УДК 510.5

М. Мустафа, К.Ш. Абешев

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
e-mail: Manat.Mustafa@kaznu.kz, Kuanysh.Abeshev@kaznu.kz*

О существовании семейств множеств без минимальных вычислимых нумераций в иерархии Ершова*

В данной статье рассматриваются проблема построения вычислимых семейств, не имеющих минимальных вычислимых нумерации. Вопрос о существовании семейств множеств без минимальных вычислимых нумераций естественно возникает и для иерархии Ершова. В работе установлено существование таких семейств в каждом классе множеств Σ_a^{-1} иерархии Ершова для случая когда a является ординальным обозначением произвольного вычислимого непредельного ординала.

Ключевые слова: вычислимые нумерации, минимальные нумерации, иерархия Ершова.

M. Mustafa, K. Abeshev

On the existence of families of sets without minimal computable numberings in the Ershov hierarchy

This article discusses the problem of constructing a computable families without minimal computable numbering. The question of the existence of families of sets without minimal computable numberings naturally arises for Ershov hierarchy. In this paper, the existence of such families in each class of sets Σ_a^{-1} Ershov hierarchy for the case when a is an ordinal notation any computable successor ordinal.

Key words: computable numbering, minimal numbering, Ershov hierarchy.

М. Мұстафа, К.Ш. Абешев

Ершова Иерархиялардағы минималды есептелімді нөмірлеулері жоқ ұйірлерінің бар болуы туралы

Осы мақалада минималды есептелімді нөмірлеулері жоқ ұйірлерін құрастыру сұрақтары қарастырылады. Ершов иерархиясындағы минималды нөмірлеулері жоқ ұйірлері табыла ма деген сұрақ туындайды. Осы жұмыста Ершов иерархиясындығы Σ_a^{-1} жиындарының әр кластарында, егер a ординалды белгілеу кезкелген есептелімді шекті емес ординал болған жагдайында жоғарыда айтылгандай ұйірлер бар екені көрсетілген.

Түйін сөздер: есептелімді нөмірлеулер, минималды нөмірлеулер, Ершов иерархиясы.

Введение. Два примера семейства без вычислимых минимальных нумераций в классе в.п. множеств были построены В.В. Вьюгиным [4] и С.А. Бадаевым [1], исходя из различных идей. В.В Вьюгин построил семейства в полурешетке Роджерса, где каждый элемент является точной верхней гранью двух несравнимых элементов. А построенное С.А. Бадаевым семейство в. п. множеств без минимальных вычислимых нумераций, основано на критерии минимальности нумерации (не обязательно вычислимой).

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 95/ГФ1.

Теорема 1 (Бадаев [1]) . *Нумерация $\nu : \omega \to S$ является минимальной тогда и только тогда, когда для любого в.п. множества W, если $\nu(W) = S$, то существует позитивная эквивалентность ε такая, что*

$$\forall x \forall y\, ((x, y) \in \varepsilon \to \nu x = \nu y), \qquad \forall x \exists y\, (y \in W \,\&\, (x, y) \in \varepsilon)$$

Критерий минимальности позволил построить вычислимое семейство в.п. множеств, не имеющее вычислимые минимальные нумераций, используя простые диагональные соображения: если вычислимая нумерация является вычислимой нумерацией семейства, то она не является минимальной.

Исследования вычислимых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены по сравнению с вычислимыми нумерациями семейств в.п множеств (см., например, [2], [3]). Поэтому вопрос о существовании семейств множеств без минимальных вычислимых нумераций естественно возникает и для иерархии Ершова. В работе установлено существование таких семейств в каждом классе множеств Σ^{-1}_a иерархии Ершова для случая когда a является ординальным обозначением произвольного вычислимого непредельного ординала.

Теорема 2 . *Для любого ординального обозначения вида $a = 2^b$ существует Σ^{-1}_a вычислимое семейство $\mathcal{A}$, не имеющее минимальные Σ^{-1}_a-вычислимые нумерации.*

Доказательство. Мы будем строить некоторую Σ^{-1}_a вычислимую нумерацию α и положим $\mathcal{A} = ran(\alpha)$. На самом деле мы построим вычислимую функцию $f(m, x, t)$ и частично вычислимую функцию $\gamma(m, x, t)$, удовлетворяющие следующим требованиям, обеспечивающим Σ^{-1}_a вычислимость нумерации α:

