УДК 517.938

С.А. Айсагалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы;
E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Исследование абсолютной устойчивости регулируемых систем*

Получено новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в основном случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости позволяет получить область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы шире, нежели известные методы. С целью показать эффективность предлагаемого метода в виде примера приведена система третьего порядка, для которой проблема Айзермана имеет положительное решение.

Примечательно то, что неособым преобразованием уравнения движения системы приводятся к специальному виду, которое позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой, приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое - полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции в конечном счете приводит к легко проверяемым условиям абсолютной устойчивости.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входного и выходного переменных нелинейного элемента. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейной части системы для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удается получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.

Для системы с ограниченными ресурсами фазовые переменные ограничены и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при оценке несобственных интегралов и асимптотического свойства решения системы. Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости позволяет получить более широкую область абсолютной устойчивости в пространстве параметров системы, нежели известные критерии.

Ключевые слова: Абсолютная устойчивость, априорные оценки, несобственные интегралы, неособое преобразование, свойства решений.

S.A. Aisagaliev

The study of absolute stability for regulated systems

The new effective condition for the absolute stability of the equilibrium position nonlinear regulated systems in the base case by estimating nonintrinsic integrals along solutions of the system is obtained. The developed method for research of absolute stability allows to obtain an absolute stability area in the system's parameters space which is wider than the area obtained by the known methods. To demonstrate the effectiveness of the developed

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 1050 / ГФ2.

method the system of the third order for which there exists a positive solution of problem Yzerman is considered as an example.
It is noteworthy that the equations of motion of the system is reduced by the non-singular transformation to a special form which allows of representing of the integrant as a sum of two terms. The first term is a quadratic form transformed to the diagonal form, and the second one is the total differential with respect to the time. Such a representation of the integrand in the end leads to an easily verifiable conditions for absolute stability.
The distinctive feature of the developed approach is to obtain the identities along the solutions of the system relative to the input and output variables of the nonlinear element. These identities allow the use of information about the properties of the nonlinear part of the system for estimation of nonintrinsic integrals. With this approach to the study of absolute stability regulated systems can be obtained additional relations between the state variables, which provides to obtain a more effective conditions for absolute stability.
For the systems with restricted resources the state variables are constrained and uniformly continuous functions. These properties are used in estimating of nonintrinsic integrals and asymptotic properties of solutions of the system. The developed method allows to obtain more wider area of absolute stability in the parameter space of the system than the known criteria.
Key words: Absolute stability, apriori estimates, nonintrinsic integrals, non - singular transformation, properties of the solutions.

С.Ә. Айсағалиев

Реттелінетін жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеу

Меншікті емес интегралды жүйе шешімінің бойымен бағалау жолымен сызықтық емес реттелетін жүйелердің негізгі жағдайдағы абсолюттік орнықтылығы қалпының жаңа тиімді шарты алынған. Абсолюттік орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісі жүйе параметрлері кеңістігінде белгілі әдістерге қарағанда кеңірек абсолюттік орнықтылық аймағын алуға мүмкіндік береді. Мысал ретінде, ұсынылған әдістің тімділігін көрсету мақсатында, Айзерман проблемасы оң шешім қабылдайтын үшінші ретті жүйе келтірілген.
Жүйенің қозғалыс теңдеуін ерекше емес түрлендіру көмегімен интеграл астындағы функцияның екі қосылғыштың қосындысы түрінде арнайы түрге келтіруге мүмкіндік беретіні қызықты. Бірінші қосылғыш - диагонал түрге келтірілген квадраттық форма, ал екінші қосылғыш - функцияның уақыт бойынша толық дифференциалы болып табылады. Интеграласты функцияның мұндай бейнеленуі ақыр соңында абсолюттік орнықтылықтың оңай тексерілетін шарттарына алып келеді.
Ұсынылған жолдың айрықша ерекшелігі болып жүйе шешімдері бойында сызықтық емес элементтің енгізілетін және алынатын айнымаларына қатысты тепе-теңдіктер алу табылады. Бұл тепе-теңдіктер жүйенің сызықтық емес бөлігінің қасиеттері туралы мәліметтерді меншікті емес интегралдарды бағалау үшін қолдануға мүмкіндік береді. Реттелетін жүйелердің абсолюттік орнықтылығын зерттеудің осы жолымен фазалық айнымалыларды байланыстыратын және тиімдірек абсолюттік орнықтылық шарттарын алуға мүмкіндік беретін қосымша қатынастар алуға болады.
Ресурстары шектеулі жүйелер үшін фазалық айнымалылар да шектелген және теңмөлшерлі үздіксіз функциялар болып табылады. Бұл қасиеттер жүйе шешімінің меншікті емес интегралдары мен асимптотикалық қасиетін бағалағанда қолданылды. Абсолюттік орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісі жүйе параметрлері кеңістігінде белгілі критерийлерге қарағанда кеңірек абсолюттік орнықтылық аймағын алуға

мүмкіндік береді.
Түйін сөздер: Абсолюттік орнықтылық, априорлық бағалар, меншікті емес интегралдар, ерекше емес түрлендірулер, шешімдер қасиеттері.

Введение. Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критических случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии [1-4]. Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье [2], метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А.Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье сводится к разрешимости матричных неравенств. Естественно, для решения прикладных задач такой подход довольно сложен.

Частотное условие абсолютной устойчивости В.М. Попова является необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств А.И. Лурье, более того, для одномерных систем частотные условия допускают геометрическую интерпретацию, что позволяет легко проверить разрешимость матричных неравенств при фиксированных значениях конструктивных параметров системы. Однако для многомерных систем частотные условия не имеют геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных, и их проверка в этих случаях является достаточно сложной задачей. Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [5,6].

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему [7]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \le \mu \le \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \le \varphi(\sigma)\sigma \le \mu_0\sigma^2,\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом.

Проблема Айзермана была решена для системы второго порядка Малкиным И.Г., Еругиным Н.П., Красовским Н.Н.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема [8]:

Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \le \mu \le \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_2 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1)/0 \le \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \le \mu_0,\ \ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом.

Проблема Калмана имеет положительные решение при $n = 2$. Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$.

В работе [9] предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах [10-13] приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований. С целью показать эффективность предлагаемого метода в виде примера приведена система третьего порядка, для которой проблема Айзермана имеет положительное решение.

1. Постановка задачи

Уравнение движения регулируемых систем в основном случае имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \;\; \sigma = Sx, \;\; x(0) = x_0, \;\; t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

– где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n, n \times 1, 1 \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0, j = \overline{1,n}, \lambda_j(A), j = \overline{1,n}$ – собственные значения матрицы A.

Нелинейная система автоматического управления с уравнением (1) называется системой с ограниченным ресурсом, если функция

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \le \varphi(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \\ \forall\sigma, \;\; \sigma \in R^1, \;\; \varphi(0) = 0, \;\; |\varphi(\sigma)| \le \varphi_*, \; 0 < \varphi_* < \infty, \; \forall\sigma, \; \sigma \in R^1\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами. Поскольку величина φ_*, $0 < \varphi_* < \infty$ – достаточно большое число, то включение (2) содержит все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений:

$$Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0, \quad \sigma_* = Sx_*.$$

Так как A - гурвицева матрица, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = -SA^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, где $\varphi(0) = 0$ только при $\sigma = 0$. Отсюда следует, что система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0, \sigma_* = 0)$, если $SA^{-1}B \neq 0$.

Положение равновесия $x_* = 0$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы A, $A + B\mu S$, $0 < \mu < \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ – гурвицевы; 2) для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение системы (1) обладает свойством $x(t; 0, x_0, \varphi_j) \to 0$ при $t \to \infty$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Элементы матриц A, B, S и величина μ_0 называются конструктивными параметрами системы автоматического управления. Условием абсолютной устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы, при выполнении которых положение равновесия $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: найти новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия $x_* = 0$ системы (1), (2), которое позволяет в пространстве конструктивных параметров системы выделить область шире, чем известные критерии.

