УДК 519.6

Ш.А. Джомартова, К.М. Идрисов, Т.Ж. Мазаков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы;
E-mail: jomartova@mail.ru

Применение интервального анализа к исследованию динамики управляемого снаряда*

Работа посвящена исследованию движения управляемого снаряда, описываемого линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Указанной проблеме посвящены работы многих ученых в области математической теории управления. Следует отметить, что получены эффективные критерии управляемости для линейных систем без ограничения на управление. Предлагаемые критерии управляемости для линейных систем с ограничениями на управление и/или фазовыми ограничениями с точки зрения вычислительной (компьютерной) реализации являются достаточно громоздкими и по существу сводятся к другой математической задаче, имеющей такой же порядок сложности. Первая публикация, посвященная интервальному анализу, сделана Муром Р.Е. в 1966 г. Шокиным Ю.И. в 1981 г. систематически изложены основы и методы интервального анализа. В этих работах рассмотрены интервальные методы решения задач линейной алгебры, методы прогонки для решения дифференциальных уравнений, методы решения систем нелинейных уравнений. В дальнейшем задачам обоснования и различным аспектам применения интервального анализа посвящены многие работы. Основной результат работы - критерий управляемости для линейных систем с ограничением на управление, полученный на основе применения интервального анализа. Эффективность предлагаемого критерия демонстрируется на модельной задаче. Легкость и удобство компьютерной реализации видны из текста программы, написанной на языке Паскаль с подключением библиотеки интервальных вычислений, которая реализована авторами статьи. Для наглядности результаты расчетов демонстрируются в виде графиков траекторий параметров исследуемой системы.

Ключевые слова: интервальный анализ, управление, дифференциальное уравнение, критерий управляемости, управляемый снаряд.

Sh. Jomartova, K. Idirisov, T. Mazakov

The use of interval analysis to the study of dynamics of guided missile

This paper is on the analysis of the guided projectile movement that can be described by ordinary linear differential equations. Many scientists in the field of mathematical control theory study this problem. Note that the effective criteria for controllability of linear systems without control constraints are obtained. Suggested criteria for controllability of linear systems with constraints on the control and/or state constraints in terms of computational implementations are quite bulky and substantially reduced to another mathematical problem that has the same order of complexity. Moore R.E. made the first publication on interval analysis in 1966. Shokin Y.I. in 1981 systematically presented the principles and methods of interval analysis. In these studies, they examined interval methods for solving linear algebra methods sweep for solving differential equations, me-

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 0709 / ГФ2.

thods for solving systems of nonlinear equations. Later a lot of studies and tasks were devoted to various aspects of the application of interval analysis in many papers. Our main result is a criterion for controllability of linear systems with control constraint obtained by applying interval analysis. The effectiveness of the proposed criterion is demonstrated on a model problem. Ease and convenience of the computer implementation is visible from a program written in Pascal with a connection interval arithmetic library, which is implemented by the authors. For clarity, the calculation results are shown in graph form parameters trajectories of the studied system.
Key words: Interval analysis, control, differential equation, controllability criterion, guided projectile.

Ш.А. Джомартова, К.М. Идрисов, Т.Ж. Мазаков

Интервалдық талдауды қолданып басқарылатын снарядтың қозғалысын зерттеуі

Аталмыш жұмыс қарапайым сызықты дифференциалдың теңдеулермен сипатталған басқарылытын снарядтың қозғалысын зеріттеуге негізделген. Бұл мәселеге математикалық басқару теориясы саласында көптеген ғалымдар ғылыми жұмыстарын арнаған. Зерттеу нәтижесі шектеусіз басқарылатын сызықтық жүйелер үшін басқарудың тиімді критерилерін бергендігін атап өткен жөн. Шектеулермен басқарылатын сызықтық жүйелер мен (немесе) фазалық шектеулер үшін ұсынылған басқару критерилері компьютерліук есептеу тұрғысынан қарағанда айтарлықтай күрдел және бұл өз кезегінде күрделілік дәрежесі сондай басқа математикалық есепке алып келеді. Аралықты талдауға арналған алғашқы мақаланы 1966 жылы Мур Р.Е. жариялады. Ал 1981 жылы Шокины Ю.И. бұл талдаудың негізі мен әдістерін жүйелі түрде баяндап берді. Өз еңбектерінде олар, сызықтық алгебра есептерін аралық әдіспен шешу, дифференциалдық теңдеулер үшін қуалау әдістері және сызықтық теңдеулер жүйесін шешу әдістерін қарастырған. Бұдан кейінде, аралық талдауды қолданудың дәлелдеу есептері мен әртүрлі аспектлері көптеген еңбектерде зерттелген. Жұмыстық маңызды нәтижесі - аралық талдауды қолдана отырып алынған шектеумен басқарылатын сызықтық жүйелер үшін басқару критериі болып табылады. Ұсынылып отырған критеридің тиімділігі моделдеу есебінде көрінеді. Компьютердегі есептеудің ыңғайлылығы мен қарапайымдылығын мақала авторларының, аралық есептеулер кітапханасын қосып Паскаль тілінде жазған программаның мәтінінен көруге болады. Есептеулерлің нәтижелері зеріттелніп отырған жүйе параметрлері траекториясының графигі түрінде көрсетілген.

