УДК 517.95

Н.А. Есиркегенов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы; E-mail: nurgisa@hotmail.com

Об одной задаче для волнового уравнения с данными на всей границе

В настоящей работе нами предлагаются две новые постановки краевых задач для волнового уравнения в прямоугольной области, в которой краевые условия задаются на всей границе области. Доказывается корректность сформулированных задач в классическом и обобщенном смыслах. Для обоснования их корректности необходимо иметь эффективное представление общего решения задачи. В этом направлении нами получена удобная формула представления общего решения волнового уравнения в прямоугольной области, основанная на классической формуле Даламбера. При этом построенное общее решение уже заведомо удовлетворяет краевым условиям по пространственной переменной. Далее, задавая различные краевые условия по временной переменной, мы получаем некоторые функциональные или функционально-дифференциальные уравнения. Таким образом, доказательство корректности сформулированных задач нами сведено к вопросу существования и единственности решения соответствующего функционального уравнения.
Ключевые слова: Волновое уравнение, корректность задач, классическое решение, сильное решение, формула Даламбера.

N.A. Yessirkegenov

On a problem for the wave equation with data on the whole boundary

In this paper, we propose two new boundary value problems for the wave equation in a rectangular area in which boundary conditions are given on the whole boundary. We prove the correctness of boundary value problems in the classical and generalized sense. In order to show the correctness of these problems, It is necessary to be an effective representation of the general solution of the problem. In this direction obtained a convenient representation of the general solution for the wave equation in a rectangular region based on classical formula of D'Alembert . The constructed general solution automatically satisfies the boundary conditions by the spatial variable. Further, assigning different boundary conditions for temporary variable, we get some functional or functional-differential equations. Thus, the proof of the correctness of the given problems we come to question of the existence and uniqueness of solutions to the corresponding functional equations.
Key words: Wave equation, correctness of the problem, classical solution, strong solution, D'Alambert's formula.

Н.А. Есиркегенов

Толқын теңдеуі үшін барлық шекарада берілгендер бойынша есеп жайлы

Бұл жұмыста тіктөрбұрышта барлық шекаралық шарттары оның шекарасында беріл-

гендер бойынша толқын теңдеуі үшін екі жаңа шекаралық есепті ұсынамыз. Осы есептің қисындылығы классикалық және жалпыланған мағынада дәлелденді. Қисындылықты анықтау үшін есептің ықшамды түрде жалпы шешімі керек. Осы бағытта берілген облыста классикалық Даламбер формуласына негізделген толқын теңдеуі үшін ықшамды жалпы шешімі алынды. Құрастырылған жалпы шешім кеңістік айнымалысы бойынша шекаралық шарттарды қанағаттандырады. Уақыт бойынша әртүрлі шекаралық шарттар қойып, біз функционалды не функционалды-дифференциалды теңдеулер аламыз. Сонымен берілген есептің қисындылығының дәлелденуі сәйкес функционалдық теңдеулер жүйесінің шешімі бар және жалғыз болу сұрағына келеді.
Түйін сөздер: Толқын теңдеуі, есептің қисындылығы, классикалық шешім, әлді шешім, Даламбер формуласы.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset R^2$ - прямоугольная область, ограниченная прямыми: $AB : 0 \le x \le a$, $y = 0$, $BC : x = a$, $0 \le y \le \frac{a}{2}$, $CD : 0 \le x \le a, y = \frac{a}{2}$ и $AD : x = 0$, $0 \le y \le \frac{a}{2}$. В области Ω рассмотрим неоднородное волновое уравнение:

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Хорошо известно, что задача Дирихле для волнового уравнения (1) в прямоугольной области не является корректной [1]. Конкретно, в случае нашей области Ω, легко видеть, что однородное уравнение (1) с условиями Дирихле

$$u|_{AB\cup BC\cup AD} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{CD} = 0, \tag{3}$$

имеет счетное число ненулевых решений вида $u_{mn}(x, y) = sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{2n\pi y}{a}, m, n = 1, 2, ...$

Задача Дирихле для волнового уравнения является одной из наиболее сложных моделей математической физики. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механических системах, таких как продольные звуковые колебания в газе, в жидкости, в твердом теле; поперечные колебания в струнах и т.п. Компоненты электромагнитных векторов и потенциалов, и, следовательно, многие электромагнитные явления (от квазистатики до оптики) в той или иной мере объясняются свойствами решений волнового уравнения.