2. Неособое преобразование

Для простоты проверки предлагаемого условия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1).

Характеристический полином матрицы A имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + a_1\lambda + a_0,$$

где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, a_i, $i = \overline{0, n-1}$ известные числа. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A) = 0$. Тогда

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - ... - a_1 A - a_0 I_n.$$

Лемма 1 *Пусть вектор-строка $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ такая, что:*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0,\ \theta A^2 B = 0, \dots, \theta A^{n-2}B = 0,\ \theta A^{n-1}B \neq 0. \quad (3)$$

Тогда уравнение движения системы (1) может быть представлено в виде:

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3, \dots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1}y_n + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{gathered} \quad (4)$$

где $y_1 = \theta x, y_2 = \theta Ax, \dots, y_n = \theta A^{n-1}x,\ x = x(t),\ y_i = y_i(t),\ t \in I,\ i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение из (1). Умножая слева на θ, имеем

$$\theta\dot{x} = \theta Ax + \theta B\varphi(\sigma) = \theta Ax,\ \theta x(0) = \theta x_0,\ t \in I, \quad (5)$$

в силу равенства $\theta B = 0$, где $\theta x = \theta x(t) = y_1(t),\ \theta Ax(t) = y_2(t), t \in I$.

Дифференцируя по t тождество (5), получим

$$\theta\ddot{x} = \theta A\dot{x} = \dot{y}_2 = \theta A[Ax + B\varphi(\sigma)] = \theta A^2 x = y_3,\ y_2(0) = \theta Ax_0,$$

где $\theta AB = 0$. Аналогичным путем получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{y}_3 = \theta\dddot{x} = \theta A^2\dot{x} = \theta A^3 x = y_4,\ y_3(0) = \theta A^2 x_0, \dots, \\ \dot{y}_{n-1} = \theta A^{n-2}\dot{x} = \theta A^{n-1}x = y_n,\ \dot{y}_n = \theta A^{n-1}\dot{x} = \theta A^n x + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma) = \\ = \theta(-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_1 A - a_0 I_n)x + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma) = \\ = -a_{n-1}y_n - \dots - a_0 y_1 + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{gathered}$$

где $y_n(0) = \theta A^{n-1}x_0,\ t \in I$. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \dots, A^{n-1*}\theta^*\| \quad (6)$$

порядка $n \times n$ равен n. Тогда:

1. *Существует вектор-строка $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ такая, что*

$$\sigma = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n; \quad (7)$$

2. *Если $y_1 = \theta x = 0$, $y_2 = \theta Ax = 0, \dots, y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0$.*

Доказательство. Заметим, что ранг $R = n$ тогда и только тогда, когда векторы $\theta^*,\ A^*\theta^*, \dots, A^{n-1*}\theta^*$ – линейно независимы. Поскольку векторы $\theta^*,\ A^*\theta^*, \dots, A^{n-1*}\theta^*$ образуют базис в R^n, то вектор $S^* \in R^n$ может быть представлен однозначно в виде $S^* = \beta_1\theta^* + \beta_2 A^*\theta^* + \dots + \beta_n A^{n-1*}\theta^*$. Тогда

$$\sigma = Sx = \beta_1\theta x + \beta_2\theta Ax + \dots + \beta_n\theta A^{n-1}x = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n.$$

Теперь второе уравнение из (1) запишется в виде (7).

С другой стороны, из (6) следует, что пара (θ^*, A^*) управляема. Из управляемости пары (θ^*, A^*) следует, что равенства $\theta x = 0,\ \theta A x = 0, \ldots, \theta A^{n-1}x = 0$ влекут за собой $x = 0$. Следовательно, из $y_i = 0,\ i = \overline{1,n}$ следует $x = 0$. Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что если выполнены равенства (3) и ранг $R = n$, то система (1) равносильна системе (4), (7). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0,\ i = \overline{1,n}$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Вводя обозначения

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta A^{n-1}B \end{pmatrix}, \quad \overline{S} = (\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

уравнения движения системы (4), (7) представим в виде

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma), \ \ \sigma = \overline{S}y, \ \ \varphi(\sigma) \in \Phi_0. \tag{8}$$

3. Свойства решений

Можно показать, что решения систем (1), (2), а также систем (4), (7), (2) ограничены. Эти свойства решений могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

Теорема 1 *Пусть матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0,\ j = \overline{1,n}$, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и пусть, кроме того, выполнены равенства (3) и ранг $R = n$. Тогда верны оценки:*

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot{x}(t)| \le c_1,\ t \in I, \tag{9}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1},\ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2},\ i = \overline{1,n},\ t \in I, \tag{10}$$

$$|\sigma(t)| \le c_2,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_3,\ \forall t,\ t \in I, \tag{11}$$

где $m_{i1} = const < \infty,\ m_{i2} = const < \infty,\ c_i = const < \infty,\ i = 0, 1, 2, 3.$

Кроме того, функции $x(t),\ y_i(t),\ i = \overline{1,n},\ \sigma(t),\ t \in I$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что $|\varphi(\sigma(t))| \le \varphi_*,\ 0 < \varphi_* < \infty, \forall t,\ t \in I$. Так как матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $a = max_{1\le j\le n} Re\lambda_j(A) < 0$, то $\|e^{At}\| \le ce^{(a+\varepsilon)t}$, $\forall t,\ t \in I,\ c = c(\varepsilon) > 0,\ \varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau,\ t \in I.$

Тогда

$$|x(t)| \le \|e^{At}\|\ |x_0| + \int\limits_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|\ \|B\|\ |\varphi(\sigma(\tau))|d\tau \le$$

$$\le c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\ \|B\|\varphi_* \int\limits_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau}\ d\tau =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} \ + ce^{(a+\varepsilon)t} \ \|B\|\varphi_*[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}] =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_*(-1+e^{(a+\varepsilon)t}) \leq c_0, \ \forall t, \ t \in I,$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \leq 1, \ \forall t, \ t \in I, \ a+\varepsilon < 0$. Отсюда следует ограниченность решения системы (1),(2). Из (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \leq \|A\| \ |x(t)| + \|B\| \ |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1, \ \ \forall t, \ \ t \in I,$$

$$|\sigma(t)| \leq \|S\| \ |x(t)| \leq c_2, \ \ |\dot{\sigma}(t)| \leq \|S\| \ |\dot{x}(t)| \leq c_3, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Итак, доказаны оценки (9) – (11). Из ограниченности $\dot{x}(t), \ \ \dot{\sigma}(t), \ \ t \in I$ следуют их равномерная непрерывность. Так как $y_1 = \theta x, \ y_2 = \theta A x, \ldots, y_n = \theta A^{n-1}x$, то $|y_1| \leq \|\theta\||x| \leq \|\theta\|c_0 = m_{11}, \ |y_2| \leq \|\theta\|\|A\||x| \leq m_{21}, \ldots, |y_n| \leq \|\theta\|\|A^{n-1}\||x| \leq m_{n,1}.$ Из (4) следует $|\dot{y}_i| \leq m_{i2}, \ i = \overline{1,n}, \ t \in I$. Из ограниченности производных $\dot{y}_i(t), \ i = \overline{1,n}, \ t \in I$ следует равномерная непрерывность функций $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$. Теорема доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1,2, величина $\kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0$. Тогда вдоль решения системы (8) верны тождества:*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \cdots + a_{n-1}y_n(t)], \ t \in I, \tag{12}$$

$$\sigma(t) = \beta_1 y_1(t) + \beta_2 y_2(t) + \cdots + \beta_n y_n(t), \ t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_1 y_2(t) + \beta_2 y_3(t) + \cdots + \beta_{n-1}y_n(t) + \beta_n\omega(t), \ t \in I, \tag{14}$$

где $\omega(t) = \dot{y}_n(t), \ t \in I$.

