}_\theta^*). \tag{7}$$

Это следует из непосредственных вычислений с применением Теоремы 2. Из условии теоремы следует, что хотя бы одно из чисел θ_1, θ_2 не равно нулю. Пусть $\theta_1 \neq 0$. Тогда условие (6) запишем в следующем виде $\xi^-(u) = \mu\xi^+(u)$, где $\mu = \theta_2/\theta_1$. Тогда для произвольных $u \in D(\mathcal{P}_\theta)$ и $v \in \mathcal{D}$ имеем

$$< l(u), v >=< u, l(v) > +\xi^-(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u)$$

$$=< u, l(v) > +\mu\xi^+(u)\xi^+(v) - \xi^-(v)\xi^+(u) =< u, l(v) > +[\mu\xi^+(v) - \xi^-(v)]\xi^+(u).$$

Так как достаточно много функций $u \in D(\mathcal{P}_\theta)$ для которых $\xi^+(u) \neq 0$, то из полученного следует справедливость равенства (7). Случай $\theta_2 \neq 0$ рассматривается аналогично. Таким образом, Теорема 3 доказана полностью.

Следствие 1 *Для резольвенты оператора $\mathcal{P}_k$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f + \frac{< k, \mathcal{P}_0 R_{\bar\lambda}^0 f > \mathcal{P}_0 R_\lambda^0 \varphi}{1 - \lambda < k, \mathcal{P}_0 R_{\bar\lambda}^0 \varphi >}, \tag{8}$$

которая эквивалентна формуле (4).

Следствие 2 *Пусть $\theta_1 \neq 0$ и $k = -\mu\varphi$, где $\mu = \theta_2/\theta_1$. Тогда операторы $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_\theta$ совпадают, т.е.*

$$\mathcal{P}_{-\mu\varphi} = \mathcal{P}_{(1,\mu)} = \mathcal{P}_{(\theta_1,\theta_2)}.$$

О формуле регуляризованного следа

В данном параграфе мы существенно будем использовать технику работы В.А. Садовничего и В.А. Любишкина [6], где изучались конечномерные возмущения дискретных операторов и были выведены формулы следов. В той работе возмущали действие оператора, но не область определения.

Возьмем след от обеих частей равенства (8)

$$Sp(R_\lambda - R_\lambda^0) = \frac{< \mathcal{P}_0 R_\lambda^0 k, \mathcal{P}_0 R_{\bar\lambda}^0 \varphi >}{1 - \lambda < k, \mathcal{P}_0 R_{\bar\lambda}^0 \varphi >}.$$

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ собственные значения оператора $\mathcal{P}_k$ в порядке возрастания по модулю с учетом их кратностей, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ собственные значения оператора $\mathcal{P}_0$ в порядке возрастания, и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ соответствующий ортонормированный базис из собственных функций оператора $\mathcal{P}_0$. Тогда имеем

$$< k, \mathcal{P}_0 R_{\bar\lambda}^0 \varphi >= \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n < k, \psi_n >< \varphi, \psi_n >}{\lambda_n - \lambda}, \tag{9}$$

$$< \mathcal{P}_0 R^0_\lambda k, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda \varphi >= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 < k, \psi_n >< \varphi, \psi_n >}{(\lambda_n - \lambda)^2}. \tag{10}$$

Обозначим через $d(\lambda)$ расстояние от точки λ до спектра оператора $\mathcal{P}_0$.

Лемма 3 *Пусть $k(x)$ из области определения оператора $\mathcal{P}_0$, т.е. $k(x) \in D(\mathcal{P}_0)$ и $\mathcal{P}_0 k(x) \in W_2^p[0,1]$, где p и ϵ некоторые положительные, но сколь угодно малые числа, тогда*

$$1 - \lambda < k, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda \varphi >= 1 + k(x_0) + O\left(\frac{1}{d(\lambda)}\right), |\lambda| \to \infty.$$