Бұл жұмыс сызықтық жәй дифференциалдық теңдеулермен сипатталып, басқарылатын снарядтың қозғалысын зерттеуге арналған. Жұмыстың негізгі нәтижесі - интервалдық талдауды қолдана отырып табылған басқарымдылық критерийі.
мүмкіндік береді.
Түйін сөздер: интервалдық талдау, басқару, дифференциалдық теңдеу, басқарымдылық критерий, басқарылатын снаряд.

Введение. Интервальный анализ в настоящее время активно развивается во многих странах. Первоначально интервальные методы возникли как средство автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ и впоследствии превратились в один из разделов современной прикладной математики.

Интервальные методы давно вышли за рамки чисто теоретического исследования и достаточно широко применяются на практике с помощью соответствующего программного обеспечения. В результате появились интервальная арифметика, интервальная алгебра, интервальная топология, интервальные методы решения задач вычислительной математики, оптимального управления, устойчивости и т.д.

Математический анализ реальных механических систем дает некоторую погрешность. Это связано с тем, что в действительности параметры механической системы нельзя задать с большей точностью. Любая погрешность, например, в массе, в размерах звеньев и т.п. влияет на характер движения системы, ее устойчивость и прочие важные динамические характеристики.

Таким образом, применение интервального анализа к исследованию динамики управляемого снаряда позволит повысить точность управления.

1. Критерий управляемости

В статье исследуются уравнения управляемого снаряда

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\frac{1}{\gamma}x_2 + \frac{\delta}{\gamma}x_3 + u_1, \quad x(t_0) = x_0, \;\; x(T) = x_1,$$

$$\dot{x}_3 = u_2, \qquad -u_{10} \le u_1 \le u_{10}, \;\; -u_{20} \le u_2 \le u_{20}, \;\; u_{10} > 0, \;\; u_{20} > 0,$$

где $\gamma = 1$ – постоянная переменная снаряда при движении, $\delta = 10$ – эффективность элеронов, u_1, u_2 – сигналы управления.

Рассматриваемая математическая модель динамики управляемого снаряда в общем виде описывается следующей системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t) * x + B(t) * u + f(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ – $n \times n$ - матрица, элементы которой являются непрерывными функциями времени, $B(t)$ – $n \times m$ - матрица, $x(t)$ – n - мерный вектор состояния системы, $f(t)$ – n - мерный вектор непрерывных функций времени, $u(t)$ – m - мерный вектор управляющих воздействий.

На управления даются ограничения

$$-u^i_{\max} \le u_i(t) \le u^i_{\max}, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

Ограничение (2) имеет вполне естественный смысл: любое управляющее воздействие имеет реальное ограничение сверху (т.е. не может быть бесконечным).

Кроме того, считается известным состояние системы в начальный момент времени t_0 (начальное состояние)

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Желаемое состояние в конечный момент времени t_1 может быть описано как фиксированное

$$x(t_1) = x_r \tag{4}$$

при этом, момент времени t_1 фиксирован.

Данную практическую задачу можно формализовать в виде следующей математической задачи: определить существует ли управление, удовлетворяющее ограничению (2) и переводящее систему за фиксированное время $t_1 - t_0$ из начального состояния (3) в конечное заданное состояние, удовлетворяющее ограничениям (4).