Доказательство. Если величина $\kappa = \theta A^{n-1}B_1 \neq 0$, то из тождества (4) следует равенство (12) для любого $t \in I$. Тождества (13), (14) следуют из (7), где $\omega(t) = \dot{y}_n(t)$, $t \in I$. Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой постоянной матрицы Q порядка $(n+1)\times(n+1)$ квадратичная форма $z^*(t)Qz(t)$, $z(t) = (\omega(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))$, представима в виде*

$$\begin{aligned} z^*(t)Qz(t) = Q_0\omega^2(t) + Q_1 y_1^2 + \ldots + Q_n y_n^2(t) + \\ + \frac{d}{dt}[y^*(t)Fy(t)], \ \ t \in (0,\infty), \end{aligned} \tag{15}$$

где F – постоянная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что:

$$\omega(t)y_1(t) = \dot{y}_n(t)y_1(t) = \frac{d}{dt}(y_n y_1) - y_n\dot{y}_1 = \frac{d}{dt}(y_n y_1) - y_n y_2 =$$

$$= \frac{d}{dt}(y_n y_1 - y_{n-1}y_2 + y_{n-2}y_3) - y_{n-2}y_4 = \ldots;$$

$$\omega(t)y_2(t) = \dot{y}_n(t)y_2(t) = \frac{d}{dt}(y_n y_2) - y_n y_3 = \frac{d}{dt}(y_n y_2 -$$

$$-y_{n-1}y_3 + y_{n-2}y_4) - y_{n-2}y_5 = \ldots;$$

$$\omega(t)y_n(t) = \dot{y}_n(t)y_n(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_n y_2)^2; \;\; y_1(t)y_3(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2 \ldots; \; y_1(t)y_n(t) = y_1(t)\dot{y}_{n-1}(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}(y_1y_{n-1}) - y_2y_{n-1} = \ldots; \; y_2(t)y_3(t) = y_2\dot{y}_2(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_2)^2, \ldots.$$

В частности, при $n = 3$ имеем:

$$\omega y_1 = \frac{d}{dt}(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2); \;\; \omega y_2 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_3^2; \;\; \omega y_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_3^2);$$

$$y_1y_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_1^2); \;\; y_1y_3 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2; \;\; y_2y_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_2^2);$$

при $n = 4$ имеем:

$$\omega y_1 = \frac{d}{dt}(y_1y_4 - y_2y_3) + y_3^2; \;\; \omega y_2 = \frac{d}{dt}(y_2y_4 - \frac{1}{2}y_3^2);$$

$$\omega y_3 = \frac{d}{dt}(y_3y_4) - y_4^2; \;\; \omega y_4 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_4^2); \;\; y_1y_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_1^2);$$

$$y_1y_3 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2; \;\; y_1y_4 = \frac{d}{dt}(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2;$$

$$y_2y_4 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_3^2; \;\; y_3y_4 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_3^2).$$

Поскольку квадратичная форма $z^*(t)Q(t)z(t)$ содержит слагаемые с постоянными коэффициентами произведения компонентов вектора $z(t)$, то верно представление вида (15). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^\infty z^*(t)Qz(t)dt = \int\limits_0^\infty [Q_0\omega^2(t) + Q_1y_1^2 + \ldots + Q_ny_n^2(t)]dt + l_0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} l_0 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)Fy(t)]dt = y^*(\infty)Fy(\infty) - \\ -y^*(0)Fy(0) = y^*(t)Fy(t)\Big|_0^\infty, \;\; |l_0| < \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Интегрируя тождество (15) с учетом оценки (10), где $|y_i(0)| \leq m_{i1}$, $|y_i(\infty)| \leq m_{i1}$, $i = \overline{1,n}$ получим соотношения (16), (17).

Лемма 6 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) вектор функция $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $t \in I = [0, \infty)$ *ограничена* $|y(t)| \le a$, $t \in [0, \infty)$ *и непрерывно дифференцируема и* $|\dot{y}(t)| < c$, $\forall t$, $t \in [0, \infty)$;

2) скалярная непрерывная функция $V(x) > 0$ *при любом* $x \in R^n$, $x \neq 0$, $V(0) = 0$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Предположим противное т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ такая, что $|y(t_k)| \ge \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \ge m > 0$. Поскольку $y(t)$, $t \in [0, \infty)$ непрерывно дифференцируема и $|\dot{y}(t)| < c$, $\forall t$, $t \in [0, \infty)$, то $|y(t) - y(t_k)| \le c|t - t_k|$, $t \in [t_k - \frac{m}{2}, t_k + \frac{m}{2}]$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty V(y(t))dt \ge \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k - \frac{m}{2}}^{t_k + \frac{m}{2}} V(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \ge |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \ge \varepsilon - c\dfrac{m}{2} = \varepsilon_0 > 0$.

Поскольку

$$\int\limits_{t_k - \frac{m}{2}}^{t_k + \frac{m}{2}} V(y(t))dt \ge V_{\min} \cdot m, \quad V_{\min} = \min_{\varepsilon_0 \le |x| \le a} V(x),$$

то

$$\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = \infty.$$

Это противоречит третьему условию леммы. Лемма доказана.

4. Несобственные интегралы

На основе тождеств (12)-(14), оценки (9)-(11) с учетом включения (15)-(17) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (8).

Теорема 2 *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица* A *– гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой величины* τ, *вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 = \int\limits_0^\infty [\varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty [N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \dots + N_n y_n^2(t)]dt + \\ + l_1 = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau d\sigma = \bar{c}_1, \ \ |\bar{c}_1| < \infty, \end{aligned} \tag{18}$$

$$l_1 = y^*(t)F_1y(t)\Big|_0^\infty = y^*(0)F_1y(\infty) - y^*(0)F_1y(0), \quad |l_1| < \infty, \tag{19}$$

где $N_i = N_i(\tau),\ i = \overline{0,n},\ F_1$ *– постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Доказательство. Произведение $\varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t) = \kappa^{-1}[\omega(t)+a_0y_1(t)+\cdots+a_{n-1}y_n(t)]\tau\times$ $\times[\beta_1y_2(t)+\beta_2y_3(t)+\cdots+\beta_{n-1}y_n(t)+\beta_n\omega(t)]=z^*(t)Nz(t)$, $t \in I$ где $z(t)=(\omega(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))$ Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^\infty z^*(t)Nz(t)dt = \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma(t)}dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau d\sigma = \bar{c}_1, \quad |\bar{c}_1| < \infty,$$

в силу ограниченности $\sigma(t),\ t \in I$, где N – постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$. Как следует из леммы 4 ($Q = N$), верно равенство

$$z^*(t)Nz(t) = N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + \ldots + N_ny_n^2(t) + \frac{d}{dt}[y^*(t)F_1y(t)], \ \ t \in I.$$

Теперь соотношения (18), (19) следуют из (16), (17), где

$$l_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)F_1y(t)]dt = y^*(t)F_1y(t)\Big|_0^\infty, \ \ |l_1| < \infty,$$

в силу ограниченности $\sigma(0)$ и $\sigma(\infty)$. Теорема доказана.