Доказательство. Из (9) и непосредственными вычислениями

$$\lambda < k, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda \varphi >= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n < k, \psi_n >< \varphi, \psi_n >}{\lambda_n - \lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda < k, \lambda_n \psi_n >< \varphi, \lambda_n \psi_n >}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda < k, \mathcal{P}_0 \psi_n >< \varphi, \mathcal{P}_0 \psi_n >}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda < \mathcal{P}_0 k, \psi_n >< \mathcal{P}_0 \varphi, \psi_n >}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda < \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}.$$

Из полученного и с учетом того, что $\dfrac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = \dfrac{1}{\lambda_n - \lambda} - \dfrac{1}{\lambda_n}$ придем к

$$\lambda < k, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda \varphi >= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} < k, \psi_n > \psi_n(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}$$

$$= k(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Тогда из справедливости оценки (не сложно проверить)

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \mathcal{P}_0 k, \psi_n > \psi_n(x_0)}{\lambda_n - \lambda}\Big| \le \frac{Const}{d(\lambda)}$$

придем к утверждению Леммы 3.

Лемма 4 *Пусть выполняются условия Леммы 3, тогда*

$$< \mathcal{P}_0 R^0_\lambda k, \mathcal{P}_0 R^0_\lambda \varphi >= \frac{\widetilde{k}(x_0)}{\lambda^2} + F(\lambda),$$

где $F(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} < k, \lambda_n^2 \psi_n >< \varphi, \lambda_n \psi_n > \left[\dfrac{1}{\lambda(\lambda_n - \lambda)^2} - \dfrac{1}{\lambda^2(\lambda_n - \lambda)}\right]$ *и*

$$|F(\lambda)| \le \frac{Const}{|\lambda| d^2(\lambda)}. \tag{11}$$

Доказательство. С использованием несложных преобразований и применением тождества

$$\frac{1}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)^2}=\frac{1}{\lambda_n\lambda^2}+\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}$$

к (10) получим

$$<\mathcal{P}_0R^0_{\bar\lambda}k,\mathcal{P}_0R^0_{\bar\lambda}\varphi>=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2<k,\psi_n><\varphi,\psi_n>}{(\lambda_n-\lambda)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{<k,\lambda_n^2\psi_n><\varphi,\lambda_n\psi_n>}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)^2}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}<k,\mathcal{P}_0\psi_n><\varphi,\mathcal{P}_0\psi_n>$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}<k,\lambda_n^2\psi_n><\varphi,\lambda_n\psi_n>\Big[\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}\Big]=\frac{\widetilde{k}(x_0)}{\lambda^2}+F(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ удовлетворяет оценке

$$|F(\lambda)|\le\Big|\sum_{n=1}^{\infty}<k,\lambda_n^2\psi_n><\varphi,\lambda_n\psi_n>\Big[\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}\Big]\Big|$$

$$\le Const\left(\frac{1}{|\lambda|(d(\lambda))^2}+\frac{1}{|\lambda|^2d(\lambda)}\right).$$

Так как $d(\lambda)\le 2|\lambda|$, по крайней мере при $|\lambda|$ больших $|\lambda_1|$, то отсюда следует доказываемое утверждение.

Известно, что $N(\lambda)=\sum_{\lambda_n\le\lambda}1=O\left(\lambda^{1/2}\right)$, где $N(\lambda)$ – функция распределения собственных значений оператора $\mathcal{P}_0$. Тогда существует последовательность вещественных чисел $r_n\to\infty$ такая, что $d_n\to\infty$, где $d_n=\rho(\Gamma_n,\sigma(\mathcal{P}_0))$ – расстояние от окружности $\Gamma_n=\{\lambda:|\lambda|=r_n\}$ до спектра оператора $\mathcal{P}_0$.

Из Леммы 3 и Леммы 4 на окружности Γ_n следует справедливость следующей асимптотики

$$Sp(R_\lambda-R^0_\lambda)=\Big[\frac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)}\frac{1}{\lambda^2}+F(\lambda)\Big]^{1/(1+o(1))}=$$

$$=\frac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)}\frac{1}{\lambda^2}+\frac{o(1)}{\lambda^2}+F(\lambda)(1+o(1)) \qquad (12)$$

при $n\to\infty$.

