УДК 517.968

С.Б. Тагаева

Международный Университет Инновационных Технологий, Бишкек, Кыргызстан; e-mail: tagaeva_ 72@mail.ru

О регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Вольтера третьего рода в пространстве суммируемых функций

В работе Магницкого К.А. «Линейные интегральные уравнения Вольтера I и III рода» исследованы вопросы существования многопараметрического решения для линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода. В работах авторов Асанова А., Тагаевой С.Б. «Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода в пространстве суммируемых функций» и Янно Я. «Регуляризация одного уравнения Вольтера I рода, равносильного уравнению III рода» исследованы вопросы единственности и существования решения линейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций.

Основные результаты работы: в вышеуказанных работах исследования были проведены в пространстве непрерывных функций, в данной работе исследования проведены в пространстве суммируемых функций. Доказаны леммы и теорема.

Методы исследования: в доказательствах лемм и теоремы использовались неравенство Гельдера, формула Дирихле, метод последовательных приближений, неравенство Минковского, неравенство Гронуолла- Беллмана.

Новизна работы: доказываются существование и единственность решения линейных интегральных уравнений Вольтера третьего рода в пространстве суммируемых функций.

Ключевые слова: пространство суммируемых функций, линейные интегральные уравнения Вольтерра 3-го рода, регуляризация решений, единственность решений.

S.B. Tagaeva

Regularization and unity of Volterra linear integral equations solutions of third kind in the space of summed up functions

In Magnitsky K.A. work. "Voltaire's linear integrated equations of I and the III sorts"are investigated questions of existence of the multiple parameter decision for Voltaire's linear integrated equation of the third sort. In works of authors Asanov A., Tagayeva S. B. "Regularization and uniqueness of solutions of the linear integrated equations of Voltaire of the III sort in space of summable functions"and Yanno Ya. "Regularization of one equation of Voltaire of the I sort equivalent to the equation of the III sort"are investigated questions of uniqueness and existence of the solution of the linear integrated equation of Voltaire of the third sort in space of continuous functions.

Main results of work: in the above works researches were conducted in space of continuous functions, in this work researches are conducted in space of summable functions. Lemmas and the theorem are proved.

Research methods: in proofs of lemmas and theorems were used Gelder's inequality, Dirikhle's formula, a method of consecutive approximations, Minkowski's inequality, Gro-

nuolla-Bellman's inequality.
Novelty of work: existence and uniqueness of the solution of the linear integrated equations of Voltaire of the third sort in space of summable functions are proved.
Key words: space of summed up functions, Volterra linear integral equations of third kind, regularization of solutions, uniqueness of solution.

С.Б. Тагаева

Үшінші текті Вольтерра сызықты интегралдық теңдеуі шешімінің қосындыланатын функциялар кеңістігінде регуляризациялауы және жалғыздығы туралы

К.А. Магницкийдің «Линейные интегральные уравнения Вольтера I и III рода» атты жұмысында үшінші текті Вольтерра сызықты интегралдық теңдеуінің көп параметрлі шешімінің бар болу мәселесі зерттелген. А. Асанова, С.Б. Тагаеваның «Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода в пространстве суммируемых функций» және Я. Янно «Регуляризация одного уравнения Вольтера I рода, равносильного уравнению III рода» атты жұмыстарында үшінші текті Вольтерра сызықты интегралдық теңдеуінің шешімі үзіліссіз функциялар кеңістігінде бар және жалғыздығы зерттелген.
Жұмыстың негізгі нәтижелері: жоғарыда көрсетілген жұмыстарда зерттеулер үзіліссіз функциялар кеңістігінде жасалған, ал мұнда қосындыланатын функциялар кеңістігінде жүргізілген.
Зерттеу әдістері: лемма мен теоремаларды дәлелдеуде, Дирихле формуласы, біртіндеп жуықтау әдісі, Минковский, Гронуолла-Беллман және Гельдера теңсіздіктері қолданылған.
Жұмыстың жаңалығы: үшінші текті Вольтерра сызықты интегралдық теңдеу шешімінің қосындыланатын функциялар кеңістігінде бар және жалғыздығы дәлелденген.
Түйін сөздер: қосындыланатын функциялар кеңістігі, үшінші текті Вольтерра сызықты интегралдық теңдеуі, шешімді регуляризациялау, шешімінің жалғыздығы.