1. $\forall m \forall x (f(m, x, 0) = 0), ran(f) \subseteq \{0, 1\}$,
2. $\forall m \forall x (\lim_t f(m, x, t)$ существует и $x \in \alpha m \leftrightarrow \lim_t f(m, x, t) = 1)$,
3. $\forall m \forall x \forall t (\gamma(m, x, t) \downarrow \Rightarrow \gamma(m, x, t + 1) \downarrow)$,
4. $\forall m \forall x \forall t (\gamma(m, x, t) \downarrow \Rightarrow \gamma(m, x, t + 1) \preccurlyeq_{\mathcal{O}} \gamma(m, x, t) \preccurlyeq_{\mathcal{O}} b)$,
5. $\forall m \forall x \forall t (f(m, x, t + 1) \neq f(m, x, t) \Rightarrow \gamma(m, x, t + 1) \precneqq_{\mathcal{O}} \gamma(m, x, t)$.

Существует равномерно Σ^{-1}_a вычислимая последовательность всех Σ^{-1}_a вычислимых нумераций $\Pi_e, e \in \omega$. Обозначим через $f_e(m, x, t)$ и $\gamma_e(m, x, t)$ вычислимые последовательности функций, соответствующие последовательности нумераций $\Pi_e, e \in \omega$.

Будем строить также две вычислимые функции $a(e, k)$ и $b(e, k)$, значениями которых будут α-номера. Зафиксируем произвольную взаимно однозначную вычислимую функцию $c(n, i)$. Для каждого n элементы множества $\alpha(n)$ будут в основном состоять из значений функции $\lambda i c(n, i)$. Отметим, что в $\alpha(n)$ могут попадать также и значения функций $\lambda i c(n', i)$ и при $n' \neq n$.

Еще одна вспомогательная функция $h(m, i, t)$ предназначена для выделения границы между подошвой и отростками длины 2.

Требование $\mathbf{M_e}$. Если Π_e является нумерацией семейства $\mathcal{A}$, то Π_e не может быть минимальной.

Стратегия для выполнения требования $\mathbf{M_e}$ основано на критерии минимальности нумерации, построенное С.А. Бадаевым [1].

Лемма 1 *Π_e не является минимальной нумерацией семейства $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда Π_e нумерует семейство, отличное от $\mathcal{A}$, или существует вычислимо перечислимое множество W такое, что*

$$\Pi_e(W) = \mathcal{A} \,\&\, \forall k(\varepsilon_k \nsubseteq \theta_\alpha \vee [W]_{\varepsilon_k} \subseteq \omega).$$

Здесь $\varepsilon_k, k \in \omega$, — это какая-нибудь вычислимая нумерация всех позитивных (т.е. вычислимо перечислимых) эквивалентностей, а $[W]_{\varepsilon_k}$ означает замыкание множества W относительно эквивалентности ε_k.

Конструкция

Шаг 0. Для всех m, x полагаем $h(m, 0) = 0$, $f(m, x, 0) = 0$, $\gamma(m, x, 0)$ неопределено.

Шаг 1. Для всех m полагаем $h(m, 1) = 0$, $f(m, c(m, 0), 1) = f(m, c(m, 1), 1) = 0$, $\gamma(m, c(m, 0), 1) = \gamma(m, c(m, 1), 1) = b$. Напомним, что a — непредельный ординал и $b = \log_2 a$.

Шаг $s+1$. Пусть $e = l(l(s))$, $k = r(l(s))$, $m =< e, k >$.

Случай 1. Значения $a(e, k)$ и $b(e, k)$ еще не определены и существуют различные числа a и b такие, что

$$f_e(a, c(2m, 0), s) = f(a, c(2m, 1), s) = 1 \,\&\, f_e(b, c(2m+1, 0), s) = f(b, c(2m+1, 1), s) = 1.$$

Выбираем наименьшие числа a и b с этими условиями и полагаем $a(e, k) = a$ и $b(e, k) = b$ и переходим к следующему шагу.

Случай 2 (просыпание). $a(e, k) \downarrow= a$ и $b(e, k) \downarrow= b$. Кроме того, $< a, b >\notin \varepsilon_k^s$ и

$$\forall i \le h(m, s) + 1(f_e(a, c(2m, i), s) = 1 \,\&\, f_e(b, c(2m+1, i), s) = 1).$$

Полагаем $h(m, s+1) = h(m, s) + 1$, $f(2m, c(2m, h(m, s) + 2), s + 1) = f(2m + 1, c(2m + 1, h(m, s)+2), s+1) = 1$, $f(2m, c(2m+1, h(m, s)), s+1) = f(2m+1, c(2m, h(m, s)), s+1) = 1$. Переходим к следующему шагу.