Лемма 7 *Пусть выполнены условия теоремы 2, величина* $\tau = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \omega^2(t)dt = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2(t) - \ldots - \frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}y_n^2(t)\right]dt + \bar{c}_0, \tag{20}$$

$$\bar{c}_0 = \Sigma_0^{-1}(c_{11} - l_{11}), \ \ |\bar{c}_0| < \infty, \ \ |c_{11}| < \infty, \ \ |l_{11}| < \infty, \tag{21}$$

где $\varphi(\sigma(t)\dot{\sigma}(t)) = z(t)\Sigma z(t) = \Sigma_0\omega^2(t) + \ldots + \Sigma_ny_n^2 + \dfrac{d}{dt}[y^*(t)F_0y(t)]$, $l_{11} = y^*(t)F_0y_1(t)\Big|_0^\infty$, $c_{11} = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)d\sigma$, $\Sigma_0 \neq 0$.

Доказательство. Как следует из теоремы 2 при $\tau = 1$, несобственный интеграл

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty [\Sigma_0\omega^2(t) + \Sigma_1y_1^2(t) + \cdots + \Sigma_ny_n^2(t)]dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*F_0y(t)]dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau d\sigma = c_{11}, \quad |c_{11}| < \infty,$$

где $l_{11} = y^*F_0y(t)\big|_0^\infty$, $|l_{11}| < \infty$. Отсюда при $\Sigma_0 \neq 0$, $\bar{c}_0 = \Sigma_0^{-1}(c_{11} - l_{11})$ получим равенства (20), (21). Лемма доказана.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$, вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))]dt = \int\limits_0^\infty [M_0\omega^2(t)+ \\ +M_1y_1^2(t) + \dots + M_ny_n^2(t)]dt + l_2 \geq 0, \tag{22}$$

$$l_2 = y^*(t)F_2y(t)\big|_0^\infty = y^*(\infty)F_2y(\infty) - y^*(0)F_2y(0), \quad |l_2| < \infty \tag{23}$$

где $M_i = M_i(\tau_1)$, $\tau_1 > 0$, $i = \overline{0,n}$, F_2 – постоянная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0, \ \frac{\sigma}{\varphi(\sigma)} > \mu_0^{-1}, \ \forall\sigma, \ \sigma \in R^1.$$

Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ верно неравенство $\varphi(\sigma)\tau_1\sigma > \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma)$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$. Отсюда следует, что вдоль решения системы (8) выполняется неравенство

$$\varphi(\sigma)\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t)) > 0, \ \sigma(t) \neq 0, \ \forall t, \ t \in I, \tag{24}$$

где

$$\varphi(\sigma)\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t)) = (\omega + a_0y_1 + \dots + a_{n-1}y_n)\kappa^{-1}\tau_1(\beta_1y_1 + \beta_2y_2 + \dots \\ \dots + \beta_ny_n) - \kappa^{-1}\tau_1\mu_0^{-1}\kappa^{-1}(\omega + a_0y_1 + \dots + a_{n-1}y_n)^2 = z^*(t)Mz(t), \ \ t \in I.$$

где M – постоянная матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$. Далее, применяя лемму 4, где $Q = M$, получим

$$z^*(t)Mz(t) = M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \dots + M_ny_n^2(t) + \frac{d}{dt}[y^*F_2y(t)], \ \ t \in I.$$

Теперь соотношения (22), (23) следуют из (16), (17), (24). Теорема доказана.

Лемма 8 *Пусть выполнены условия теоремы 3, величина $\Sigma_0 \neq 0$. Тогда*

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [(M_1 - M_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0})y_1^2(t) + \dots + (M_n - M_0\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0})y_n^2(t)]dt + \overline{c}_2 > 0, \tag{25}$$

$$\overline{c}_2 = M_0\overline{c}_0 + l_2, \ \ |\overline{c}_2| < \infty. \tag{26}$$

Доказательство. Поскольку $\Sigma \neq 0$, то верны равенства (20), (21).
Так как

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [M_0(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2 - \dots - \frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}y_n^2) + M_0\overline{c}_0 + M_1y_1^2 + \dots + M_ny_n^2]dt + l_2 > 0,$$

то верно неравенство (25), где величина c_2 определяется по формуле (26). Лемма доказана.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величин $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_3 = \int\limits_0^\infty [\gamma_0 \omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \dots + \gamma_n y_n(t)]^2 dt = \\ = \int\limits_0^\infty [\Gamma_0 \omega^2(t) + \Gamma_1 y_1^2(t) + \dots + \Gamma_n y_n^2(t)] dt + l_3 \geq 0, \end{gathered} \tag{27}$$

$$l_3 = y^*(t) F_3 y(t)\big|_0^\infty = y^*(\infty) F_3 y(\infty) - y^*(0) F_3 y(0), \quad |l_3| < \infty \tag{28}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $i = \overline{0, n}$, F_3 – постоянная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3, где $[\gamma_0 \omega + \gamma_1 y_1 + \dots \dots + \gamma_n y_n]^2 = z^*(t) \Gamma z(t)$, Γ – постоянная матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$.

Лемма 9 *Пусть выполнены условия теоремы 4, величина $\Sigma_0 \neq 0$. Тогда*

$$I_3 = \int\limits_0^\infty [(\Gamma_1 - \Gamma_0 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}) y_1^2(t) + \dots + (\Gamma_n - \Gamma_0 \frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}) y_n^2(t)] dt + \bar{c}_3 \geq 0, \tag{29}$$

$$\bar{c}_3 = \Gamma_0 \bar{c}_0 + l_3, \quad |\bar{c}_3| < \infty. \tag{30}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 8. Соотношения (29), (30) следуют из (27), (28) и формул (20), (21).

Теорема 5 *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величин $\tau_2, \tau_3, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_4 = \int\limits_0^\infty \{\tau_2 \dot{\sigma}^2(t) + \tau_3[\varphi(\sigma(t))\sigma(t) - \mu_0^{-1} \varphi^2(\sigma(t))] + [\gamma_0 \omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \dots \\ \dots + \gamma_n y_n]^2\} dt = \int\limits_0^\infty [P_0 \omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \dots + P_n y_n^2(t)] dt + l_4, \end{gathered} \tag{31}$$

$$l_4 = y^*(t) F_4 y(t)\big|_0^\infty = y^*(\infty) F_4 y(\infty) - y^*(0) F_4 y(0), \quad |l_4| < \infty, \tag{32}$$

где $P_i = P_i(\tau_2, \tau_3, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $i = \overline{0, n}$, F_4 – постоянная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство теоремы следует из представления $\tau_2 \dot{\sigma}^2(t) + \tau_3[\varphi(\sigma(t))\sigma(t)$ - - $\mu_0^{-1} \varphi^2(\sigma(t))] + [\gamma_0 \omega(t) + \dots + \gamma_n y_n(t)]^2 = z^*(t) P z(t)$, $t \in I$, где P – постоянная матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$. Далее, применяя леммы 4, 5, где $Q = P$, получим (31), (32).

Лемма 10 *Пусть выполнены условия теоремы 5, величина $\Sigma_0 \neq 0$. Тогда*

$$I_4 = \int_0^\infty [(P_1 - P_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0})y_1^2(t) + \ldots + (P_n - P_0\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0})y_n^2(t)]dt + c_4 \geq 0, \tag{33}$$

$$c_4 = P_{00} + l_4, \quad |c_4| < \infty. \tag{34}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 8. Соотношения (33), (34) следуют из (31), (32) и формул (20), (21).

5. Абсолютная устойчивость

На основе результатов, изложенных выше, могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 6 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Матрицы $A, A + B\mu S$, $0 \leq \mu < \overline{\mu}_0$, $\mu_0 \leq \overline{\mu}_0$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$;

2. Существует вектор строка $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ такая, что

$$\theta B = 0, \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0;$$

3. Ранг матрицы $R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{n-1} * \theta^*\|$ равен n;

4. Выполнено равенство $0 \leq I_2 + I_3 = I_1$.

