

УДК 519.62/.64, 519.688, 519.633.6

С.И. Кабанихин¹, М.А. Шишленин², Д.Б. Нурсеитов³,
Б.Б. Шолпанбаев⁴

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия, Новосибирск;

²Институт математики им. Соболева СО РАН, Россия, Новосибирск;

³Национальная научная лаборатория коллективного пользования информационных и космических технологий КазНТУ им. К.Сатпаева, Казахстан, Алматы;

⁴Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахстан, Алматы; E-mail: Bahtygerey@mail.ru

Задача продолжения для уравнения электродинамики

В работе рассматриваются задачи продолжения решений гиперболических уравнений с части границы области. К этим задачам относятся задача Коши для гиперболического уравнения с данными на времениподобной поверхности. Во многих обратных задачах искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей. Рассмотрена физическая постановка задачи продолжения и сведена к обратной задаче. Задача продолжения формулируется в виде операторного уравнения $Aq = f$. Рассмотрены корректность: существование, единственность и устойчивость прямой задачи. Задачи продолжения решений уравнений математической физики с части границы во многих случаях являются сильно некорректными задачами в классах функций конечной гладкости. Для решения задачи продолжения применяются градиентные методы минимизации целевого функционала $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$. Целевой функционал минимизирован методом Ландвебера. Вычислен градиент функционала и приведен алгоритм решения обратной задачи. На основе оценок условной устойчивости исследована скорость сходимости градиентных методов. Для численного решения задачи приведен конечно-разностный алгоритм решения задачи. Расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя неоднородностями, расположенными на глубине 6 м. Представлены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение электродинамики, задача продолжения, оптимизационный метод, сопряжённая задача, функционал невязки.

S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, B.B. Sholpanbaev

The continuation problem for the electrodynamics equation

In this paper we consider the continuation problems of hyperbolic equation solutions with part of the boundary. These problems include the Cauchy problem for a hyperbolic equation with data on a timelike surface. Many of inverse problems desired inhomogeneity located at some depth beneath the medium whose parameters are known (in geophysics is usually homogeneous or layered medium). In this case, an important tool for practitioners are continuation problems of geophysical fields from the surface towards the occurrence of inhomogeneities. We consider the physical formulation of the continuation problem and

reduced to the inverse problem. The continuation problem is formulated as an operator equation $Aq = f$. We have considered the correctness: the existence, uniqueness and stability of the direct problem. Continuation problem solutions of equations of mathematical physics with part of the boundary in many cases are highly ill-posed problems in classes of functions of finite smoothness. For solving the continuation problem we used the gradient methods to minimize the objective functional $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$. Objective functional is minimized by the Landweber's method. Written out gradient of the functional and presented the algorithm of solving the inverse problem. Based on estimates of the conditional stability, we investigated the rate of convergence of gradient methods. For the numerical solution of the problem reduced finite-difference algorithm for solving the problem. Calculations are carried for three different media: with one inhomogeneity, with two inhomogeneities and three inhomogeneities in, which are located at a depth of 6 m. The results of numerical calculations was presented.

Key words: inverse problem, electrodynamics equation, optimization method, the adjoint problem, residual functional, continuation problem.

С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Д.Б. Нурсеитов, Б.Б. Шолпанбаев
Электродинамика теңдеуінің жалғастыру есебі

Мақалада гиперболикалық теңдеу шешімін облыс шекарасы бөлімінен жалғастыру есебі қарастырылады. Бұл есептерге уақыт тәрізді беттегі гиперболикалық теңдеудің Коши есебі жатады. Көптеген кері есептерде ізделінді өзгешеліктер орта қабатының қандайда бір тереңдігінде орналасады (геофизикада, әдетте біртекті немесе қатпарлы орта). Бұл жағдайда қолданушыларға өзгешеліктер бағытына қарай геофизикалық өрістерді жалғастыру есебі маңызды құрал болып табылады. Жалғастыру есебінің физикалық қойылымы қарастырылған және кері есепке келтірілген. Жалғастыру есебі операторлық теңдеу $Aq = f$ түрде қойылады. Тура есептің корректілігі: шешімнің бар болуы, жалғыздығы мен орнықтылығы қарастырылады. Математикалық физика теңдеулерінің шешімін шекарадан жалғастыру есебі шекті тегіс функциялар класында қатты корректі емес болып табылады. Жалғастыру есебін шешу үшін мақсаттық $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ функционалды минимизациялау градиенттік тәсілі қолданылады. Мақсаттық функционал Ландвебер тәсілімен минимизацияланған. Функционалдың градиенті есептелініп, кері есепті шешу алгоритмі келтірілген. Шартты орнықтылық бағалауының негізінде градиенттік тәсілдердің жинақталу жылдамдығы зерттелген. Сандық есептеулер үш түрлі ортада жүргізілген: бір, екі және үш қосылымдары бар және тереңдігі 6 м. Сандық есептеулер нәтижелері келтірілген.

Түйін сөздер: кері есептер, электродинамика теңдеуі, жалғастыру есебі, ұтымдылық әдіс, түйіндес есеп, қиыспаушылық функционалы.

Введение

В работе предложен подход регуляризации задачи продолжения электромагнитного поля. Впервые аналогичный итерационный метод был предложен в работе В.А. Козлова, В.Г. Мазья, А.В. Фомина в 1991 году для уравнения Лапласа [6]. В нашей работе мы приводим строгое математическое обоснование оценок скорости сходимости по функционалу градиентных методов и сильной сходимости, используя оценки условной устойчивости. Разработанные алгоритмы были применены для решения задачи продолжения электромагнитных полей.