Пусть $\Phi(t,\tau) = \theta(t) * \theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t) * x. \tag{5}$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(t,t_0) x_j(t_0) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \Phi_{ij}(t,\tau) \sum_{j=1}^{m} (b_{jl}(\tau) u_{jl}(\tau)) d\tau, \;\; i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Введем обозначения

$$y_{1i} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(t,t_0) x_j(t_0), \;\; i = \overline{1,n}, \qquad y_2 = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) * \overline{\nu} d\tau$$

где все арифметические операции выполняются согласно правилам определенных для интервальных вычислений [1].

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Для того чтобы система (1) – (4) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы вектор принадлежал интервальному вектору* y_2

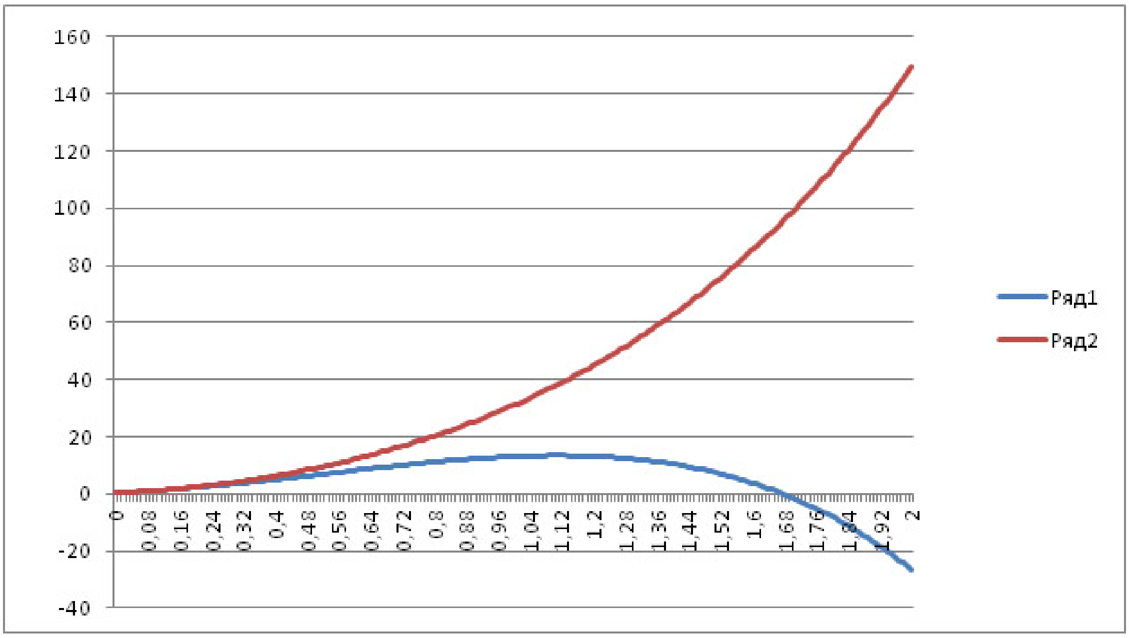

Рисунок 1. Область достижимости по переменной x_1.

2. Программная реализация

```
PROGRAM PRIM;
uses Intr,Dos,Crt;
Const n=3;m=2;
var a:array[1..n,1..n] of Interval;
b:array[1..n,1..n] of Interval;
i,j,k:integer;
x,xn,p1,p2,k1,k2,k3,k4:array[1..n] of Interval;
u:array[1..m] of Interval;
s1,s2,h1,h2,h6,dv:Interval;
u10,u20,gam,del,t0,tk,t,h,c1,c2,pi:Real;
f:text; begin
ClrScr;
assign(f,'Dan3_u.txt'); rewrite(f);
SetIN(2.0,0.0,dv);
gam:=1.0; del:=10.0; t0:=0.0; tk:=3.0; pi:=3.14;
SetIn(0.5,0.0,xn[1]); SetIn(5.0,0.0,xn[2]); SetIn(5.0,0.0,xn[3]);
h:=0.01; SetIn(h,0.0,h1); SetIn(h/2,0.0,h2); SetIn(h/6,0.0,h6);
u10:=pi; u20:=pi;
write(f,'t=',t0:4:2,' x = ');
for i:=1 to n do begin
c1:=LeftIn(xn[i]); c2:=RightIn(xn[i]);
write(f,'[',c1:6:3,',',c2:6:3,'] = '); end;
writeln; writeln(f);
 for i:=1 to n do begin
```