Рассмотрим уравнение

$$a(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], T > t_0, \tag{1}$$

где $K(t,s), f(t), a(t)$- заданные функции, $a(t_0) = 0$, $a(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_0, T]$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать

$$[\varepsilon + a(t)]\, v(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

Предположим выполнения следующих условий:

а) при любом фиксированном $t \in (t_0, T]$ $K(t,s) \in L^{q_1}(t_0, t)$, $q_1 \geq 1$, функция $K(t,t) \in L^1(t_0, T)$, $K(t,t) \geq 0$, $t \in [t_0, T]$;

б) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau, s), (\eta, s) \in G = \{(t,s) : t_0 < s < t < T\}$ справедлива оценка:

$$|K(t,s) - K(\eta, s)| \leq l(s) \int_{\eta}^{\tau} K(s,s)ds,$$

где $l(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $l(t) \in L^{q_1}(t_0, T)$, $q_1 \geq 1$;

в) $[K(t,t)/a(t)] \in L^1(t_0, T)$ и существует $q > 1$, такое, что

$$b(t) = \frac{K(t,t)}{a(t)} \cdot \left\{ \int_{t_0}^{t} \left[l^q(s) a^{q/p}(s) ds / K^{q/p}(s,s) \right] \right\}^{p/q} \in L^1(t_0, T), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Обозначим через $L^p_\lambda(t_0, T), p \geq 1$, линейное пространство всех измеримых функций $u(t)$, определенных на $[t_0, T]$, удовлетворяющих условию:

$$\|u(t)\|^p_{p,\lambda} = \int_{t_0}^{T} |u(t)|^p \, \lambda(t) dt < \infty, \text{ где } \lambda(t) = K(t,t)/a(t).$$

Лемма 1 *Пусть* $u(t) \in L^p_\lambda(t_0, T), p \in [1, \infty)$, $[K(t,t)/a(t)] \in L^1(t_0, T)$, $\varepsilon > 0$ *и*

$$f_1(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon u(t)}{\varepsilon + a(t)} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon K(s,s) \exp\left(-\int_{s}^{t} \frac{K(\tau,\tau) d\tau}{\varepsilon + a(\tau)} \right) \frac{u(s) ds}{[\varepsilon + a(t)][\varepsilon + a(s)]}, \tag{3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda} \leq \nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)} \cdot \|u(t)\|^p_{p,\lambda} + (2/q)^{p/q} \|u(t)\|^p_{p,\lambda} \cdot \\ \cdot \left\{ \omega_\lambda\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)} \|\lambda(t)\|_{L^1(t_0,T)} \right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] = \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} \frac{|u(t)|^p K(t,t)}{a(t)} dt$, $\omega_\lambda\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] = \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} \frac{K(t,t)}{a(t)} dt$, $\phi(x)$ *– обратная функция к* $a(t)$ *на* $[t_0, T]$ *,*β *– произвольное число из интервала* $(0,1)$, $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Для оценки (3) воспользуемся определением нормы $\|\cdot\|^p_{L^p_\lambda(t_0,T)}$:

$$\|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{L^p_\lambda(t_0,T)} = \int_{t_0}^{T} |f_1(t,\varepsilon)|^p \, \lambda(t) \, dt = \int_{t_0}^{T} |f_1(t,\varepsilon)|^p \frac{K(t,t)}{a(t)} dt.$$

Оценим первое слагаемое (3):

$$\int_{t_0}^{T} \left| \frac{\varepsilon u(t)}{\varepsilon + a(t)} \right|^p \cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt = \int_{t_0}^{T} \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a(t)} \right|^p |u(t)|^p \cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt \leq \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} |u(t)|^p \cdot$$

$$\cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt + \int_{\phi(\varepsilon^\beta)}^{T} \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a(t)} \right|^p |u(t)|^p \cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt \leq \int_{t_0}^{\phi(\varepsilon^\beta)} |u(t)|^p \cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt +$$

$$+ \int_{\phi(\varepsilon^\beta)}^{T} \left| \frac{\varepsilon}{a(\phi(\varepsilon^\beta))} \right|^p |u(t)|^p \cdot \frac{K(t,t)}{a(t)} dt \leq \nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)} \cdot \|u(t)\|^p_{p,\lambda}. \tag{5}$$