Лемма 5 *Пусть выполняются условия Леммы 3, тогда при достаточно больших n внутри контура Γ_n находится одинаковое число (с учетом кратности) собственных значений операторов $\mathcal{P}_K$ и $\mathcal{P}_0$.*

Доказательство. Умножим равенство (12) на $1/2\pi i$ и проинтегрируем по контуру Γ_n. Заметим, что в силу известной теоремы Рисса

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}Sp(R_\lambda-R^0_\lambda)d\lambda=N_1-N_2,$$

где N_1 и N_2 – число собственных значений (с учетом кратности) операторов $\mathcal{P}_K$ и $\mathcal{P}_0$ соответственно, попадающих внутрь контура Γ_n. Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\left[\frac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)}\frac{1}{\lambda^2}+\frac{o(1)}{\lambda^2}\right]d\lambda = o\left(\frac{1}{r_n}\right),$$

в то время как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}F(\lambda)(1+o(1))d\lambda$$

в силу оценки (11) есть величина порядка $o(\frac{1}{d_n^2})$. Таким образом, получили

$$N_1-N_2 = o\left(\frac{1}{r_n}\right)+o\left(\frac{1}{d_n^2}\right).$$

Устремив n к бесконечности, воспользовавшись тем, что N_1 и N_2 – целые числа, приходим к доказательству леммы.

Теорема 4 *Пусть* $k(x)\in D(\mathcal{P}_0^2)$ *и* $k(x_0)\neq -1$, *тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n-\lambda_n)=\frac{\tilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)},$$

где $\tilde{k}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\mathcal{P}_0 k(x)$.

Доказательство. Умножим равенство (12) на $\lambda/2\pi i$ и проинтегрируем по контуру Γ_n. По предыдущей лемме внутри контура Γ_n находится одинаковое число k_n собственных значений операторов $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_0$. Тогда, используя свойства проектора Рисса, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\lambda Sp(R_\lambda-R_\lambda^0)d\lambda=\sum_{k=1}^{k_n}(\mu_k-\lambda_k).$$

Из теоремы Коши о вычетах заключаем, что $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\dfrac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)}\dfrac{1}{\lambda}d\lambda=\dfrac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)}$. Далее, $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\dfrac{o(1)}{\lambda}d\lambda=o(1)$ при $n\to\infty$.

В силу формулы (11) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\lambda F(\lambda)(1+o(1))d\lambda = O\left(\int_{\Gamma_n}\frac{1}{d^2(\lambda)}d\lambda\right).$$

Пусть $\lambda=r\exp(i\varphi)$. Тогда $d(\lambda)\geq r|\sin\varphi|$. С другой стороны, на контуре Γ_n $d(\lambda)\geq d_n$. Оценим интеграл по части окружности Γ_n, лежащей в первой четверти λ – плоскости (остальные рассматриваются аналогично).

Разобьем участок интегрирования на два участка $0\leq\varphi\leq\varphi_n,\ \varphi_n\leq\varphi\leq\pi/2$, где угол φ_n будет выбран в дальнейшем. Воспользовавшись на первом участке интегрирования оценкой $d(\lambda)\geq d_n$, а на втором – оценкой $d(\lambda)\geq r\sin\varphi$, имеем

$$\int_{\Gamma_n}\frac{d\lambda}{d^2(\lambda)}=O\left(\int_0^{\varphi_n}\frac{r_n}{d_n^2}d\varphi\right)+O\left(\int_{\varphi_n}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{r_n\sin^2\varphi}\right)=O\left(\frac{r_n\varphi_n}{d_n^2}\right)+O\left(\frac{1}{r_n\varphi_n}\right).$$

Выберем $\varphi_n = \dfrac{d_n}{r_n}$. Окончательно получаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n}(\mu_k - \lambda_k) = \frac{\widetilde{k}(x_0)}{1+k(x_0)} + o(1) + O\left(\frac{1}{d_n}\right).$$

Устремляя n к бесконечности, приходим к утверждению Теоремы 4.