Тогда

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty [(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\omega^2(t) + (M_1 + \Gamma_1 - N_1)y_1^2(t) + \ldots \\ &\ldots + (M_n + \Gamma_n - N_n)y_n^2(t)]dt = l_1 - l_2 - l_3, \\ &|l_1 - l_2 - l_3| < \infty.\end{aligned} \tag{35}$$

Доказательство. При выполнении условий 1) – 3) теоремы верны утверждения теорем 2-4. Как следует из условия 4) теоремы, выполнено равенство $0 \leq I_2 + I_3 = I_1$. Отсюда с учетом равенств (18), (22), (27) имеем

$$\int_0^\infty [M_0\omega^2 + M_1y_1^2 + \ldots + M_ny_n^2]dt + l_2 + \int_0^\infty [\Gamma_0\omega^2 + \Gamma_1y_1^2 + \ldots + \Gamma_ny_n^2]dt + l_3 =$$

$$= \int_0^\infty [N_0\omega^2 + N_1y_1^2 + \ldots + N_ny_n^2]dt + l_1.$$

Тогда

$$\int_0^\infty [(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\omega^2 + (M_1 + \Gamma_1 - N_1)y_1^2 + \ldots + (M_n + \Gamma_n - N_n)y_n^2]dt = l_1 - l_2 - l_3.$$

Поскольку $|l_1 - l_2 - l_3| \leq |l_1| + |l_2| + |l_3|$, где $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$, $|l_3| < \infty$, в силу (19), (23), (28), то $|l_1 - l_2 - l_3| < \infty$. Следовательно, верно равенство (35). Теорема доказана.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 6, и пусть, кроме того:*

$$\begin{aligned}
&(M_1+\Gamma_1-N_1)-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)>0,\\
&(M_2+\Gamma_2-N_2)-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)>0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(M_n+\Gamma_n-N_n)-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)>0,
\end{aligned}\tag{36}$$

где $\Sigma_0\neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 6, то верно соотношение (35). Как следует из леммы 7 (см. (20), (21))

$$\int_0^\infty \omega^2 dt=\int_0^\infty[-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2-\ldots-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}y_n^2]dt+\bar c_0,\ \ |\bar c_0|<\infty.$$

Теперь равенство (35) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty[(M_0+\Gamma_0-N_0)(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2-\ldots-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}y_n^2)]dt+(M_0+\Gamma_0-N_0)\bar c_0+\\
&+\int_0^\infty[(M_1+\Gamma_1-N_1)y_1^2+\ldots+(M_n+\Gamma_n-N_n)y_n^2]dt=l_1-l_2-l_3.
\end{aligned}\tag{37}$$

Тогда (см. (37))

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\{[(M_1+\Gamma_1-N_1)-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)]+\ldots+[(M_n+\Gamma_n-N_n)-\\
&-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)]y_n^2\}dt=l_1-l_2-l_3-(M_0+\Gamma_0-N_0)\bar c_0=l_5,
\end{aligned}\tag{38}$$

где

$$|l_5|=|l_1|+|l_2|+|l_3|+|M_0+\Gamma_0-N_0|\,|\bar c_0|<\infty.\tag{39}$$

Далее, применяя лемму 6 к равенству (38) и с учетом оценки (39), получим $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. В самом деле, вектор функция $y(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))$ вдоль решения системы (8) непрерывно дифференцируема и $|\dot y(t)|<c$, $\forall t\ t\in[0,\infty)$ (см. теорему 1).

Скалярная функция $V(x)=[(M_1+\Gamma_1-N_1)-\frac{\Sigma_0}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)]x_1^2+\ldots+[(M_n+\Gamma_n-N_n)-$ $-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}(M_0+\Gamma_0-N_0)]x_n^2>0$ при любом $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $x\neq 0$, $V(0)=0$, в силу неравенств (36). Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt=l_4<\infty$, $|l_4|<\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. Тогда, согласно утверждению леммы 2, предел $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\varphi)=0$, $\forall\varphi$, $\varphi\in\Phi_0$. Система (8) равносильна (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 8 *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 6 и условия теоремы 5, кроме того, выполнено равенство $I_4 = I_1$. Тогда*

$$\int\limits_0^\infty [(P_0-N_0)\omega^2(t)+(P_1-N_1)y_1^2(t)+\ldots+(P_n-N_n)y_n^2(t)]dt = l_1-l_4,\quad |l_1-l_4|<\infty. \quad (40)$$

Как в доказательстве теоремы 6, можно показать, что из равенства $I_4 = I_1$ следует (40), где $|l_1 - l_4| \leq |l_1| + |l_4| < \infty$.

Заметим, что несобственный интеграл I_4 при $\tau_3 > 0$ может быть представлен в виде

$$I_4 = I_2 + I_3 + \int\limits_0^\infty \tau_2\dot{\sigma}^2(t)dt.$$

Теорема 9 *Пусть выполнены условия теоремы 8, и пусть, кроме того:*

$$P_1 - N_1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0-N_0) > 0, \ldots, P_n - N_n - \frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}(P_0-N_0) > 0, \quad (41)$$

где $\Sigma_0 \neq 0$. Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство теоремы следует из лемм 6, 7 и равенства (40). Легко убедиться в том, что

$$\int\{[(P_1-N_1)-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0-N_0)]y_1^2+\ldots+[(P_n-N_n)-\frac{\Sigma_n}{\Sigma_0}(P_0-N_0)]y_n^2\}dt =$$

$$l_1 - l_4 - (P_0-N_0)\bar{c}_0 = l_6,\quad |l_6| < \infty.$$

Далее, как в доказательстве теоремы 7, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы.

Пример. Пусть уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_1 + x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 1,03x_2 - 0,03x_3 - 0,75\varphi(\sigma),\\ \dot{x}_3 = -0,01x_2 - 1,01x_3 - 0,25\varphi(\sigma),\ \sigma = x_2 + x_3,\end{gathered} \quad (42)$$

где функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 \leq \varphi(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \varphi(0) = 0,\ |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*\}. \quad (43)$$

Для данного примера матрица A, векторы B, S равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1,03 & -0,03 \\ 0 & -0,01 & -1,01 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix},\quad S = (0,\ 1,\ 1),\quad m = 1,\ n = 3.$$

I. Ниже приведены результаты применения теоремы 7.

1) Характеристическое уравнение матрицы A равно

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического полинома больше нуля и 1,04>0,98, то матрица A – гурвицева.

Характеристическое уравнение матрицы $A + B\mu S$ равно

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A - B\mu S| = \lambda^3 + (1,04 + \mu)\lambda^2 + \lambda + (0,98 - 0,5\mu) = 0.$$

Матрица $A + B\mu S-$ гурвицева, если $0 \leq \mu < 1,96$. Тогда $\overline{\mu}_0 = 1,96$.

2) Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда $\theta B = -0,75\theta_2 - 0,25\theta_3 = 0$, если $\theta_3 = -3\theta_2$. Теперь вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, -3\theta_2)$ удовлетворяет условию $\theta B = 0$. Выберем θ_1, θ_2 из условия $\theta AB = 0$. Так как $\theta A = (\theta_1 - 2\theta_2,\ \theta_1 - \theta_2,\ 3\theta_2)$, то $\theta AB = -0,75\theta_1 = 0$. Следовательно, $\theta_1 = 0$. Тогда вектор $\theta = (0, \theta_2, -3\theta_2)$ удовлетворяет условиям $\theta B = 0$, $\theta AB = 0$.

Вычислим $\theta A^2 = (0, -1, -3)\theta_2$, $\theta A^2 B = 1,5\theta_2 \neq 0$. Таким образом, при $\theta_2 = 1$, имеем $\theta = (0, 1, -3)$, $\theta A = (-2, -1, -3)$, $\theta A^2 = (0, -1, -3)$, $\theta A^2 B = 1,5 \neq 0$.