Оценим второе слагаемое (3):

$$\int_{t_0}^{T}\left\{\left|\int_{t_0}^{t}\varepsilon K(s,s)\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)d\tau}{\varepsilon+a(\tau)}\right)\frac{u(s)ds}{[\varepsilon+a(t)][\varepsilon+a(s)]}\right|^{p}\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\frac{\varepsilon^{p}}{[\varepsilon+a(t\,)]^{p}}\left|\int_{t_0}^{t}K^{1/q}(s,s)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)u(s)K^{1/p}(s,s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)/\left\{[\varepsilon+a(s)]^{1/q}\,[\varepsilon+a(s)]^{1/p}\right\}\right|^{p}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\le$$

$$\le\int_{t_0}^{T}\frac{\varepsilon^{p}}{[\varepsilon+a(t)]^{p}}\left\{\int_{t_0}^{t}K(s,s)\exp\left(-\frac{q}{2}\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)ds\right\}^{p/q}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{p}{2}\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)|u(s)|^{p}\,K(s,s)ds/\left[\varepsilon+a(s)\right]\right\}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\le$$

$$\le\|u(t)\|_{p,\lambda}^{p}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\cdot\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}\right]^{p}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\le\|u(t)\|_{p,\lambda}^{p}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)}\frac{K\left(t,t\right)}{a(t)}dt+\int_{\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)}^{T}\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(\phi(\varepsilon^{\beta}))}\right|^{p}\frac{K\left(t,t\right)}{a(t)}dt\right\}\le$$

$$\le\|u(t)\|_{p,\lambda}^{p}\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\left\{\int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)}\frac{K\left(t,t\right)}{a(t)}dt+\varepsilon^{p(1-\beta)}\int_{\phi(\varepsilon^{\beta})}^{T}\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\}\le$$

$$\le\|u(t)\|_{p,\lambda}^{p}\cdot\left(\frac{2}{q}\right)^{p/q}\left\{\omega_{\lambda}\left[\phi\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right]+\varepsilon^{p(1-\beta)}\cdot\left\|\lambda\left(t\right)\right\|_{L^{1}(t_0,T)}\right\}. \qquad (6)$$

Здесь мы использовали неравенство Гельдера. Учитывая (5), (6) из (3) получаем оценку (4). Лемма доказана. □

Лемма 2 *Пусть выполняются условия а), б) и*

$$\begin{aligned}H\left(t,\tau,\varepsilon\right)=\ &\frac{K(\tau,\tau)-K(t,\tau)}{\varepsilon+a(t)}+\textstyle\int_{\tau}^{t}\displaystyle\frac{K\left(s,s\right)}{\varepsilon+a(s)}\exp\left(-\textstyle\int_{s}^{t}\displaystyle\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\\ &\cdot\frac{K(s,\tau)-K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(t)}ds,\end{aligned} \qquad (7)$$

Тогда справедлива оценка:

$$|H\left(t,\tau,\varepsilon\right)|\le\left(e^{-1}+1\right)l(\tau) \qquad (8)$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\begin{aligned}H(t,\tau,\varepsilon)\ &=\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\left[K(\tau,\tau)-K(t,\tau)\right]\exp\left(-\textstyle\int_{\tau}^{t}\displaystyle\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)-\\ &-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\textstyle\int_{\tau}^{t}\displaystyle\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\cdot\exp\left(-\textstyle\int_{\tau}^{t}\displaystyle\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\left[K(t,\tau)-K(s,\tau)\right]ds.\end{aligned} \qquad (9)$$

В самом деле,

$$\int_\tau^t \frac{1}{\varepsilon+a(t)}\exp\left(-\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\left[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)\right]ds=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\left[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)\right]\cdot\exp\left(-\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\Bigg|_{s=\tau}^{s=t}= \tag{10}$$

$$=\frac{\left[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)\right]}{\varepsilon+a(t)}-\frac{\left[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)\right]}{\varepsilon+a(t)}\cdot\exp\left(-\int_\tau^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right).$$

Учитывая (10), имеем (9). Далее

$$|H(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{|K(t,\tau)-K(\tau,\tau)|}{\varepsilon+a(t)}\exp\left(-\int_\tau^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)+\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)|K(t,\tau)-K(s,\tau)|\,ds\le l(\tau)\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right)+\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\exp\left(-\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot$$

$$\cdot\left(l(\tau)\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau\right)ds\le l(\tau)\cdot\left[\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\exp\left(-\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right)\right]+$$

$$+l(\tau)\int_\tau^t\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(s)}\exp\left(-\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\left(\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)ds\le$$

$$\le l(\tau)\cdot\left[\sup_{\nu\ge0}\left(\nu e^{-\nu}\right)+\int_0^{\int_\tau^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau}e^{-\nu_1}\nu_1d\nu_1\right]\le\left(e^{-1}+1\right)l(\tau).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3 *Пусть выполняются условия а) -в) и* $f(t)\in L^p_\lambda(t_0,T)$, *где* $\lambda(t)=\dfrac{K(t,t)}{a(t)}$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует единственное решение* $v(t,\varepsilon)$ *уравнения* (2) *из пространства* $L^p_\lambda(t_0,T)$.