Впервые неединственность решения задачи Дирихле для волнового уравнения была отмечена в работах Ж. Адамара [2], А. Губера [3]. В своей работе Д. Боржин и Р. Даффин [4] рассмотрели задачу Дирихле для однородного уравнения (1) в прямоугольнике $\{0 \le t \le T,\ 0 \le x \le X\}$. Используя преобразование Лапласа, они показали, что если число T/X - иррациональное, то имеет место единственность решения задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций с суммируемыми по Лебегу вторыми производными. А в работе [5], когда T/X - является алгебраическим числом степени $n > 2$, получено условие существования и единственности решения задачи Дирихле.

Отметим также, что в последнее время усилился интерес к исследованию классических начально-краевых задач для волнового уравнения в прямоугольных областях в связи с задачами по исследованию оптимизации граничного управления процессами колебаний струны (см., например, [6]-[8]).

2. Представление решения первой начально-краевой задачи

Задача 1. *В области* Ω *найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le a, \tag{4}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le a, \tag{5}$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,\ 0\le y\le \frac{a}{2}. \tag{6}$$

Задача 1 является классической первой начально-краевой задачей.

Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (4) и (5) существует и единственно. Но оно однозначно определяется не во всей области Ω, а только в ее части: $\Omega_1=\{(x,y):(x,y)\in\Omega, y\le x\le a-y\}$. А в области $\Omega\backslash\Omega_1$ решение не определяется однозначно из данных Коши (4), (5). Оно определяется однозначно только с использованием краевых условий рассматриваемых задач.

Пусть $u(x,y)$ - решение Задачи 1. Введем в рассмотрение новую функцию $\widetilde{u}(x,y)$, определенную в области $\widetilde{\Omega}$, которая содержит в себе исходную область Ω: $\widetilde{\Omega}=\{(x,y): 0\le y\le\frac{a}{2}, y-\frac{a}{2}\le x\le\frac{3a}{2}-y\}$.

Функцию $\widetilde{u}(x,y)$ зададим по формуле

$$\tilde{u}(x,y)=\begin{cases}-u(-x,y),\ -\frac{a}{2}\le x\le 0;\\ u(x,y),\ 0\le x\le a;\\ -u(2a-x,y),\ a\le x\le\frac{3a}{2}.\end{cases} \tag{7}$$

Учитывая краевые условия (6) не трудно убедиться в том, что функция $\widetilde{u}(x,y)$ будет непрерывной и непрерывно дифференцируемой при переходе линий $x=0$ и $x=a$. А так как функция $u(x,y)$ является гладкой в области Ω, то функция $\widetilde{u}(x,y)$ будет гладкой в области $\widetilde{\Omega}$.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет в области $\widetilde{\Omega}$ функция $\widetilde{u}(x,y)$. Не трудно убедится непосредственным вычислением в том, что эта функция удовлетворяет в области $\widetilde{\Omega}$ неоднородному волновому уравнению

$$\widetilde{u}_{xx}-\widetilde{u}_{yy}=\widetilde{f}(x,y), \tag{8}$$

где

$$\widetilde{f}(x,y)=\begin{cases}-f(-x,y),\ -\frac{a}{2}\le x\le 0;\\ f(x,y),\ 0\le x\le a;\\ -f(2a-x,y),\ a\le x\le\frac{3a}{2}.\end{cases} \tag{9}$$