3) Матрица

$$R = (\theta^*, A^*\theta^*, A^{*2}\theta^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \ \ |R| = -12 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы R равен $n = 3$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A) = 0$. Тогда $A^3 = -1,04A^2 - A - 0,98I_3$. Отсюда следует, что $a_0 = -0,98$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1,04$. Тогда уравнение движения (4) имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3,\ \dot{y}_3 = -0,98y_1 - y_2 - 1,04y_3 + \kappa\varphi(\sigma), \tag{44}$$

где $\kappa = 1,5$. Вектор строку S представим в виде $S = \beta_1\theta + \beta_2\theta A + \beta_3\theta A^2$. Отсюда находим $\beta_1 = \frac{1}{3}$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -\frac{2}{3}$. Так как $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $y_3 = \theta A^2 x$, то

$$\sigma = Sx = \beta_1\theta x + \beta_2\theta Ax + \beta_3\theta A^2 x = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3. \tag{45}$$

Уравнения (44), (45) в векторной форме запишутся так

$$\dot{y} = \overline{A}y + \overline{B}\varphi(\sigma),\ \sigma = \overline{S}y, \tag{46}$$

где

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,98 & -1 & -1,04 \end{pmatrix}, \ \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \ \ \overline{S} = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}),$$

$$det(\lambda I_3 - A) = det(\lambda I_3 - \overline{A}) = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98,$$

матрица $\overline{A}$ – гурвицева.

4) Исследуем абсолютную устойчивость положения равновесия системы (44), (45) (либо в векторной форме (46)). Вычислим несобственные интегралы I_1, I_2, I_3 с целью

найти величины M_0, M_1, M_2, M_3, Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3, N_0, N_1, N_2, N_3. Как следует из формул (12)-(14):

$$\varphi(\sigma(t)) = \frac{2}{3}\omega(t) + \frac{1,96}{3}y_1(t) + \frac{2}{3}y_2(t) + \frac{2,08}{3}y_3(t),\ t \in I,$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{2}{3}y_3(t),\ \dot{\sigma}(t) = \frac{1}{3}y_2(t) - \frac{2}{3}\omega(t),\ \omega(t) = \dot{y}_3(t),\ t \in I.$$

Заметим, что:

а) $\omega y_1 = \dot{y}_3 y_1 = \frac{d}{dt}(y_1y_3) - \dot{y}_1 y_3 = \frac{d}{dt}(y_1y_3) - y_2\dot{y}_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2)$,

$$\int\limits_0^\infty \omega y_1 dt = \int\limits_0^\infty [\frac{d}{dt}(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2)]dt;$$

б) $\omega y_2 = \dot{y}_3 y_2 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - \dot{y}_2 y_3 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_3^2$, $\int\limits_0^\infty \omega y_2 dt = \int\limits_0^\infty [\frac{d}{dt}(y_2y_3)]dt - \int\limits_0^\infty y_3^2 dt$;

в) $\omega y_3 = \dot{y}_3 y_3$, $\quad \int\limits_0^\infty \omega y_3 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [\frac{d}{dt}y_3^2]dt$;

г) $y_1 y_2 = y_1 \dot{y}_1$, $\quad \int\limits_0^\infty y_1 y_2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [\frac{d}{dt}y_1^2]dt$;

д) $y_1 y_3 = y_1 \dot{y}_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - \dot{y}_1 y_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2$, $\int\limits_0^\infty y_1 y_3 dt = \int\limits_0^\infty (\frac{d}{dt}y_1y_2)dt - \int\limits_0^\infty y_2^2 dt$;

е) $y_2 y_3 = y_2 \dot{y}_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}y_2^2$, $\quad \int\limits_0^\infty y_2 y_3 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (\frac{d}{dt}y_2^2)dt$.

Аналогичным путем можно построить элементарные преобразования для любого n.

Вычислим I_1. Произведение

$$\varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t) = \tau(\frac{2}{3}\omega + \frac{1,96}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2,08}{3}y_3)(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}\omega),\ \omega = \dot{y}_3.$$

Используя элементарные преобразования а) – е), можно показать, что

$$I_1 = \frac{\tau}{9}\int\limits_0^\infty [-4\omega^2(t) + 2y_2^2(t) + 2y_3^2(t)]dt + \int\limits_0^\infty [\frac{d}{dt}\overline{F}_1(t)]dt, \tag{47}$$

где $y^*(t)F_1y(t) = \overline{F}_1(t) = \frac{\tau}{9}[0,98y_1^2(t) + 3y_2^2(t) - 2,08y_3^2(t) - 3,92y_1(t)y_3(t) + 2y_2(t)y_3(t)]$, $t \in I$. Из (47) следует, что $N_0 = -\frac{4\tau}{9}$, $N_1 = 0$, $N_2 = \frac{2\tau}{9}$, $N_3 = \frac{2\tau}{9}$, $l_1 = y^*(t)F_1y(t)\big|_0^\infty$, $|l_1| < \infty$.

Вычислим I_2. Используя равенства a) – e), получим

$$I_2=\frac{\tau_1}{9}\int\limits_0^\infty[-4\mu_0^{-1}\omega^2(t)+(-3,8416\mu_0^{-1}+1,96)y_1^2+(4,1536\mu_0^{-1}+1,84)y_2^2+ \\ +(3,6736\mu_0^{-1}-4,16)y_3^2(t)]dt+\int\limits_0^\infty[\frac{d}{dt}\overline{F}_2(t)]dt, \tag{48}$$

где

$$y^*F_2y(t)=\overline{F}_2(t)=\frac{\tau_1}{9}[(-3,92\mu_0^{-1}+1)y_1^2+(-0,24\mu_0^{-1}-3)y_2^2+ \\ +(-4,16\mu_0^{-1}-2)y_3^2+(-8,1536\mu_0^{-1}-1,84)y_1y_2+(-7,84\mu_0^{-1}+2)y_1y_3+(-8\mu_0^{-1})y_2y_3], \\ t\in I,\ \ l_2=y^*(t)F_2y_2(t)\big|_0^\infty,\ \ |l_2|<\infty.$$

Из (48) имеем

$$M_0=-\frac{4\mu_0^{-1}\tau_1}{9},\ M_1=\frac{\tau_1(-3,8416\mu_0^{-1}+1,96)}{9}, \\ M_2=\frac{\tau_1(4,1536\mu_0^{-1}+1,84)}{9},\ \ M_3=\frac{\tau_1(3,6736\mu_0^{-1}-4,16)}{9}.$$

Вычислим I_3. Аналогичным путем вычислим значение

$$I_3=\int\limits_0^\infty[\gamma_0^2\omega^2(t)+\gamma_1^2y_1^2(t)+(\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3)y_2^2(t)+ \\ +(\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2)y_3^2(t)]dt+\int\limits_0^\infty[\frac{d}{dt}F_3(t)]dt, \tag{49}$$

где $y^*F_3y(t)=\overline{F}_3(t)=2\gamma_0\gamma_1y_1(t)y_3(t)+2\gamma_0\gamma_2y_2(t)y_3(t)+(\gamma_2\gamma_3-\gamma_0\gamma_1)y_2^2(t)+\gamma_0\gamma_3y_3^2(t)+\gamma_1\gamma_2y_1^2(t)$, $t\in I$, $l_3=y^*(t)F_3y(t)\big|_0^\infty$, $|l_3|<\infty$. Из (49) имеем

$$\Gamma_0=\gamma_0^2,\ \Gamma_1=\gamma_1^2,\ \Gamma_2=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3,\ \Gamma_3=\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2.$$

Из формул (47) при $\tau=1$ имеем (см. (20), (21))

$$I_0=\int\limits_0^\infty\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt=\frac{1}{9}\int\limits_0^\infty[-4\omega^2(t)+2y_2^2(t)+2y_3^2]dt+l_{11}= \\ =\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma\infty}\varphi(\sigma)d\sigma=c_{11},\ \ |c_{11}|<\infty,\ \ l_{11}=y^*(t)F_0y(t)\big|_0^\infty,\ \ |l_{11}|<\infty. \tag{50}$$

где $\Sigma_0=-\dfrac{4}{9}$, $\Sigma_2=\dfrac{2}{9}$, $\Sigma_3=\dfrac{2}{9}$, $\Sigma_1=0$, $F_0=F_1$ при $\tau=1$.