Задачи определения параметров математических моделей электродинамики возникают в геофизике, медицине и других областях приложения математики. К основным параметрам моделей электродинамики относятся диэлектрическая и магнитная проницаемость и проводимость. Для нахождения или уточнения указанных параметров моделей используют дополнительную информацию об электромагнитных процессах. Такие задачи относятся к обратным задачам математической физики, основы теории которой были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, а также их учеников и последователей.

Во многих обратных задачах искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды, параметры которой известны (в геофизике это, как правило, однородные или слоистые среды). В этом случае важным инструментом для практиков являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей.

Задачи продолжения решений уравнений математической физики с части границы во многих случаях являются сильно некорректными задачами в классах функций конечной гладкости. К этим задачам относятся задачи Коши для гиперболического уравнения с данными Коши на времениподобной поверхности, для уравнения теплопроводности с данными Коши на части границы и для уравнения Лапласа.

В данной работе мы рассмотрим методы регуляризации задачи продолжения основанные на градиентных методах и методе сингулярного разложения.

1. Физическая постановка задачи продолжения

Основным физическим примером будет двумерная задача электродинамики. Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j, \quad \operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Здесь положительные функции $\varepsilon(x, y, z)$, $\sigma(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ диэлектрическая проницаемость, проводимость и магнитная проницаемость среды соответственно.

Считаем, что электромагнитные колебания до момента времени $t = 0$ отсутствуют:

$$(E, H)|_{t < 0} \equiv 0, \quad j|_{t < 0} \equiv 0,$$

а затем индуцируются внешним током $j(x, y, z, t)$.

Рассмотрим один из простейших вариантов задачи, когда ε , σ и μ зависят только от глубины x и одной горизонтальной переменной y , а источником стороннего тока является достаточно длинный кабель, расположенный по центру и протянутый вдоль оси z :

$$j(x, y, z, t) = (0, 0, 1)^T g_v(x) g_h(y) r(t).$$

Здесь функции g_v и g_h описывают поперечные размеры источника.

В этом случае, пренебрегая влиянием концов кабеля, в системе уравнений Максвелла ненулевыми останутся только три компоненты E_z , H_x , H_y и система будет иметь вид:

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \sigma E_z + g_v(x) g_h(y) r(t) = 0,$$

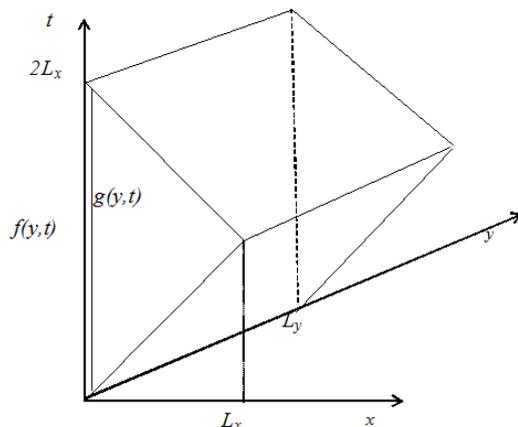


Рисунок 1. Область Ω

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0.$$

После исключения из первого уравнения частных производных компонент H_x и H_y , получим относительно E_z уравнение второго порядка

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - g_v(x)g_h(y)r'(t),$$

к которому добавим начальное условие

$$E_z|_{t=0} \equiv 0.$$

Обозначим $v = E_z(x, y, t)$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и получим следующее уравнение:

$$\varepsilon v_{\tau\tau} + \sigma v_{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Введем новую переменную $t = \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Для функции $u(x, y, t) = v(x, y, \tau)$ получим,

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}u_t = \Delta u.$$

2. Математическая постановка задачи продолжения

Рассмотрим задачу продолжения в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} + \left(\frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) u_t = u_{xx} + u_{yy} \tag{1}$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = f(y, t), \tag{3}$$

Физическая постановка задачи (1)-(3). Пусть на границе среды $x = 0$ исследуемой области Ω включается источник электромагнитных волн (2) в момент времени $t = 0$. Отклик среды (3) измеряется на поверхности $x = 0$ в течении времени $t \in (0, 2L_x)$.

Предполагаем, что функция источника $g(y, t)$ финитна и ее носитель лежит внутри $(0, L_y)$ и L_y достаточно большое, чтобы:

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0. \quad (4)$$

2.1 Пример Адамара некорректности задачи продолжения

Задача продолжения (1)–(3) некорректна по Адамару. Пусть $\sigma \equiv 0$. Тогда решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(0, y, t) = \frac{1}{k} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt), \quad u_x(0, y, t) = 0. \end{cases}$$

единственно, но не является устойчивым к возмущениям данных Коши [1]. В самом деле, при $k \rightarrow \infty$ данные $u_k(0, y, t) = \frac{1}{k} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt)$ стремятся к нулю, в то время как решение

$$u_k(x, y, t) = \frac{1}{k} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \cos(k\sqrt{2}y) \cos(kt)$$

бесконечно возрастает в любой окрестности плоскости $x = 0$.