Случай 3. $a(e, k) \downarrow= a$, $b(e, k) \downarrow= b$, тройка $< e, k, a >$ не требует внимания и $f_e(a, c(2m, h(m, s)), s) = 0$.

Полагаем $f(n, c(2m, h(m, s)), s+1) = 1$, $\gamma(n, c(2m, h(m, s)), s+1) = \gamma_e(a, c(2m, h(m, s)), s+1)$ для всех n и говорим (с этого момента), что *тройка $< e, k, a >$ требует внимания.*

Случай 4. $a(e, k) \downarrow= a$, $b(e, k) \downarrow= b$, тройка $< e, k, a >$ требует внимания и $f_e(a, c(2m, h(m, s)), s) = 0$.

Полагаем $f(n, c(2m, h(m, s)), s + 1) = 0$, $\gamma(n, c(2m, h(m, s)), s + 1) = \gamma_e(a, c(2m, h(m, s)), s + 1)$ для всех n и говорим (с этого момента), что *тройка $< e, k, a >$ не требует внимания.*

Случай 5. $a(e, k) \downarrow= a$, $b(e, k) \downarrow= b$, тройка $< e, k, a >$ не требует внимания и $f_e(a, c(2m, h(m, s)), s) = 1$, а $f_e(b, c(2m + 1, h(m, s)), s) = 0$.

Полагаем $f(n, c(2m+1, h(m, s)), s+1) = 1$, $\gamma(n, c(2m+1, h(m, s)), s+1) = \gamma_e(b, c(2m+1, h(m, s)), s + 1)$ для всех n и говорим (с этого момента), что тройка $< e, k, a >$ требует внимания.

Случай 6. $a(e,k)\downarrow= a$, $b(e,k)\downarrow= b$, тройка $< e,k,a >$ требует внимания и $f_e(b, c(2m+1,\, h(m,\, s)),\, s) = 1$.

Полагаем $f(n, c(2m+1, h(m, s)), s+1) = 0$, $\gamma(n, c(2m+1, h(m, s)), s+1) = \gamma_e(b, c(2m+1, h(m,\, s)),\, s+1)$ для всех n и говорим (с этого момента), что тройка $< e,k,a >$ не требует внимания.

Случай 7. Не выполняются условия случаев 1–6. Ничего не делаем и переходим к следующему шагу.

Проверка.

1. $\forall m \forall s \forall i \le h(m,s)(f(2m,c(2m,i),s) = 1\,\&\, f(2m+1,c(2m+1,i),s) = 1)$,
2. $\forall m(\exists \lim_s h(m,s) = h_m \Rightarrow \forall i((i \le h_m + 1 \Rightarrow \alpha(2m)(c(2m,i)) = 1)\,\&\,(i > h_m + 1 \Rightarrow \alpha(2m)(c(2m,i)) = 0)\,\&\,(i < h_m \Rightarrow \alpha(2m)(c(2m+1,i)) = 1)\,\&\,(i \ge h_m \Rightarrow \alpha(2m)(c(2m+1,i)) = 1)))$,
3. симметрично.

Доказательство состоит в рутинной проверке выполнимости всех требований.

Список литературы

[1] *Бадаев С.А.* Минимальные нумерации. // Труды Института Математики СО РАН. – 1993. – В.25. – С. 3–34.

[2] *Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T.* Computable numberings in the hierarchy of Ershov. – Mathematical Logic in Asia. – World Scientific Publishers. – 2006. – pp. 17–30.

[3] *Badaev S.A., Lempp S.* A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets. // The Journal of Symbolic Logic. – 2009. – V.74. – N.2. – pp. 618–640.

[4] *Вьюгин В.В.* О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций. // Алгебра и Логика. – 1973. – В.12. – №5. – С. 512–529.

References

[1] *Badaev S.A.* Minimal'nye numeratsii. // Trudy Instituta Matematiki SO RAN. – 1993. – V.25. – C. 3–34.

[2] *Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T.* Computable numberings in the hierarchy of Ershov. – Mathematical Logic in Asia. – World Scientific Publishers. – 2006. – pp. 17–30.

[3] *Badaev S.A., Lempp S.* A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets. // The Journal of Symbolic Logic. – 2009. – V.74. – N.2. – pp. 618–640.

[4] *V'yugin V.V.* O nekotorykh primerakh verkhnikh polureshetok vychislimykh numeratsiy. // Algebra i Logika. – 1973. – V.12. – No.5. – S. 512–529.

Поступила в редакцию 12 сентября 2013 года