Тогда

$$\int_0^\infty \omega^2(t)dt = \int_0^\infty [\frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2]dt + c_0, \ \ c_0 = -\frac{9}{4}(c_{11} - l_{11}),$$

$$\begin{gathered} I_2 = \int_0^\infty [M_1 y_1^2(t) + (M_2 - M_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0})y_2^2(t) + (M_3 - M_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0})y_3^2(t)]dt + \\ +c_2, \ \ c_2 = M_0 c_0 + l_2, \ \ |c_2| < \infty, \end{gathered} \tag{51}$$

где

$$M_1 = \frac{\tau_1(1,96 - 3,8416\mu_0^{-1})}{9}, \ \ M_2 - M_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0} = \frac{\tau_1(2,1536\mu_0^{-1} + 1,84)}{9},$$

$$M_3 - M_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0} = \frac{\tau_1(1,6736\mu_0^{-1} - 4,16)}{9}.$$

Аналогичным путем, несобственный интеграл I_3 представим в виде (см. лемму 9)

$$\begin{gathered} I_3 = \int_0^\infty [\Gamma_1 y_1^2(t) + (\Gamma_2 - \Gamma_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0})y_2^2(t) + (\Gamma_3 - \Gamma_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0})y_3^2(t)]dt + \\ +c_3, \ \ c_3 = \Gamma_0 c_0 + l_3, \ \ |c_3| < \infty, \end{gathered} \tag{52}$$

где

$$\Gamma_1 = \gamma_1^2, \ \ \Gamma_2 - \Gamma_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0} = \gamma_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_1\gamma_3, \ \ \Gamma_3 - \Gamma_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0} = \gamma_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_0\gamma_2$$

Теперь условия (36) теоремы 7 с учетом (51), (52) запишутся так:

$$M_1 + \Gamma_1 - N_1 > 0: \ \ \frac{\tau_1(1,96 - 3,8416\mu_0^{-1})}{9} + \gamma_1^2 > 0; \tag{53}$$

$$\begin{aligned} & M_2 + \Gamma_2 - N_2 - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0: \\ & \frac{\tau_1(2,1536\mu_0^{-1} + 1,84)}{9} + \gamma_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_1\gamma_3 > 0; \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} & M_3 + \Gamma_3 - N_3 - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0: \\ & \frac{\tau_1(1,6736\mu_0^{-1} - 4,16)}{9} + \gamma_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_0\gamma_2 > 0, \end{aligned} \tag{55}$$

где $N_1 = 0, \ \ -N_2 - \dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(-N_0) = 0, \ \ -N_3 - \dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}(-N_0) = 0.$

Таким образом, условия абсолютной устойчивости определяются неравенствами (53) – (55). Предельное значение $\mu_{0\max}$ определим из условия

$$\begin{aligned} & 1,96\tau_1 - 3,8416\tau_1\mu_0^{-1} = -9\gamma_1^2, \\ & 1,84\tau_1 + 2,1536\mu_0^{-1}\tau_1 = -9\gamma_2^2 - 4,5\gamma_0^2 + 15\gamma_1\gamma_3, \\ & -4,16\tau_1 + 1,6736\mu_0^{-1}\tau_1 = -9\gamma_3^2 - 4,5\gamma_0^2 + 15\gamma_0\gamma_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (56), получим

$$\tau_1 = \frac{-17,2872\gamma_0^2 - 19,3824\gamma_1^2 - 34,5744\gamma_2^2 + 69,1438\gamma_1\gamma_3}{11,2896}, \quad (57)$$

$$\tau_1\mu_0^{-1} = \frac{-8,82\gamma_0^2 - 16,56\gamma_1^2 - 17,64\gamma_2^2 + 35,28\gamma_1\gamma_3}{11,2896}, \quad (58)$$

$$9,5625\gamma_0^2 + \frac{108,3456}{11,2896}\gamma_1^2 + 10,125\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 18\gamma_0\gamma_2 - 20,25\gamma_1\gamma_3 = 0. \quad (59)$$

Из (57) – (59) имеем

$$\mu_0 = \frac{17,2872\gamma_0^2 - 19,3824\gamma_1^2 - 34,5744\gamma_2^2 + 69,1438\gamma_1\gamma_3}{-8,82\gamma_0^2 + 16,56\gamma_1^2 - 17,64\gamma_2^2 + 35,28\gamma_1\gamma_3}. \quad (60)$$

Из (60) при $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1,5714285711428572\gamma_1$, получим $\mu_{0\max} = 1,24$, $\tau_1 = 7,908163265306123\gamma_1^2$.

Такое же значение $\mu_{0\max} = 1,24$ дают известные методы абсолютной устойчивости. Можно показать, что существуют числа $\tau_1 > 0$, γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 такие, что для всех $0 < \mu_0 < \mu_{0\max} = 1,24$ выполнены неравенства (53) – (55).

II. Покажем, что применение теоремы 9 дает более широкую область абсолютной устойчивости положения равновесия системы (42), (43).

Вычислим I_4. Так как

$$\tau_2\int_0^\infty \dot\sigma^2(t)dt = \int_0^\infty \tau_2(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}\omega)^2dt = \frac{\tau_2}{9}\int_0^\infty (4\omega^2 + y_2^2 + 4y_3^2)dt + \frac{4\tau_2}{9}\int_0^\infty \frac{d}{dt}(y_2y_3)dt,$$

то несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_4 = \int_0^\infty \{\tau_2\dot\sigma^2(t) + \tau_3[\varphi(\sigma(t))\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))] + \\ +[\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \gamma_2y_2(t) + \gamma_3y_3(t)]^2\}dt = \\ = \int_0^\infty [P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + P_2y_2^2(t) + P_3y_3^2(t)]dt + l_4, \quad |l_4| < \infty, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$P_0 = \frac{4\tau_2}{9} - \frac{4\mu_0^{-1}\tau_3}{9} + \gamma_0^2, \quad P_1 = \frac{\tau_3(1,96 + 3,8416\mu_0^{-1})}{9} + \gamma_1^2,$$

$$P_2 = \frac{\tau_2}{9} + \frac{\tau_3(4,1536\mu_0^{-1} + 1,84)}{9} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3,$$

$$P_3 = \frac{4\tau_2}{9} + \frac{\tau_3(3,6726\mu_0^{-1} - 4,16)}{9} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2.$$

Из (61), (50) следует (см. лемму 10)

$$I_4 = \int_0^\infty [P_1y_1^2(t) + (P_2 - P_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0})y_2^2(t) + (P_3 - P_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0})y_3^2(t)]dt + c_4,$$

$$c_4 = P_0 c_0 + l_4, \quad |c_4| < \infty,$$

где

$$P_1 = \frac{\tau_3(1,96 - 3,8416\mu_0^{-1})}{9} + \gamma_1^2,$$

$$P_2 - P_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0} = \frac{\tau_3(1,84 + 2,1536\mu_0^{-1})}{9} + \frac{3\tau_2}{9} + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3,$$

$$P_3 - P_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0} = \frac{\tau_3(-4,16 + 1,6736\mu_0^{-1})}{9} + \frac{6\tau_2}{9} + \gamma_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_0\gamma_2.$$