2.2 Сведение задачи продолжения к обратной задаче

Рассмотрим некорректную задачу (1) – (4) как обратную к следующей прямой (корректной) задаче. В области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$ требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y, t)$ из соотношений:

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, t) \in \Delta(L_x) \quad (5)$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), t \in (0, 2L_x); \quad (6)$$

$$u(x, y, x) = q(x, y), \quad x \in (0, L_x), y \in (0, L_y); \quad (7)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad (x, t) \in \Delta(L_x). \quad (8)$$

В **прямой задаче** (5) – (8) требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y, t)$.

Прямая задача (5)–(8) является корректной задачей [1]. Отметим, что решив прямую задачу (5)–(8) мы тем самым найдем решение задачи продолжения (1)–(4).

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношении (5)–(8) по дополнительной информации:

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (9)$$

Обозначим $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, T)$.

Функция $u(x, y, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1((0, L_x) \times (0, L_y) \times [0, T)) \cap C([0, L_x] \times [0, L_y] \times (0, T))$ и удовлетворяющая соотношениям (5) – (8) внутри области Ω называется *классическим решением* прямой задачи (5) – (8).

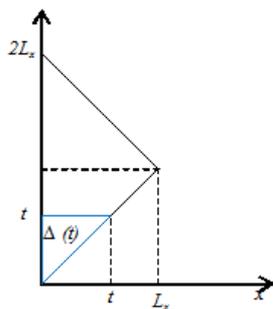


Рисунок 2. Рассмотрение области Ω в нижнем треугольнике

Определение 1 Пусть $q(x, y) \in H^1((0, L_x) \times (0, L_y))$, $g(y, t) \in H^1((0, L_y) \times (0, 2L_x))$. Функцию $u \in H^1(\Omega)$ будем называть обобщенным решением прямой задачи (5) – (8), если для любых $v \in H^1(\Omega)$ таких, что

$$v(x, y, 2L_x - x) = 0, \quad y \in (0, L_y), x \in (0, L_x) \tag{10}$$

$$v(x, 0, t) = v(x, L_y, t) = 0. \quad (x, t) \in \Delta(L_x), \tag{11}$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(v_t u_t - \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} v_t u - v_x u_x - v_y u_y \right) dx dy dt = \\ & = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(v(x, y, x) q_x(x, y) + \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} v(x, y, x) q(x, y) \right) dx dy - \\ & - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} v(0, y, t) g(y, t) dt dy. \end{aligned} \tag{12}$$

2.3 Корректность прямой задачи

Для доказательства корректности прямой задачи сначала докажем несколько лемм. Потом докажем теорему существования, единственности и устойчивости решения прямой задачи.

Пусть $\Delta(t) = \{(\xi, y, \tau) : \xi = (0, t), y \in (0, L_y), \tau \in (\xi, t)\}$.

Лемма 1 Пусть $u \in H^1(\Omega)$ является обобщенным решением прямой задачи (5) – (8), тогда выполняется следующее равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy = \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy \\ & - 2 \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy - \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество в области $\Delta(t) = \{(\xi, y, \tau) : \xi = (0, t), y \in (0, L_y), \tau \in (\xi, t)\}$:

$$\iiint_{\Delta(t)} u_\tau \left(u_{\tau\tau} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau - u_{\xi\xi} - u_{yy} \right) d\tau d\xi dy = 0.$$

Интегрируя по частям, получим следующее равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy &= \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) d\xi dy \\ + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t u_y^2(\xi, y, \xi) d\xi dy - \int_0^{L_y} \int_0^t (u_\tau u_\xi)(0, y, \tau) d\tau dy &- \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy \end{aligned}$$

Откуда, учитывая условие (6), получим

$$(u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) = (u_t + u_\xi)^2 = \left(\frac{du}{d\xi} \Big|_{\frac{du}{d\xi}=1} \right)^2 = q_\xi^2.$$

Таким образом, получаем равенство (13).

Пусть при $t \in (0, L_x)$

$$\|u\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy$$

и соответственно

$$\|q\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy$$

$$\|g\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^t (g^2(y, \tau) + q_\tau^2(y, \tau)) d\tau dy$$

Теперь рассмотрим прямую задачу в верхнем треугольнике $t \in (L_x, 2L_x)$.

Лемма 2 Пусть $u \in H^1(\Omega)$ является обобщенным решением прямой задачи (5) – (8).

Тогда выполняется следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy + \int_0^{L_y} \int_{2L_x-t}^{L_x} (u_t - u_\xi)^2(\xi, y, 2L_x - \xi) d\xi dy = \\ = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy - 2 \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy - \\ - \int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy. \end{aligned} \tag{14}$$

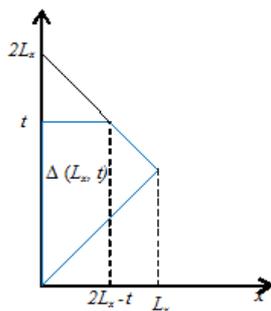


Рисунок 3. Рассмотрение области Ω в верхнем треугольнике

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество в области $\Delta(L_x, t) = \Delta(L_x) \cap \{\tau < t\}$ где $\Delta(L_x) = \{(x, y, t) : x = (0, L_x), y \in R, t \in (x, 2L_x - x)\}$

$$\iiint_{\Delta(L_x, t)} u_\tau \left(u_{\tau\tau} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau - u_{\xi\xi} - u_{yy} \right) d\tau d\xi dy = 0.$$

Интегрируем по частям получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_{2L_x-t}^{L_x} (u_t^2 - 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, 2L_x - \\ & - \xi) d\xi dy + \iiint_{\Delta(L_x, t)} \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_\tau^2 d\tau d\xi dy = \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) d\xi dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_y} \int_0^t u_y^2(\xi, y, \xi) d\xi dy - \int_0^{L_y} \int_0^t (u_\tau u_\xi)(0, y, \tau) d\tau dy \end{aligned}$$

Откуда $(u_t^2 + 2u_t u_\xi + u_\xi^2)(\xi, y, \xi) = (u_t + u_\xi)^2 = \left(\frac{du}{d\xi} \Big|_{\frac{du}{d\xi}=1} \right)^2 = q_\xi^2$ и учитываем условие (6).