Из начальных условий (4) и (5) с учетом (7) получаем начальные условия для функции $\widetilde{u}(x,y)$ в области $\widetilde{\Omega}$:

$$\widetilde{u}(x,0)=\widetilde{\tau}(x),\ 0\le x\le a, \tag{10}$$

$$\widetilde{u}_y(x,0)=\widetilde{\nu}(x),\ 0\le x\le a, \tag{11}$$

где функции $\widetilde{\tau}(x)$ и $\widetilde{\nu}(x)$ задаются равенствами:

$$\widetilde{\tau}(x)=\begin{cases}-\tau(-x),\ -\frac{a}{2}\le x\le 0;\\ \tau(x),\ 0\le x\le a;\\ -\tau(2a-x),\ a\le x\le \frac{3a}{2}.\end{cases} \tag{12}$$

$$\widetilde{\nu}(x)=\begin{cases}-\nu(-x),\ -\frac{a}{2}\le x\le 0;\\ \nu(x),\ 0\le x\le a;\\ -\nu(2a-x),\ a\le x\le \frac{3a}{2}.\end{cases} \tag{13}$$

В области $\widetilde{\Omega}$ решение задачи Коши (8), (10), (11) существует, единственно и выражается классической формулой Даламбера:

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{\widetilde{\tau}(x+y)+\widetilde{\tau}(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\widetilde{\nu}(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^y\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi\}d\eta. \tag{14}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что функция $\widetilde{u}(x,y)$ удовлетворяет уравнению (8) и начальным условиям (10) и (11).

Покажем теперь, что в силу (12) и (13), а также с учетом (9), функция $\widetilde{u}(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (6) Задачи 1.

Вычисляем

$$\widetilde{u}(0,y)=\frac{\widetilde{\tau}(y)+\widetilde{\tau}(-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{-y}^{y}\widetilde{\nu}(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^y\{\int_{-y+\eta}^{y-\eta}\widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi\}d\eta. \tag{15}$$

В силу (12) легко получить

$$\widetilde{\tau}(y)+\widetilde{\tau}(-y)=\tau(y)-\tau(y)=0. \tag{16}$$

Из (13) простой заменой переменной в интеграле находим

$$\int_{-y}^{y}\widetilde{\nu}(\xi)d\xi=\int_{-y}^{0}\widetilde{\nu}(\xi)d\xi+\int_0^y\widetilde{\nu}(\xi)d\xi=\int_y^0\nu(\xi)d\xi+\int_0^y\nu(\xi)d\xi=0. \tag{17}$$

В третьем слагаемом из (15) делаем очевидные замены переменных. Так как $0\le y-\eta\le\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\le\eta-y\le 0$, то получаем

$$-\int_0^y\{\int_{-y+\eta}^{y-\eta}\widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi\}d\eta=-\int_0^y\{\int_{-y+\eta}^{0}\widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi\}d\eta-\int_0^y\{\int_0^{y-\eta}\widetilde{f}(\xi,\eta)d\xi\}d\eta=$$

$$=-\int_0^y\{\int_{y-\eta}^{0}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta-\int_0^y\{\int_0^{y-\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta=0. \tag{18}$$

Суммируя найденное в (16)-(18), получаем из (15), что $\widetilde{u}(0,y)=0$. То есть первое из краевых условий (6) выполнено.

Аналогично проверяется выполнение второго краевого условия из (6).

Следовательно, формула (14) дает решение Задачи 1. Выпишем ее решение в области Ω через функции f,τ,ν. Для этого в формулу (14) подставим значение $\widetilde{f},\widetilde{\tau},\widetilde{\nu}$, выражаемые по формулам (9),(12) и (13).

Введем обозначения: $\Omega_1=\{(x,y):(x,y)\in\Omega, y<x<a-y\}$, $\Omega_2=\{(x,y):(x,y)\in\Omega, x<y\}$ и $\Omega_3=\{(x,y):(x,y)\in\Omega, x+y>a\}$.