Доказательство. Из уравнения (2) определим:

$$v(t,\varepsilon)=-\int_{t_0}^t\frac{K\left(s,s\right)v(s,\varepsilon)}{\varepsilon+a(t)}ds-\int_{t_0}^t\frac{\left[K\left(t,s\right)-K\left(s,s\right)\right]v(s,\varepsilon)}{\varepsilon+a(t)}ds+\frac{f(t)}{\varepsilon+a(t)},$$

Отсюда, используя резольвенту ядра $\left(-\dfrac{K(s,s)}{\varepsilon+a(t)}\right)$, имеем

$$v(t,\varepsilon)=-\int_{t_0}^{t}\frac{[K(t,s)-K(s,s)]\,v(s,\varepsilon)}{\varepsilon+a(t)}ds+\frac{f(t)}{\varepsilon+a(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{K(s,s)}{\varepsilon+a(t)}\cdot$$
$$\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\left\{-\frac{f(s)}{\varepsilon+a(s)}+\int_{0}^{s}\frac{[K\,(s,\tau)-K\,(\tau,\tau)\,]\,\xi(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon+a(s)}d\tau\right\}ds \tag{11}$$

Применяя формулу Дирихле, уравнение (11) сводим к эквивалентному уравнению:

$$v(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,s,\varepsilon)\cdot v(s,\varepsilon)ds+f_1(t,\varepsilon), \tag{12}$$

где

$$H(t,s,\varepsilon)=\ \frac{K(\tau,\tau)-K(t,\tau)}{\varepsilon+a(t)}+\int_{\tau}^{t}K(s,s)\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{K(s,\tau)-K(\tau,\tau)}{[\varepsilon+a(t)]\,[\varepsilon+a(s)]}ds, \tag{13}$$

$$f_1(t,\varepsilon)=\frac{-f(t)}{\varepsilon+a(t)}+\int_{t_0}^{t}K(s,s)\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\frac{f(s)}{[\varepsilon+a(t)]\,[\varepsilon+a(s)]}ds. \tag{14}$$

Для решения уравнения (12) применим метод последовательных приближений:

$$v_0(t,\varepsilon)=f_1(t,\varepsilon);v_n(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,s,\varepsilon)\cdot v_{n-1}(s,\varepsilon)ds+f_1(t,\varepsilon). \tag{15}$$

Последовательность $\{v_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty}[v_i(t,\varepsilon)-v_{i-1}(t,\varepsilon)]+v_0(t,\varepsilon). \tag{16}$$

Так как $v_n(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}[v_i(t,\varepsilon)-v_{i-1}(t,\varepsilon)]+v_0(t,\varepsilon)$, учитывая (14) и применяя неравенство Минковского, оценим:

$$\|v_0(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda}=\|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda}\le\left\|\frac{f(t)}{\varepsilon+a(t)}\right\|_{p,\lambda}+$$
$$+\left\|\int_{t_0}^{t}K(s,s)\cdot\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\frac{f(s)}{[\varepsilon+a(t\,)]\cdot[\varepsilon+a(s\,)]}ds\right\|_{p,\lambda}\le$$
$$\le\frac{1}{\varepsilon}\,\|f(t)\|_{p,\lambda}+\left\{\int_{t_0}^{T}\left|\int_{t_0}^{t}K(s,s)\cdot\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{f(s)}{[\varepsilon+a(t\,)]\cdot[\varepsilon+a(s\,)]}ds\right|^{p}\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\}^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{\varepsilon}\,\|f(t)\|_{p,\lambda}+$$

$$+\left\{\int_{t_0}^{T}\left(\int_{t_0}^{t} K^{\frac{1}{q}}(s,s)\exp\left(-\int_{s}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)\frac{K^{\frac{1}{p}}(s,s)f(s)}{[\varepsilon+a(s)]^{\frac{1}{q}}\,[\varepsilon+a(s)]^{\frac{1}{p}}}ds\right)^{p}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\}^{\frac{1}{p}}\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\left\|f(t)\right\|_{p,\lambda}+\left\{\int_{t_0}^{T}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{K(s,s)\exp\left(-q\int_s^t\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\right)}{[\varepsilon+a(s)]^{\frac{p}{q}}}ds\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{K(s,s)\left|f(s)\right|^p}{[\varepsilon+a(s\,)]}ds\right)^{p}\cdot\frac{K(t,t)}{a(t)}dt\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\leq\frac{1}{\varepsilon}\left[1+\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\frac{K(t,t)}{a(t)}\right\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(t_0,T)}\right]\left\|f(t)\right\|_{p,\lambda}. \tag{17}$$