Получаем равенство (14).

Пусть при $t \in (L_x, 2L_x)$

$$\|u\|^2(t) = \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x-t} (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \|q\|^2(L_x) &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy \\ \|g\|^2(t) &= \int_0^{L_y} \int_0^t (g^2(y, \tau) + q_\tau^2(y, \tau)) d\tau dy \end{aligned}$$

Теорема 1 (существование обобщенного решения прямой задачи) Если $q, g \in H^1(\Omega)$, то прямая задача (5) – (8) имеет единственное обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$ и верна оценка

$$\|u\|^2(t) \leq e^{Mt} \cdot (\|q\|^2(L_x) + \|g\|^2(2L_x)) \quad (15)$$

здесь $t \in (0, L_x)$.

Доказательство. Из теоремы вложения $C(0, t) \subset H^1(0, t)$ получаем оценку

$$|u(x, y, t)| \leq C_1 \sqrt{\int_0^t (u^2 + u_\xi^2)(\xi, y, t) d\xi} \quad \forall x \in (0, t), \quad \forall y, t. \quad (16)$$

Интегрируем по частям следующий интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy &= \int_0^{L_y} \left[u(0, y, t) g(y, t) - u(0, y, 0) g(y, 0) \right] dy - \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^t u(0, y, \tau) g_\tau(y, \tau) d\tau dy \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{L_y} \int_0^t u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau) d\tau dy \right| &\leq \int_0^{L_y} \left[|u(0, y, t) g(y, t)| + |u(0, y, 0) g(y, 0)| \right] dy \\ &\quad + \int_0^{L_y} \int_0^t |u(0, y, \tau) g_\tau(y, \tau)| d\tau dy \end{aligned}$$

Тогда из оценки (16) вытекает

$$\int_R \int_0^t |u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau)| d\tau dy \leq C_2 \|u\|(t) \cdot \|g\|(t).$$

Оценим равенство (13) и получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} \int_0^t (u_t^2 + u_\xi^2 + u_y^2)(\xi, y, t) d\xi dy &\leq \int_0^{L_y} \int_0^t (q_\xi^2(\xi, y) + q_y^2(\xi, y)) d\xi dy + \\ &\quad + 2 \int_0^{L_y} \int_0^t |u_\tau(0, y, \tau) g(y, \tau)| d\tau dy. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее неравенство

$$\|u\|^2(t) \leq \|q\|^2(t) + C_3 \|u\|(t) \cdot \|g\|(t).$$

Из курса элементарной математики можно показать

$$a^2 \leq b^2 + C_0 ad \implies a^2 \leq C_*(b^2 + d^2).$$

Тогда получаем следующую оценку

$$\|u\|^2(t) \leq C_4 (\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t)). \tag{17}$$

Пусть функция $\left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{C^1((0,L_x) \times (0,L_y))} \leq M$.

Используя неравенство Гельдера и оценим следующий интеграл

$$\int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau |u_\tau^2| \left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right| d\xi d\tau dy \leq M \int_0^t \int_0^{L_y} \int_0^\tau |u_\tau^2| d\xi dy d\tau$$

Отсюда

$$\sqrt{\int_0^{L_y} \int_0^\tau |u_\tau|^2 d\xi dy} \leq \|u\|(\tau),$$

Тогда получим

$$\int_0^{L_y} \int_0^t \int_0^\tau |u_\tau^2| \left| \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \right| d\xi d\tau dy \leq M \int_0^t \|u\|^2(\tau) d\tau.$$

Следовательно из (13)

$$\|u\|^2(t) \leq C_4 (\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t)) + M \int_0^t \|u\|^2(\tau) d\tau. \tag{18}$$

Пусть $a(t) = \|u\|^2(t)$, $b(t) = C_4 (\|q\|^2(t) + \|g\|^2(t))$, тогда $b(t)$ монотонно растёт и $b(t) \leq B = b(L_x)$ отсюда получаем

$$a(t) \leq B + M \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Применяя к неравенству лемму Гронуолла–Беллмана, получим

$$a(t) \leq Be^{Mt}$$

В итоге доказываем неравенство (15).

3. Решение задачи продолжения для уравнения геоэлектрики методом Ландвебера

Вводим оператор A следующим образом

$$A: q(x, y) \mapsto f(y, t)$$

$$A: H^1(0, L_x) \mapsto H^1(0, 2L_x)$$

Тогда обратная задача (5) – (9) записывается в операторной форме

$$Aq = f. \quad (19)$$

Введем целевой функционал

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|_{W_2^0}^2 = \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n) - f(y, t)]^2 dy dt. \quad (20)$$

Целевого функционала (20) минимизируем методом Ландвебера.