Отметим, что операторы с интегральными граничными условиями были исследованы в работе [8] для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, в [7] для оператора Лапласа, а в статье [9] для бигармонического оператора.

Список литературы

[1] *Березин, Ф.А.* Замечания об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом. / Ф.А. Березин, Л.Д. Фаддеев // ДАН СССР. – 1961. – Т.137. – №7. – С. 1011–1014.

[2] *Минлос, Р.А.* О точечном взаимодействии для систем из трёх частиц в квантовой механике. / Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев // ДАН СССР. – 1961. – Т.141. – №6. – С. 1335–1338.

[3] *Albeverio, S.* Some exactly solvable models in quantum mechanics: monograph / S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. – Verlag: Springer. – 1988. – 417 p.

[4] *Albeverio, S.* Singular perturbation of differential operators: Lecture Rems Series / S. Albeverio, P. Kurasov. – London: Cambridge Univ. Press. – 2001. – 271 p.

[5] *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы: монография. – М.: Наука. – 1969. – 528 с.

[6] *Садовничий, В.А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов. / В.А. Садовничий, В.А. Любишкин // Функц. анализ и его прил.. – 1986. – Т.20. – Вып.3. – С. 55–65.

[7] *Кангужин, Б.Е.* Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области. / Б.Е. Кангужин, А.А. Анияров // Мат. заметки. – 2011. – Т.89. – Вып.6. – С. 856–867.

[8] *Кангужин, Б.Е.* Аппроксимативные свойства системы корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. / Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов, Н.Е. Токмагамбетов // Уфимский математический журнал. – 2011. – Т.3. – №3. – С. 80–92.

[9] *Берикханова, Г.Е.* Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора. / Г.Е. Берикханова, Б.Е. Кангужин // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т.2. – №1. – С. 17—34.

References

[1] *Berezin, F.A.* Zamechaniya ob uravnenii Shrodingera s singulyarnym potentsialom. / F.A. Berezin, L.D. Faddeyev // DAN SSSR. – 1961. – T.137. – №7. – S. 1011 – 1014.

[2] *Minlos, R.A.* O tochechnom vzaimodeystvii dlya sistem iz trokh chastits v kvantovoy mekhanike. / R.A. Minlos, L.D. Faddeyev // DAN SSSR. – 1961. – T.141. – №6. – S. 1335 – 1338.

[3] *Albeverio, S.* Some exactly solvable models in quantum mechanics: monograph / S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. – Verlag: Springer. – 1988. – 417 p.

[4] *Albeverio, S.* Singular perturbation of differential operators: Lecture Rems Series / S. Albeverio, P. Kurasov. – London: Cambridge Univ. Press. – 2001. – 271 p.

[5] *Naimark, M.A.* Lineynyye differentsial'nyye operatory: monograph. – M.: Nauka. – 1969. – 528 s.

[6] *Sadovnichiy, V.A.* Konechnomernyye vozmushcheniya diskretnykh operatorov i formuly sledov / V.A. Sadovnichiy, V.A. Lyubishkin. // Funkts. analiz i yego pril.. – 1986. – T.20. – Vyp.3. – S. 55–65.

[7] *Kanguzhin, B.E.* Korrektnyye zadachi dlya operatora Laplasa v prokolotoy oblasti. / B.E. Kanguzhin, A.A. Aniyarov // Mat. zametki. – 2011. – T.89. – Vyp.6. – S. 856–867.

[8] *Kanguzhin, B.E.* Approksimativnyye svoystva sistemy kornevykh funktsiy , porozhdayemyye korrektno razreshimymi krayevymi zadachami dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vysshikh poryadkov. / B.E. Kanguzhin, D.B. Nurakhmetov, N.E. Tokmagambetov // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. – 2011. – T.3. – Vyp.3. – S. 80–92.

[9] *Berikkhanova, G.E.* Rezol'venty konechnomernykh vozmushchennykh korrektnykh zadach dlya bigarmonicheskogo operatora. / G.E. Berikkhanova, B.E. Kanguzhin // Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. – 2010. – T.2. – Vyp.1. – S. 17–34.

Поступила в редакцию 3 сентября 2013 года