Теперь условия (41) теоремы 9 запишутся так:

$$\frac{\tau_3(1,96 - 3,8416\mu_0^{-1})}{9} + \gamma_1^2 > 0, \tag{62}$$

$$\frac{\tau_3(1,84 + 2,1536\mu_0^{-1})}{9} + \frac{3\tau_2}{9} + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 > 0, \tag{63}$$

$$\frac{\tau_3(-4,16 + 1,6736\mu_0^{-1})}{9} + \frac{6\tau_2}{9} + \gamma_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 - 2\gamma_0\gamma_2 > 0. \tag{64}$$

Предельные значения $\mu_{0\,\max}$ находим из условия

$$1,96\tau_3 - 3,8416\tau_3\mu_0^{-1} + 9\gamma_1^2 = 0, \tag{65}$$

$$1,84\tau_3 + 2,1536\tau_3\mu_0^{-1} + 3\tau_2 + 4,5\gamma_0^2 + 9\gamma_2^2 - 18\gamma_1\gamma_3 = 0, \tag{66}$$

$$-4,16\tau_3 + 1,6736\tau_3\mu_0^{-1} + 6\tau_2 + 4,5\gamma_0^2 + 9\gamma_3^2 - 18\gamma_0\gamma_2 = 0. \tag{67}$$

Из (65) следует, что $\mu_{0\,\max} = 1,96$, $\gamma_1^2 = 0$. Решая систему алгебраических уравнений (66), (67) относительно $\tau_3 > 0$, τ_2 получим

$$\tau_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13,5\gamma_0^2 - 54\gamma_2^2 + 27\gamma_3^2 - 54\gamma_0\gamma_2}{27,55102040816325},$$

$$\tau_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28,10204081632652\gamma_0^2 - 29,75510204081632\gamma_2^2 -}{}$$

$$\frac{-26,448979183672\gamma_3^2 + 52,89795918367344\gamma_0\gamma_2}{27,55102040816325}.$$

Отсюда при $\gamma_0 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $(\gamma_1 = 0)$ имеем $\tau_3 = 0,98\gamma_3^2 > 0$, $\tau_2 = -0,96\gamma_3^2$.

Можно показать, что при всех μ_0, $0 \le \mu_0 < 1,96 = \mu_{0\,\max}$ выполнены неравенства (62) – (64). Например, при $\mu_0 = 1,3$, в частности, существуют числа $\tau_3 = 3,029\gamma_3^2$, $\tau_2 = -0,049\gamma_3^2$, $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$, такие, что

$$a_1 = \tau_3(1,96 - 3,8416\mu_0^{-1}) + 9\gamma_1^2 = 0,017712\gamma_1^2 > 0, \quad \gamma_1 = 0,58\gamma_3;$$

$$a_2 = \tau_3(1,84 + 2,1536\mu_0^{-1}) + 3\tau_2 + 4,5\gamma_0^2 + 9\gamma_2^2 - 18\gamma_1\gamma_3 = 0,015492\gamma_1^2 > 0;$$

$$a_3 = \tau_3(1,6736\mu_0^{-1} - 4,16) + 6\tau_2 + 9\gamma_3^2 + 4,5\gamma_0^2 - 18\gamma_0\gamma_2 = 0,033816\gamma_1^2 > 0;$$

при $\mu_0 = 1,7 : \tau_3 = 30\gamma_1^2$, $\tau_2 = -7\gamma_1^2$, $\gamma_3 = 4\gamma_1$, $a_1 = 0,00705\gamma_1^2$, $a_2 = 0,2047\gamma_1^2 > 0$, $a_3 = 6,735\gamma_1^2 > 0$, $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$;
при $\mu_0 = 1,9 : \tau_3 = 145\gamma_1^2$, $\tau_2 = -81\gamma_1^2$, $\gamma_3 = 10,417\gamma_1$, $a_1 = 0,02526\gamma_1^2$, $a_2 = 0,6477\gamma_1^2 > 0$, $a_3 = 15,086\gamma_1^2 > 0$, $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$;
при $\mu_0 = 1,95 : \tau_3 = 1,113\gamma_3^2$, $\tau_2 = -0,885\gamma_3^2$, $\gamma_i = 0,035\gamma_3$, $a_i > 0$ $i = \overline{1,3}$.

Таким образом, положение равновесия систем (38), (39) абсолютно устойчиво при $0 \le \mu_0 < \mu_{0\max} = 1,96$. Заметим, что матрица $A + B\mu S$ – гурвицева, если $0 \le \mu < 1,96$, $\overline{\mu}_0 = 1,96$. Для данного примера $\overline{\mu}_0 = \mu_{0\max} = 1,96$. Следовательно, проблема Айзермана имеет положительное решение. Иными словами, для систем третьего порядка (42), (43) теорема 9 позволяет выделить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы шире, нежели известные критерии $(1,24 < 1,96)$.

Литература

[1] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолюная устойчивость регулируемых систем. // Издательство АН СССР, 1963. – 240 с.

[2] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.: Гостехиздат, 1951. – 216 с.

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970. – 453 с.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1969. – № 5. – С. 38–48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами. // АН СССР. Автоматика и телемеханика. – 1970. – №12. – С. 83–94.

[7] *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем. // УМН. – 1949. – Т. 4. – № 4. – С. 186–188.

[8] *Kalman R.E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. // Transactions of ASME. – 1957. – V. 79.3. – pp. 553–556.

[9] *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 4. – с. 3–36.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. // Дифференциальные уравнения. Минск-Москва. – 1994. – Т. 30. – № 5. – С.748-757.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университетi, 2000. – 234 с.

[12] *Айсагалиев С.А.* Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. – 216 с.

[13] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory. // Journal Inverse Ill Posed Problems. – 2013. – V. 21. – pp. 159-175.

References

[1] *Aizerman M.A., Gantmakher F.R.* Absolyutnaya ustoichivast' reguliruemykh sistem. // Izdatel'stvo AN SSSR AH CCCP, 1963. – 240 s.

[2] *Lur'e A.I.* Nekotorye nelineinye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. – M.: Gostekhizdat, 1951. – 216 s.

[3] *Popov V.M.* Giperustoichivost' avtomaticheskikh sistem. – M.: Nauka, 1970. – 453 s.

[4] *Gelig A.Kh., Leonov G.A., Yakubovich V.A.* Ustoichivost' nelineinykh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya. – M.: Nauka, 1978. – 400 s.

[5] *Aisagaliev S.A.* Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti vynuzhdennykh dvizheniy v nelineinykh sistemakh. // Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. – 1969. – № 5. – S. 38–48.

[6] *Aisagaliev S.A.* Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti sistemy upravlenia s neskol'kimi nelineinymi elementami. // AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika. – 1970. – № 12. – S. 83–94.

[7] *Aizerman M.A.* Ob odnoi probleme, kasayushcheisya ustoichivosti v "bol'shom" dinamicheskikh sistem. // UMN. – 1949. – T. 4. – № 4. – S. 186–188.

[8] *Kalman R.E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. // Transactions of ASME. – 1957. – V. 79.3. – pp. 553–556.

[9] *Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A.* Algoritmy poiska skrytykh kolebaniy v nelineinykh sistemakh. Problemy Aizermana, Kalmana i tsepi ChUA. // Izvestia RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 2011. – № 4. – s. 3–36.

[10] *Aisagaliev S.A.* K teorii absolyutnoi ustoichivosti reguliruemykh sistem. // Differentsyal'nye uravneniya. Minsk-Moskva. – 1994. – T. 30. – № 5. – C.748-757.

[11] *Aisagaliev S.A.* Teoriya reguliruemykh sistem. – Almaty: Qazaq universiteti, 2000. – 234 s.

[12] *Aisagaliev S.A.* Teoriya ustoichivosti dinamicheskikh sistem. – Almaty: Qazaq universiteti, 2012. – 216 s.

[13] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory. // Journal Inverse Ill Posed Problems. – 2013. – V. 21. – pp. 159-175.