Учитывая (13) и (15) оценим:

$$\left\|v_1(t,\varepsilon)-v_0(t,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda,t}=\left\|\int_{t_0}^t H(t,s,\varepsilon)v_0(s,\varepsilon)ds\right\|_{p,\lambda,t}\leq\left\|\int_{t_0}^t(e^{-1}+1)l(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left|v_0(s,\varepsilon)\right|ds\right\|_{p,\lambda,t}=\left\{\int_{t_0}^t\left|\int_{t_0}^{\tau}\frac{(e^{-1}+1)l(s)a^{\frac{1}{p}}(s)K^{\frac{1}{p}}(s,s)\left|v_0(s,\varepsilon)\right|}{a^{\frac{1}{p}}(s)K^{\frac{1}{p}}(s,s)}ds\right|^p\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq(e^{-1}+1)\cdot\left\{\int_{t_0}^t\left[\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^q(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right]^{\frac{p}{q}}\left\|v_0(s,\varepsilon)\right\|^p_{p,\lambda,\tau}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}= \tag{18}$$

$$=(e^{-1}+1)\left[\int_{t_0}^t b(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{p}}\left\|v_0(s,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda}$$

Учитывая (18), проведем оценку:

$$\left\|v_2(t,\varepsilon)-v_1(t,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda,t}=\left\|\int_{t_0}^t H(t,s,\varepsilon)\left[v_1(s,\varepsilon)-v_0(s,\varepsilon)\right]ds\right\|_{p,\lambda,t}\leq$$

$$\leq\left\{\int_{t_0}^t\left|\int_{t_0}^{\tau}(e^{-1}+1)l(s)\left|v_1(s,\varepsilon)-v_0(s,\varepsilon)\right|ds\right|^p\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\leq(e^{-1}+1)\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{t_0}^t\left[\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^q(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right]^{\frac{p}{q}}\left\|v_1(s,\varepsilon)-v_0(s,\varepsilon)\right\|^p_{p,\lambda,\tau}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq(e^{-1}+1)^2\cdot\left\{\int_{t_0}^t b(\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}b(s)ds\right]d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\left\|v_0(s,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda}= \tag{19}$$

$$=(e^{-1}+1)^2\cdot\left\{\int_{t_0}^t\left[\int_{t_0}^{\tau}b(\tau)d\tau\right]d\left(\int_{t_0}^{\tau}b(\tau)d\tau\right)\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\|v_0(s,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda}\leq$$

$$\leq(e^{-1}+1)^2\left\{\frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^t b(\tau)d\tau\right)^2\right\}^{\frac{1}{p}}\left\|v_0(s,\varepsilon)\right\|_{p,\lambda}.$$

При получении оценок (17), (18) и (19) мы применяли неравенство Гельдера. Отсюда, используя метод математической индукции, докажем истинность оценки:

$$\|v_n(t,\varepsilon) - v_{n-1}(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} \le (e^{-1}+1)^n \left\{ \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau \right)^n \right\}^{\frac{1}{p}} \|v_0(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda}. \tag{20}$$

При $n = 1$ мы получили оценку (18). Предположим, что оценка верна при $n = k$, т.е. $\|v_k(t,\varepsilon) - v_{k-1}(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} \le (e^{-1}+1)^k \left\{ \frac{1}{k!} \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau \right)^k \right\}^{\frac{1}{p}} \|v_0(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda}$. Тогда, так как

$$\|v_{k+1}(t,\varepsilon) - v_k(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} = \left\| \int_{t_0}^{t} H(t,s,\varepsilon)\left[v_k(s,\varepsilon) - v_{k-1}(s,\varepsilon)\right] ds \right\|_{p,\lambda,t} \le$$

$$\le \left\| \int_{t_0}^{\tau} (e^{-1}+1)\, l(s)\, |v_k(s,\varepsilon) - v_{k-1}(s,\varepsilon)|\, ds \right\|_{p,\lambda,t} \le$$

$$\le \left\{ \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{\tau} (e^{-1}+1)\, l(s)\, |v_k(s,\varepsilon) - v_{k-1}(s,\varepsilon)|\, ds \right]^p \frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \le (e^{-1}+1)\cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{\tau} \frac{l^q(s) a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)} ds \right]^{\frac{p}{q}} \|v_k(s,\varepsilon) - v_{k-1}(s,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,\tau} \frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (e^{-1}+1)^{k+1} \left[\frac{1}{(k+1)!} \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau \right)^{k+1} \right]^{\frac{1}{p}} \|v_0(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda}$$