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad (21)$$

где $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$

3.1. Вычисление градиента целевого функционала

Зададим приращение $q_n + \delta q_n$, тогда

$$\delta u = \tilde{u} - u = u(x, y, t; q_n + \delta q_n) - u(x, y, t; q_n). \quad (22)$$

Используя обозначение (22), вычисляем приращение целевого функционала $J(q)$.

$$\begin{aligned} J(q_n + \delta q_n) - J(q_n) &= \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - f(y, t)]^2 dy dt \\ &\quad - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n) - f(y, t)]^2 dy dt \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - u(0, y, t; q_n)] \\ &\quad \times [u(0, y, t; q_n + \delta q_n) - f(y, t) + u(0, y, t; q_n) - f(y, t)] dy \\ &= \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} \delta u(0, y, t; q_n) 2[u(0, y, t; q_n) - f(y, t)] dy + o(\|\delta u\|). \end{aligned} \quad (23)$$

Для получения выражения на $\delta u(0, y, t; q_n)$ рассмотрим постановку возмущенной задачи для уравнений (5) — (8).

$$\tilde{u}_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} \tag{24}$$

$$\tilde{u}_x(0, y, t) = g(y, t), \tag{25}$$

$$\tilde{u}(x, y, x) = q_n + \delta q_n, \tag{26}$$

$$\tilde{u}(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0. \tag{27}$$

Из соотношений (24)—(27) вычтем соотношения (5) — (8) и, учитывая (22), получим для приращения δu задачу

$$\delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\delta u_t = \delta u_{xx} + \delta u_{yy} \tag{28}$$

$$\delta u_x(0, y, t) = 0, \tag{29}$$

$$\delta u(x, y, x) = \delta q_n, \tag{30}$$

$$\delta u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0. \tag{31}$$

Умножая (28) на произвольную функцию $\psi(x, y, t)$, проинтегрируем по Ω .

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega} \left(\delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\delta u_t - \delta u_{xx} - \delta u_{yy} \right) \psi dx dy dt = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \psi \delta u_{tt} dt dx dy \\ &- \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^t \psi \delta u_{xx} dx dt dy - \int_0^{L_y} \int_{L_x}^{2L_x} \int_0^{2L_x-t} \psi \delta u_{xx} dx dt dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \int_0^{L_y} \psi \delta u_{yy} dy dt dx \\ &+ \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi \delta u_t dt dx dy \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям и получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[(\psi \delta u_t)(x, y, 2L_x - x) - \underline{(\psi \delta u_t)(x, y, x)} - (\psi_t \delta u)(x, y, 2L_x - x) + \right. \\ &+ \underline{(\psi_t \delta u)(x, y, x)} + \left. \int_x^{2L_x-x} \psi_{tt} \delta u dt \right] dx dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \left[(\psi \delta u)(x, y, 2L_x - x) - \right. \\ &- (\psi \delta u_t)(x, y, x) - \left. \int_x^{2L_x-x} \psi_t \delta u dt \right] dx dy - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[\underline{(\psi \delta u_x)(t, y, t)} - \right. \\ &- \left. \underline{(\psi \delta u_x)}(0, y, t) - \underline{(\psi_x \delta u)}(t, y, t) + (\psi_x \delta u)(0, y, t) + \int_0^t \psi_{xx} \delta u dx \right] dt dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} \left[(\psi \delta u_x)(2L_x - t, y, t) - (\psi \overset{\circ}{\delta} u_x)(0, y, t) - (\psi_x \delta u)(2L_x - t, y, t) + \right. \\
& + (\psi_x \delta u)(0, y, t) + \left. \int_0^{2L_x - t} \psi_{xx} \delta u dx \right] dt dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x - x} \left[(\psi \delta u_y)(x, L_y, t) - \right. \\
& \left. - (\psi \delta u_y)(x, 0, t) - (\psi_y \overset{\circ}{\delta} u)(x, L_y, t) + (\psi_y \overset{\circ}{\delta} u)(x, 0, t) + \int_0^{L_y} \psi_{yy} \delta u dy \right] dt dx
\end{aligned}$$

Учитывая (29) и (31) и в силу того, что $\delta u_x(t, y, t) + \delta u_t(x, y, x) = \frac{d\delta u}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=1} = (\delta q)_x$ получаем

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \left(\psi_{tt} - \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} \psi_t} - \psi_{xx} - \psi_{yy} \right) \delta u dx dy dt + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[(\psi \delta u_t)(x, y, 2L_x - x) - \right. \\
& \left. - (\psi_t \delta u)(x, y, 2L_x - x) + (\psi_t \delta u)(x, y, x) \right] dx dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_x \delta u)(t, y, t) dt dy - \\
& - \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} \left[(\psi \delta u_x)(2L_x - t, y, t) - (\psi_x \delta u)(2L_x - t, y, t) \right] dt dy - \int_0^{L_y} (\psi \delta u) \Big|_0^{L_x} dy + \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_x \delta u)(t, y, t) dx dy - \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x - x} \left[(\psi \delta u_y)(x, L_y, t) - (\psi \delta u_y)(x, 0, t) \right] dt dx \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \left[(\psi \delta u)(x, y, 2L_x - x) - (\psi \delta u)(x, y, x) \right] dx dy + \\
& + \int_0^{L_y} \int_0^{2L_x} (\psi_x \delta u)(0, y, t) dt dy
\end{aligned}$$

Откуда, вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{tt} - \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon} \psi_t} = \psi_{xx} + \psi_{yy}, \quad (32)$$

$$\psi(x, y, 2L_x - x) = 0, \quad (33)$$

$$\psi_x(0, y, t) = 2(u(0, y, t) - f(y, t)), \quad (34)$$

$$\psi_y(x, L_y, t) = \psi_y(x, 0, t) = 0. \quad (35)$$

Тогда, учитывая (23), получим

$$\langle \delta q_n, J' q_n \rangle = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\psi_t(x, y, x) + \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi(x, y, x)) \delta q dx dy.$$

По определению [3, стр. 260] главная часть приращения функционала есть градиент, т.е.

$$J' q_n = \psi_t(x, y, x) + \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \psi(x, y, x). \tag{36}$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ есть решение сопряженной задачи (32) — (35).