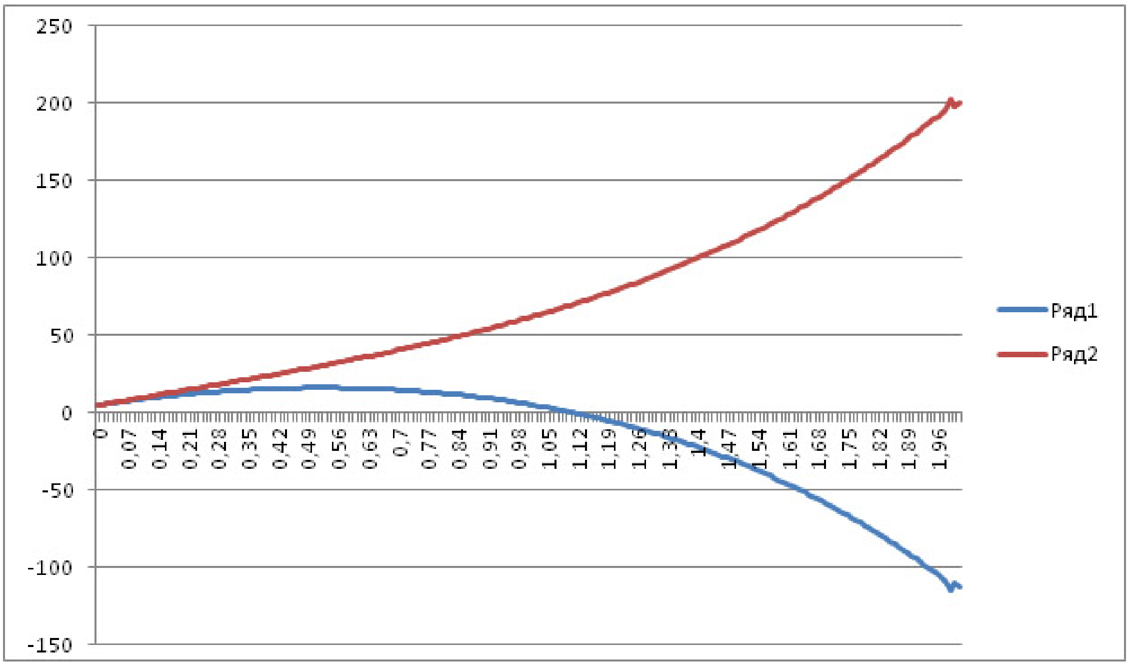

Рисунок 2. Область достижимости по переменной x_2.

```
for j:=1 to n do a[i,j]:=null_int;
for j:=1 to m do b[i,j]:=null_int;
end;
a[1,2]:=odin_p_int; a[2,2].med:=-1.0/gam; a[2,3].med:=del/gam;
b[2,1]:=odin_p_int; b[3,2]:=odin_p_int;
SetIn(0.0,u10,u[1]); SetIn(0.0,u20,u[2]);
t:=t0; x:=xn;
for i:=1 to n do begin s1:=null_int;
for j:=1 to m do begin MultIn(b[i,j],u[j],s2);
AddIn(s1,s2,s1); end;
MultIn(s1,h1,p1[i]); end;
while (t<tk) do begin
for i:=1 to n do begin s1:=null_int;
for j:=1 to n do begin MultIn(a[i,j],x[j],s2);
AddIn(s1,s2,s1); end;
k1[i]:=s1; end;
for i:=1 to n do begin s1:=null_int; for j:=1 to n do begin MultIn(h2,k1[j],s2);
AddIn(x[j],s2,s2);
MultIn(a[i,j],s2,s2); AddIn(s1,s2,s1); end;
k2[i]:=s1; end;
for i:=1 to n do begin s1:=null_int;
for j:=1 to n do begin MultIn(h2,k2[j],s2);
AddIn(x[j],s2,s2);
MultIn(a[i,j],s2,s2); AddIn(s1,s2,s1); end;
k3[i]:=s1; end;
for i:=1 to n do begin s1:=null_int;
for j:=1 to n do begin MultIn(h1,k3[j],s2);
AddIn(x[j],s2,s2);
MultIn(a[i,j],s2,s2); AddIn(s1,s2,s1); end;
k4[i]:=s1; end;
for i:=1 to n do begin AddIn(k1[i],k4[i],s1);
AddIn(k2[i],k3[i],s2);
MultIn(s2,dv,s2); AddIn(s1,s2,s2);
MultIn(s2,h6,p2[i]); end;
for i:=1 to n do begin AddIn(x[i],p1[i],x[i]);
AddIn(x[i],p2[i],x[i]); end;
t:=t+h; write(f,'t=',t:4:2,' x = ');
for i:=1 to n do begin
c1:=LeftIn(x[i]); c2:=RightIn(x[i]);
write(f,'[',c1:6:3,',',c2:6:3,'] = '); end;
writeln(f);
end; close(f); end.
```