Тогда непосредственным вычислением получаем представления решения Задачи 1.

В области Ω_2 :

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{\tau(x+y)-\tau(y-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{y-x}^{x+y}\nu(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^{y-x}\{\int_{y-x-\eta}^{x+y-\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{y-x}^{y}\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta. \tag{19}$$

В области Ω_1 :

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_0^{y}\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta. \tag{20}$$

В области Ω_3 :

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{\tau(x-y)-\tau(2a-x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{2a-x-y}\nu(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{x+y-a}\{\int_{x-y+\eta}^{2a-x-y+\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta-\frac{1}{2}\int_{x+y-a}^{y}\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta. \tag{21}$$

3. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть точка E - середина отрезка CD : $E=(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

Задача 2. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условиям на границе CD:*

$$u|_{CE}=0, \tag{22}$$

$$u_y|_{ED}=0. \tag{23}$$

Наряду с Задачей 2, рассмотрим следующую Задачу 3:

Задача 3. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условиям на границе CD:*

$$u_y|_{CE}=0, \tag{24}$$

$$u|_{ED}=0. \tag{25}$$

Как обычно, функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* Задачи 2 (Задачи 3), если существует последовательность функций $u_n \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Теорема 1. *а) Классическое решение задачи (1), (2), (22) и (23) существует, единственно, принадлежит классу $u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ и устойчиво по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$ для функции $f \in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей необходимому условию согласования:*

$$f(a, \frac{a}{2}) = 0. \tag{26}$$

б) Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1), (2), (22) и (23) имеет единственное сильное решение. Это решение принадлежит классу $u \in W_2^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{27}$$

Теорема 2. *а) Классическое решение задачи (1), (2), (24) и (25) существует, единственно, принадлежит классу $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и устойчиво по норме пространства $C^1(\bar{\Omega})$ для функции $f \in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей необходимому условию согласования:*

$$f(0, \frac{a}{2}) = 0. \tag{28}$$

б) Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1), (2), (24) и (25) имеет единственное сильное решение. Это решение принадлежит классу $u \in W_2^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{29}$$

Доказательство приведем только для теоремы 1. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично.

а) Учитывая из (2), что $u|_{AB} = \tau(x) = 0$, подставим представление решения (19) в краевое условие (23). Тогда:

$$\frac{1}{2}[\nu(x + \frac{a}{2}) - \nu(\frac{a}{2} - x)] + F_{1y}^{'}(x, \frac{a}{2}) = 0, \ 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \tag{30}$$

где

$$F_1(x, y) = -\frac{1}{2}\int_0^{y-x}\{\int_{y-x-\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta)d\xi\}d\eta - \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y}\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta)d\xi\}d\eta.$$

Теперь подставим представление решения (21) в краевое условие (22). Тогда:

$$\frac{1}{2}\int_{x-\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}-x} \nu(\xi)d\xi + F_2(x, \frac{a}{2}) = 0, \ \frac{a}{2} \leq x \leq a,$$

где

$$F_2(x,y) = -\frac{1}{2}\int_0^{x+y-a}\{\int_{x-y+\eta}^{2a-x-y+\eta} f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta - \frac{1}{2}\int_{x+y-a}^{y}\{\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi,\eta)d\xi\}d\eta.$$

Для $\frac{a}{2} \le x \le a$ делаем замену $x = a - t$, $0 \le t \le \frac{a}{2}$ и получаем

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{a}{2}-t}^{\frac{a}{2}+t} \nu(\xi)d\xi + F_2(a-t,\frac{a}{2}) = 0,\ 0 \le t \le \frac{a}{2},$$

$$\frac{1}{2}[\nu(\frac{a}{2}+t)+\nu(\frac{a}{2}-t)] - F'_{2t}(a-t,\frac{a}{2}) = 0,\ 0 \le t \le \frac{a}{2}. \quad (31)$$

Таким образом, существование и единственность решения задачи (1), (2), (22), (23) эквивалентно существованию и единственности функции $\nu(x) = u_y(x,0)$, удовлетворяющей уравнениям (30) и (31).