3.2. Алгоритм решения обратной задачи

1. Выбираем начальное приближение q_0 .
2. Предположим, что q_n уже известно.
3. Решаем прямую задачу (5) — (8) с заданным q_n .
4. Вычисляем значение функционала $J(q_n)$ по формуле (20).
5. Если значение целевого функционала не достаточно мало (например, $J(q_n) > \delta$), тогда решаем сопряженную задачу (32)–(35) с данными

$$\psi_n(0, y, t) = 2(u_n(0, y, t) - f(y, t)).$$

6. Вычисляем градиент функционала $J'(q_n)$ по формуле (36).
7. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ и переходим пункту 2.

4. Численные расчеты

Обозначим $\sigma_1 = \frac{\sigma \sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Будем искать решение прямой задачи (5) — (8) в виде ряда Фурье по переменной y :

$$u(x, y, t) = \sum u^k(x, t) e^{iky} \qquad \sigma_1(x, y) = \sum \sigma_1^k(x) e^{iky}$$

Тогда получим:

$$\sum u_{tt}^k e^{iky} + \sum_{n,k} \sigma_1^n e^{iny} u_t^k e^{iky} = \sum u_{xx}^k e^{iky} - \sum_k k^2 u^k(x, t) e^{iky}$$

Введем обозначение:

$$n + k = k', \quad n = k' - k \qquad u_{tt}^k + \sum_{k'} \sigma_{k'-k} u_t^{k'} = u_{xx}^k - k^2 u^k$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$U_{tt} - \Sigma(x)U_t = U_{xx} + E_N U, \quad (37)$$

$$U_x|_{x=0} = G(t), \quad (38)$$

$$U|_{t=x} = Q(x), \quad (39)$$

Здесь,

$$E_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma^N & \sigma^{N-1} & \sigma^{N-2} & \dots & \sigma^0 \\ \sigma^{N-1} & \sigma^{N-2} & \sigma^{N-3} & \dots & \sigma^1 \\ \sigma^{N-2} & \sigma^{N-3} & \sigma^{N-4} & \dots & \sigma^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^0 & \sigma^1 & \sigma^2 & \dots & \sigma^N \end{pmatrix}.$$

Прямая задача (37)-(39) - требуется определить $U(x, t)$ по заданным функциям $G(t)$ и $Q(x)$.

Обратная задача заключается в определении функции $Q(x)$ из соотношений (37)-(39) по дополнительной информации:

$$U|_{x=0} = F(t). \quad (40)$$

4.1. Конечно-разностный алгоритм решения прямой задачи

Заменяем конечно-разностными аналогами производные в уравнении (37) и получим:

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{h^2} + \Sigma_i \frac{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}{2h} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} - E_N U_i^k,$$

$$U_i^{k+1} + U_i^{k-1} + \frac{h}{2} \Sigma_i (U_i^{k+1} - U_i^{k-1}) = U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - h^2 E_N U_i^k$$

$$U_i^k = \frac{U_i^{k+1} + U_i^{k-1}}{2}$$

$$\frac{U_i^{k+1} + U_i^{k-1}}{2} + \frac{h}{2} \Sigma_i (U_i^{k+1} - U_i^{k-1}) = U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - h^2 E_N (U_i^{k+1} - U_i^{k-1})$$

$$\left(I + \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \right) U_i^{k+1} = U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - \left(I - \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \right) U_i^{k-1} \Rightarrow$$