Очевидно, что и при $n = k+1$, оценка (20) истинна. Следовательно, оценка (20) истинна при всех значениях $n \in \mathrm{N}$.

В дальнейшем, для простоты введем обозначение $b_0 = \int_{t_0}^{T} b(\tau)d\tau$, тогда из (20) имеем:

$$\|v_n(t,\varepsilon) - v_{n-1}(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} \le (e^{-1}+1)^n \left\{ \frac{1}{n!} b_0^n \right\}^{\frac{1}{p}} \|v_0(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda}. \tag{21}$$

В силу (21) для ряда (16) получим следующий мажорирующий числовой ряд:

$$\|v_0(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-1}+1\right)^n \left(\frac{b_0^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}. \tag{22}$$

Для того, чтобы доказать сходимость числового ряда (22), воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n = \left(e^{-1}+1\right)^n \left(\frac{b_0^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad a_{n+1} = \left(e^{-1}+1\right)^{n+1} \left(\frac{b_0^{n+1}}{(n+1)!} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-1}+1\right) \left(\frac{b_0}{n+1} \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Поэтому последовательность $\{v_n(t,\varepsilon)\}$ по норме $L^p_\lambda(t_0,T)$ сходится к элементу $v(t,\varepsilon)$ этого пространства. Ясно, что эта функция будет решением уравнения (2). Из (12) следует:

$$|v(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t} \left(e^{-1}+1\right) l(s)\, |v(s,\varepsilon)|\, ds + |f_1(t,\varepsilon)|\,, t\in[t_0,T]\,.$$

Отсюда, взяв норму $\|\cdot\|_{p,\lambda,t}$ и применяя неравенства Минковского и Гельдера, имеем:

$$\|v(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} \le \left\| \int_{t_0}^{t} (e^{-1}+1) \frac{l(s)a^{\frac{1}{p}}(s)}{K^{\frac{1}{p}}(s,s)} \frac{K^{\frac{1}{p}}(s,s)}{a^{\frac{1}{p}}(s)} |v(s,\varepsilon)|\, ds \right\|_{p,\lambda,t} + \|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} \le$$

$$\le (e^{-1}+1)\cdot \left\{ \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{\tau} \frac{l^q(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)} ds \right]^{\frac{p}{q}} \|v(s,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,\tau}\, \tfrac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} + \|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t} =$$

$$= (e^{-1}+1) \left[\int_{t_0}^{t} b(\tau)\, \|v(s,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,\tau}\, d\tau \right]^{\frac{1}{p}} + \|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda,t}\,.$$

Отсюда, в силу неравенства $(a+b)^p \le 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right), a\ge 0, b\ge 0, p\ge 1$, получим

$$\|v(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,t} \le 2^{p-1}\int_{t_0}^{t} \left(e^{-1}+1\right)^p b(\tau)\, \|v(s,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,\tau} d\tau + 2^{p-1} \|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda}\,, t\in[t_0,T]. \tag{23}$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, из (23) имеем:

$$\|v(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,t} \le 2^{p-1} \|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda} \exp\left(2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^p \int_{t_0}^{t} b\left(\tau\right) d\tau \right), t\in[t_0,T]\,.$$

Отсюда получим

$$\|v(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda,t} \le M \|f_1(t,\varepsilon)\|^p_{p,\lambda}\,, \tag{24}$$

где $M = 2^{p-1}\exp\left(2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^p \int_{t_0}^{T} b\left(\tau\right) d\tau\right)$.