Результаты выполнения программы по переменным $x_1 - x_3$ – отображены на рис. 1-3. Область достижимости заключена между двумя графиками. Например, из рис. 1 видно, что нулевая координата по переменной x_1 достигнута к моменту $1,68$.

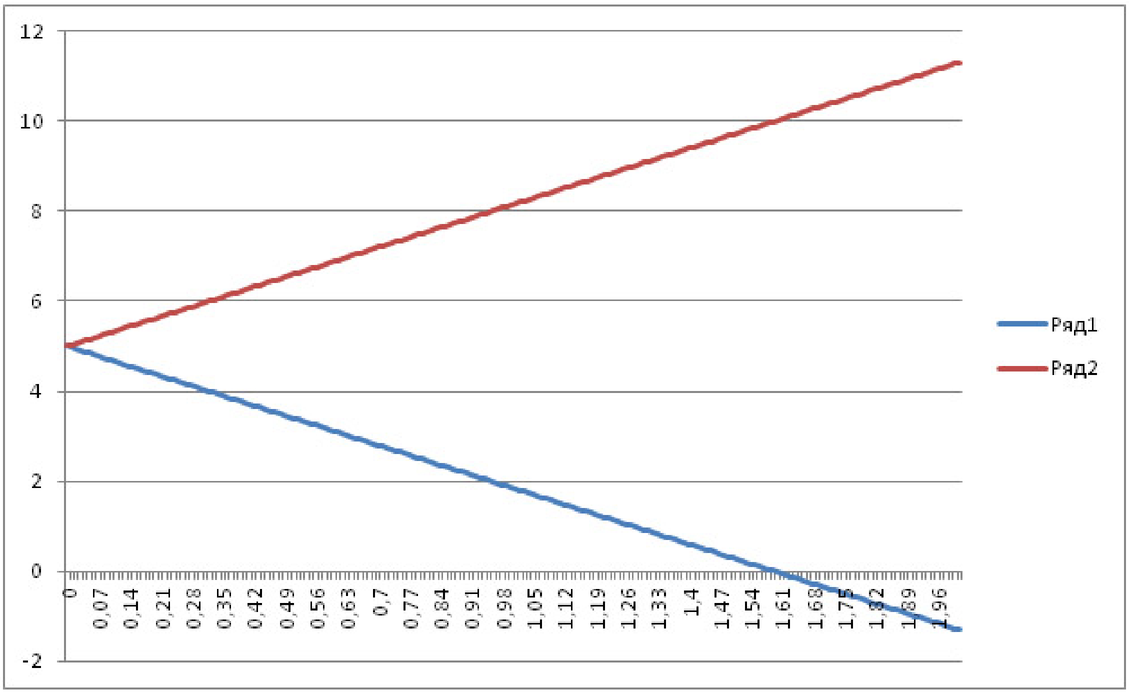

Рисунок 3. Область достижимости по переменной x_3.

Литература

[1] *Алефельд Г., Херцберген Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

[2] *Джомартова Ш.А.* "Практические" интервальные вычисления. // Вестник НАН РК. – 2002. – №2. – С.41–46.

[3] *Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Оспанова М.К.* Библиотека процедур интервальной математики // Материалы 1-й междунар. научно-практ. конф. "Информатизация общества 2004. – С. 160–162.

References

[1] *Alefeld G., Xerbergen U.* Vvedenie v intervalnyj vychisleniy. – M.: Mir, 1987. – 360 s.

[2] *Jomartova Sh.A.* "Practicheskie" intervalnye vychisleniy. // Vestnik NAN RK. – 2002. – №2. – S. 41–46.

[3] *Mazakov T.Zh., Jomartova Sh.A., Ospanova M.K.* Biblioteka prosedur intervalnoy matematiki. // Materialy 1-y Mejdunar. nauchno-prac. confer. "Informatizaciy obshestva 2004. – S. 160-162.