Введем обозначение

$$M_i = I + \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \quad (41)$$

$$P_i = I - \frac{h}{2} \Sigma_i + \frac{h}{2} E_N \quad (42)$$

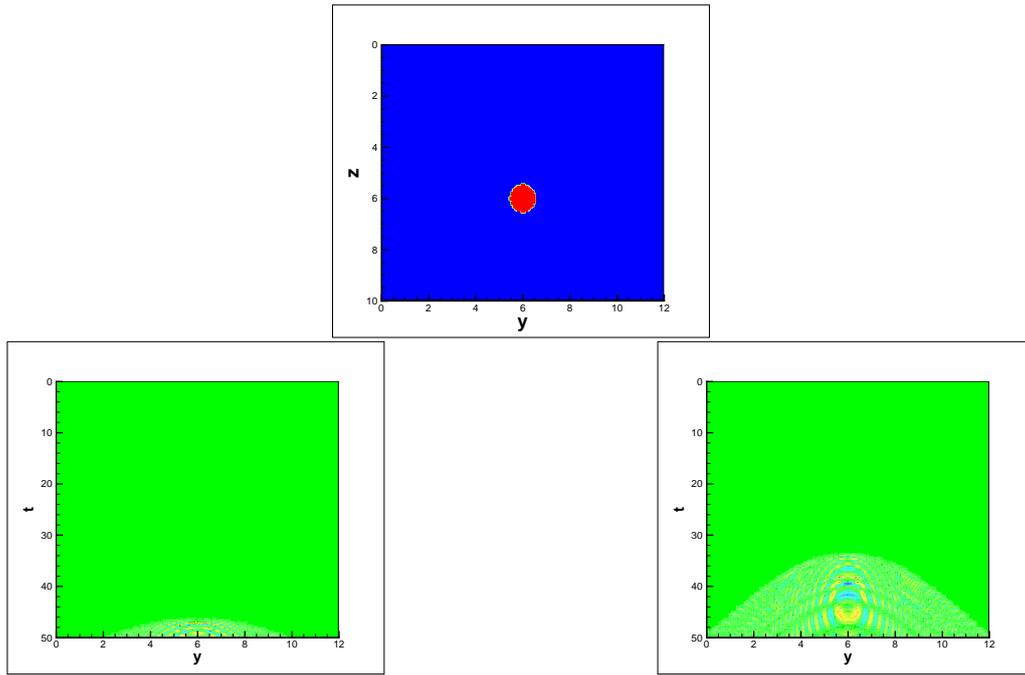


Рисунок 4. Сверху – среда с одной неоднородностью. Слева – наблюдаемое anomalous поле на границе $z = 0$. Справа – наблюдаемое anomalous поле на глубине $z = 3$ м.

получим

$$M_i U_i^{k+1} = U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - P_i U_i^{k-1} \quad U_i^{k+1} = M_i^{-1} (U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - P_i U_i^{k-1}).$$

Запишем так же граничное условие (38)

$$U_x|_{x=0} = G(t),$$

$$\begin{aligned} U(h, kh) &= U_1^k = U_0^k + h U_x|_{x=0} + \frac{h^2}{2} U_{xx} = U_0^k + hG^k + \frac{h^2}{2} (U_{tt} + \Sigma(0)U_t + \\ &+ E_N U|_{x=0}) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{U_0^{k+1} - 2U_0^k + U_0^{k-1}}{h^2} + \Sigma_0 \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2h} + E_N U_0^k \right) + \\ &+ \underline{U_0^k} + hG^k = hG^k + \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2} + \frac{h}{4} \Sigma_0 (U_0^{k+1} - U_0^{k-1}) + \frac{h^2}{2} E_N U_0^k \end{aligned}$$

$$U_0^k = \frac{U_0^{k+1} + U_0^{k-1}}{2}$$

$$U_1^k = hG^k + \frac{U_0^{k+1} - U_0^{k-1}}{2} + \frac{h}{4} \Sigma_0 (U_0^{k+1} - U_0^{k-1}) + \frac{h^2}{2} E_N \left(\frac{U_0^{k+1} + U_0^{k-1}}{2} \right)$$

$$U_1^k = hG^k + \frac{1}{2} \left(I + \frac{h}{2} \Sigma_0 + \frac{h^2}{2} E_N \right) U_0^{k+1} + \frac{1}{2} \left(I - \frac{h}{2} \Sigma_0 + \frac{h^2}{2} E_N \right) U_0^{k-1} \Rightarrow$$

Учитывая обозначения (41) и (42)

$$U_1^k = hG^k + \frac{1}{2} M_0 U_0^{k+1} + \frac{1}{2} P_0 U_0^{k-1}$$

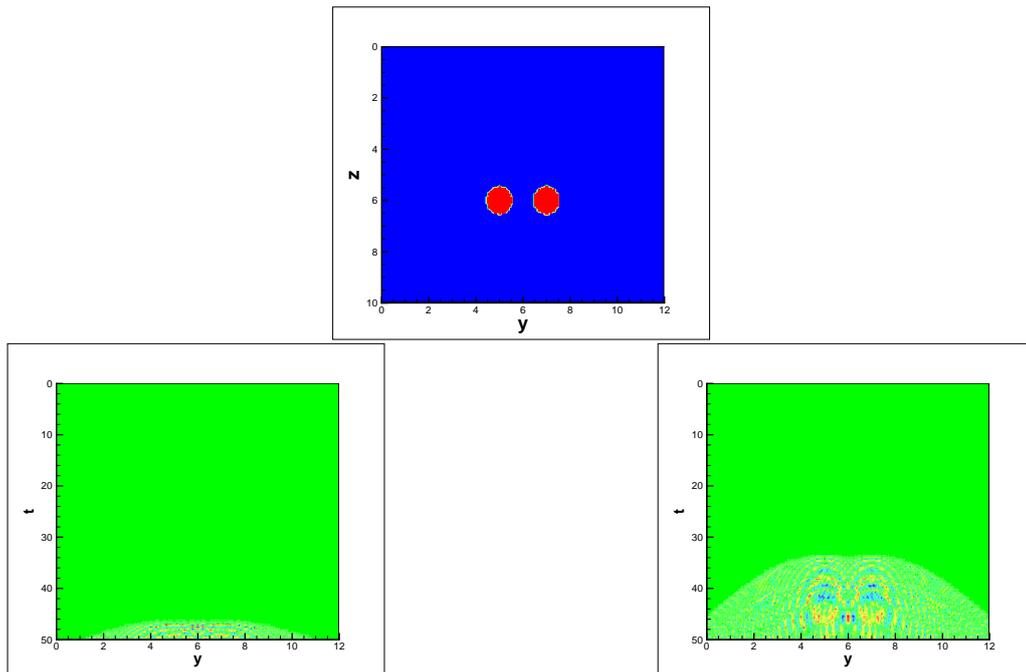


Рисунок 5. Сверху – среда с двумя неоднородностями. Слева – наблюдаемое anomальное поле на границе $z = 0$. Справа – наблюдаемое anomальное поле на глубине $z = 3$ м.

$$M_0 U_0^{k+1} = 2U_1^k - 2hG^k - P_0 U_0^{k-1}$$

$$U_0^{k+1} = M_0^{-1} (2U_1^k - 2hG^k - P_0 U_0^{k-1})$$

Условие на характеристике

$$U_i^i = Q_i.$$

4.2. Результаты численных расчетов

Расчеты проводились в области $(z, y) = (0, 10) \times (0, 12)$ м., время наблюдения 50 нс. Шаг по пространственным переменным $h_x = h_y = 0.01$ м. Шаг по времени равен $h_t = 0.0047$ нс.

Расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя неоднородностями, расположенными на глубине 6 м.

Параметры среды $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0.01$, значения параметров внутри неоднородностей $\varepsilon = 20$, $\sigma = 0.001$.

На рисунках 4 – 6 приведено anomальное поле – поле, полученное путем вычитания из наблюдаемого поля от неоднородной среды поля от источника.

Расчеты показывают, что решение задачи продолжения электромагнитного поля на глубину $z = 3$ м. позволяет различать неоднородности расположенные на глубине 6 м.

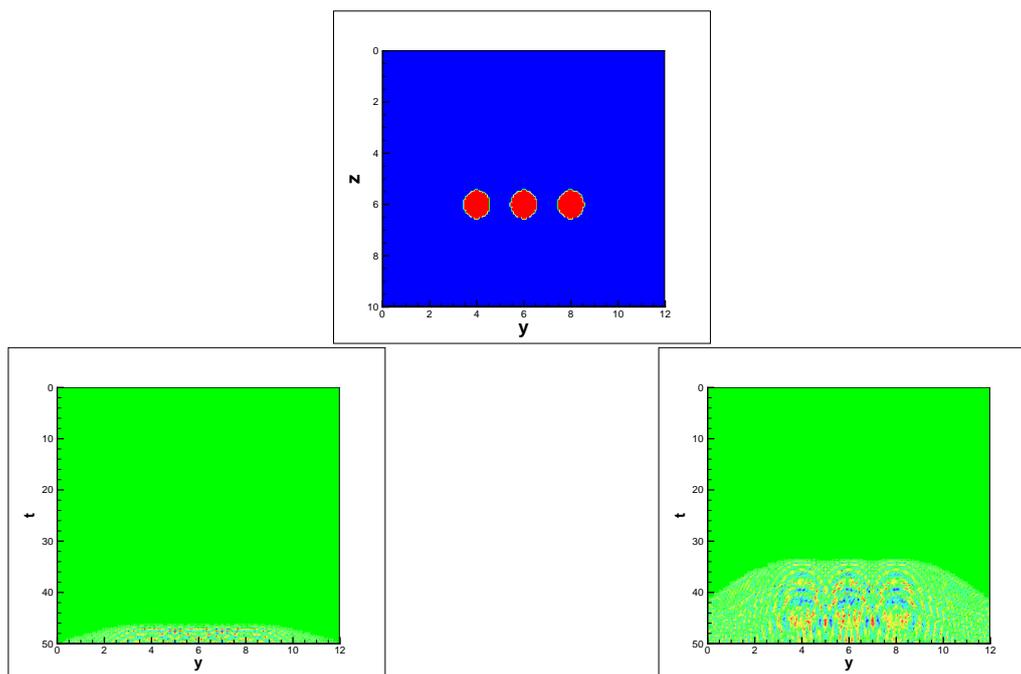


Рисунок 6. Сверху – среда с тремя неоднородностями. Слева – наблюдаемое аномальное поле на границе $z = 0$. Справа – наблюдаемое аномальное поле на глубине $z = 3$ м.

Литература

- [1] С.И. Кабанихин Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: СибНИИ, 2008. – 460 с.
- [2] Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006. – 426 с.
- [3] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.
- [4] H.A. Levine, Continuous data dependence, regularization, and a three lines theorem for the heat equation with data in a space like direction. // Ann. Mat. Pura Appl. (IV), CXXXIV (1983), pp. 267–286.
- [5] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation. // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, VSP, The Netherlands, Vol. 3, 1 (1995). – pp. 21–46.
- [6] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, А. В. Фомин Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т.31. – №1. – 1991. – с. 64–74.

References

- [1] *S.I. Kabanikhin* Obratnye i nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: SibNI, 2008. – 460 s.
- [2] *Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitova A.T.* Iteratsionnye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach s dannymi na chasti granitsy. – Almaty-Novosibirsk: OF «Meghdunarodnyi fond obratnykh zadach», 2006. – 426 s.
- [3] *Vasil'ev F.P.* Chislennye metody resheniya ekstremalnykh zadach. – Ucheb. posobie dlya vuzov. – 2-e izd., pererab. i dop. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. – 552 s.
- [4] *H.A. Levine*, Continuous data dependence, regularization, and a three lines theorem for the heat equation with data in a space like direction. // *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)*, CXXXIV (1983), pp. 267–286.
- [5] *S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky*, Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation. // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, VSP, The Netherlands, Vol. 3, 1 (1995). – pp. 21–46.
- [6] *V.A. Kozlov, V.G. Mazya, A.V. Fomin* Ob odnom iteratsionnom metode resheniya zadachi Koshi dlya ellepticheskikh uravnenii. // *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.* – V.31, No.1 (1991), pp. 64–74.