Из (24) при$f_1(t)=0, t\in[t_0,T]$ вытекает $\|v(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda}=0$. Лемма доказана. □

Теорема 1 *Пусть выполняются условия а)- в). Тогда, если* $K(t,t)>0$ *при почти всех* $t\in[t_0,T]$, *уравнение* (1) *имеет решение* $u(t)\in L^p_{p,\lambda}(t_0,T)$, *то решение* $v(t,\varepsilon)$*уравнения* (2) *при* $\varepsilon\to 0$ *сходится по норме* $L^p_{p,\lambda}(t_0,T)$*к*$u(t)$. *При этом справедлива оценка:*

$$\begin{aligned} \|v(t,\varepsilon)-u(t)\|^p_{L_{p,\lambda}} \le M \Big\{ \nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] + \varepsilon^{p(1-\beta)} \|u(t)\|^p_{p,\lambda} + \\ + \left(\tfrac{2}{q}\right)^{p/q} \|u(t)\|^p_{p,\lambda} \left[\omega_\lambda\left(\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right) + \varepsilon^{p(1-\beta)} \|\lambda(t)\|_{L^1(t_0,T)}\right] \Big\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где β *– произвольное число из* $(0,1)$),

$$\nu_{p,\lambda,u}\left[\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right] = \int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^\beta\right)} |u(t)|^p \frac{K(t,t)}{a(t)} dt, \omega_\lambda\left(\phi\left(\varepsilon^\beta\right)\right) = \int_{t_0}^{\phi\left(\varepsilon^\beta\right)} \frac{K(t,t)}{a(t)} dt,$$

$\phi(x)-$ *обратная функция к* $a(t)$ *на* $[t_0,T]$, $M = 2^{p-1}\exp\left(2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^p \int_{t_0}^{T} b\left(\tau\right) d\tau\right)$.

Доказательство. В уравнении (2) сделаем замену:

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon), \tag{26}$$

где $u(t)-$ решение уравнения (1). Подставляя (26) в (2), имеем:

$$\begin{gathered}
[\varepsilon + a(t)]\,\xi(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds + \int_{t_0}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon u(t),\\
\xi(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} \frac{K(s,s)}{\varepsilon + a(t)}\xi(s,\varepsilon)ds + \int_{t_0}^{t} \frac{[K(t,s) - K(s,s)]}{\varepsilon + a(t)}\xi(s,\varepsilon)ds = -\frac{\varepsilon u(t)}{\varepsilon + a(t)},
\end{gathered} \tag{27}$$

используя резольвенту ядра $\left[-\dfrac{K(s,s)}{\varepsilon + a(t)}\right]$ и применяя формулу Дирихле, получим:

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + f_1(t,\varepsilon), \tag{28}$$

где $H(t,s,\varepsilon)$ определена по формуле (13), $f_1(t,\varepsilon)$ определена по формуле (3).

В силу леммы 2 из (28) имеем:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t} \left(e^{-1} + 1\right) l(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|\,ds + |f_1(t,\varepsilon)|\,, t \in [t_0, T]\,. \tag{29}$$

Для любого $v(t) \in L_\lambda^p(t_0,T)$ и для любого $t \in [t_0,T]$ введем обозначение:

$$\|v(t)\|_{p,\lambda,t}^p = \int_{t_0}^{t} |v(s)|^p\,\lambda(s)ds.$$

Из (29) беря норму $\|\cdot\|_{p,\lambda,t}$и применяя неравенство Минковского:

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t} \le \left\| \int_{t_0}^{t} \left(e^{-1} + 1\right) l(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|\,ds \right\|_{p,\lambda.t} + \|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}\,. \tag{30}$$

Возводим (30) в $p-$ тую степень и применим неравенство [4]

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right), \quad a \ge 0, b \ge 0, p \ge 1$$

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t} \le 2^{p-1}\left[\left\| \int_{t_0}^{t} \left(e^{-1} + 1\right) l(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|\,ds \right\|_{p,\lambda.t}^p + \|f_1(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}^p \right]. \tag{31}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (31):

$$\left\|\int_{t_0}^{t}(e^{-1}+1)\,l(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|\,ds\right\|_{p,\lambda.t}^{p}\leq\int_{t_0}^{t}\left|\int_{t_0}^{\tau}(e^{-1}+1)\,l(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|\,ds\right|^{p}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\leq$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\left|(e^{-1}+1)\int_{t_0}^{\tau}\frac{l(s)a^{\frac{1}{p}}(s)}{K^{\frac{1}{p}}(s,s)}\,|\xi(s,\varepsilon)|\,\frac{K^{\frac{1}{p}}(s,s)}{a^{\frac{1}{p}}(s)}ds\right|^{p}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau\leq$$

$$\leq(e^{-1}+1)^{p}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^{q}(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}\cdot\left(\int_{t_0}^{\tau}|\xi(s,\varepsilon)|^{p}\,\frac{K(s,s)}{a(s)}ds\right)\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}d\tau= \tag{32}$$

$$=(e^{-1}+1)^{p}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}|\xi(s,\varepsilon)|^{p}\,\frac{K(s,s)}{a(s)}ds\right]d\tau=$$

$$=(e^{-1}+1)^{p}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,\|\xi(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda,\tau}^{p}\,d\tau.$$

где $b(\tau)=\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^{q}(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}$ – суммируемая функция, т.е. $b(\tau)\in L^{1}(t_0,T)$.