Из (30), (31) следует, что существование и единственность функции $\nu(x)$ эквивалентно следующему:

$$detA = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \ne 0.$$

Итак мы доказали существование и единственность задач (1), (2), (22) и (23).

Теперь покажем устойчивость по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$. В силу (26) и из уравнений (30) и (31) получим, что

$$\nu(\frac{a}{2}-0) = \nu(\frac{a}{2}+0), \quad (32)$$

$$\nu_x(\frac{a}{2}-0) = \nu_x(\frac{a}{2}+0). \quad (33)$$

Поэтому решение задачи (1), (2), (22) и (23) устойчиво по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$.

б) Из существования и единственности классического решения задачи (1), (2), (22) и (23) стандартными методами выходит существование единственного сильного решения задачи (1), (2), (22) и (23).

Из представления решения задачи, легко заметить, что сильное решение зависит от $\nu(x)$ и $f(x,y)$. Так как $detA \ne 0$, то из (30) и (31) уравнений видно что, функция $\nu(x)$ зависит только от $f(x,y)$.

Тогда

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_1\|\nu(x)\|_{L_2(\Omega)} + C_2\|f\|_{L_2(\Omega)} = C_1\|A^{-1}f\|_{L_2(\Omega)} + C_2\|f\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le C_3|A^{-1}|\|f\|_{L_2(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Доказательство теоремы 1 закончено.

Литература

[1] *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. – 1902. – Vol. 13. – P. 49–52.

[2] *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles. Les conditions definies en general. Le cas hyperbolique. // Enseignement Math. – 1936. – Vol.35. – P. 5–42.

[3] *Huber A.* Die erste Randwertaufgabe fьr geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$. // Monatshefte fur Mathematik und Physik. – 1932. – Vol.39. – №1. – P. 79–100.

[4] *Bourgin D.G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol.45. – №12. – P. 851–858.

[5] *Сабитов К.Б.* Уравнение математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

[6] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничного управления смещением или упругой силой на одном конце струны за произвольное достаточно большое время // Автомат. и телемех. – 2008. – Т.69. – №3. – С. 7-16.

[7] *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием четности второго рода. // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т.47. – №1. – С. 126–133.

[8] *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием. // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т.48. – №10. – С. 1392–1397.

References

[1] *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. – 1902. – Vol. 13. – P. 49–52.

[2] *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles. Les conditions definies en general. Le cas hyperbolique. // Enseignement Math. – 1936. – Vol.35. – P. 5–42.

[3] *Huber A.* Die erste Randwertaufgabe fьr geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$. // Monatshefte fur Mathematik und Physik. – 1932. – Vol.39. – №1. – P. 79–100.

[4] *Bourgin D.G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol.45. – №12. – P. 851–858. bibitemta05

[5] *Sabitov K.B.* Uravnenie matematicheskoj fiziki. – Moskva: Fizmatlit, 2013. – 352 s.

[6] *Il'in V.A., Moiseev E.I.* Optimizacija granichnogo upravlenija smeshheniem ili uprugoj siloj na odnom konce struny za proizvol'noe dostatochno bol'shoe vremja // Avtomat. i telemeh. – 2008. – T.69. – №3. – S. 7–16.

[7] *Moiseev E.I., Holomeeva A.A.* Optimal'noe granichnoe upravlenie smeshheniem kolebanijami struny s nelokal'nym usloviem chetnosti vtorogo roda // Differenc. uravnenija. – 2011. – T.47. – №1. – S. 126–133.

[8] *Moiseev E.I., Holomeeva A.A.* Razreshimost' smeshannoj zadachi dlja volnovogo uravnenija s dinamicheskim granichnym usloviem // Differenc. uravnenija. – 2012. – T.48. – №10. – S. 1392–1397.