Замечание:

1. Если $a(t)$ – возрастающая функция, то
$$b(\tau)\leq\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^{q}(s)a^{\frac{q}{p}}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}\frac{K(\tau,\tau)}{a(\tau)}\leq\left(\int_{t_0}^{\tau}\frac{l^{q}(s)}{K^{\frac{q}{p}}(s,s)}ds\right)^{\frac{p}{q}}K(\tau,\tau).$$

2. Если $a(t)$ – возрастающая функция, $K(t,t)$ – невозрастающая функция, то
$$b(\tau)\leq\left(\int_{t_0}^{\tau}l^{q}(s)ds\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Учитывая (32) в оценке (31) имеем:

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}^{p}\leq2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^{p}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,\|\xi(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda.\tau}^{p}\,d\tau+2^{p-1}\,\|f_1(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}^{p}.$$

Отсюда, применяя неравенство Гроноулла-Беллмана, имеем:

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}^{p}\leq2^{p-1}\,\|f_1(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda.t}^{p}\exp\left(2^{p-1}\left(e^{-1}+1\right)^{p}\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau\right)\leq M\|f_1(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda}^{p},$$

где $M=2^{p-1}\exp\left(2^{p-1}\,(e^{-1}+1)^{p}\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau\right)$, $\|f_1(s,\varepsilon)\|_{p,\lambda}^{p}$ определена по формуле (4) в лемме 1. Теорема доказана. □

Следствие 1 *Если выполняются условия а)–в) и $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, то решение уравнения (1) в пространстве $L_{\lambda}^{p}(t_0,T)$, $p\geq1$ единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t)$ – ненулевое решение уравнения (1) из пространства $L_{\lambda}^{p}(t_0,T)$ при $f(t)\equiv0$. Тогда из оценки (25), переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, имеем: $\|u(t)\|_{p,\lambda}^{p}=0$, т.е. $u(t)=0$ при $t\in[t_0,T]$.

Список литературы

[1] *Магницкий К.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтера I и III рода. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т.19. – №4. – С. 970–989.

[2] *Асанов А., Тагаева С.Б.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода в пространстве суммируемых функций. // Международный научно- технический симпозиум: Образование через науку. – Бишкек: КНТУ им. И. Раззакова, 2004. – Т.1. – С. 488–493.

[3] *Янно Я.* Регуляризация одного уравнения Вольтера I рода, равносильного уравнению III рода. // Ученные Записки Тартуского Государственного Университета. – 1987. – В.762. – С. 16–30.

[4] *Асанов А., Ободоева Г.С.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра III рода. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим. – 1984. – В.25. – С. 65–74.

References

[1] *Magnitskiy K.A.* Lineinye integral'nye uravneniya Vol'terra I i III roda. // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. – 1979. – V.19. – N4. – S. 970–989.

[2] *Asanov A., Tagaev S.B.* Regulyarizatsiya i edinstvennost' resheniy lineinykh integral'nekh uravneniy Vol'terra III roda v prostranstve summiruemykh funktsiy. // Mezhdunarodnyy naychno-tekhnicheskiy simpozium: Obrazovanie cherez nauku. – Bishkek: KNTU im. I. Razzakova, 2004. – V.1. – S. 488–493.

[3] *Yanno Ya.* Regulyarizatsiya odnogo uravnenya Vol'terra I roda, ravnosil'nogo uravneniyu III roda. // Uchenye Zapiski Tartuskogo Gosudarstvennogo Universiteta. – 1987. – V.762. – S. 16–30.

[4] *Asanov A., Obodoeva G.S.* Regulyarizatsiya i edinstvennost' resheniy lineinykh integral'nykh uravneniy Vol'terra III roda. // Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam. – Bishkek: Ilim. – 1984. – V.25. – S. 65–74.

Поступила в редакцию 20 сентября 2013 года