

УДК 004.051

А.П. Макашева, Б.А. Аетова

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.;
E-mail: aetovab@mail.ru

ДЫБЫС ЖЫЛДАМДЫҒЫНАН ЖОҒАРЫ КЕҢЕЙТІЛГЕН АҒЫСТЫ ЗЕРТТЕУ

Бұл жұмыста дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыншаның үшөлшемді есепсіз дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынға ағып шығуы зерттеледі. Есепті шығару үшін үшөлшемді дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынша жүйелері мен бағытас ағыстың араласуының сандық шешімін параболалық Навье-Стокс теңдеулер жүйесі негізінде есептейді. Жүйені тұйықтау үшін Болдуин-Ломакстың турбулентті алгебралық моделі қолданылады. Теңдеулер жүйесі Мак-Кормактың екі қадамды және Уорминг-Катлер-Ломакстың үш қадамды айқындалған схемасы арқылы табылады.

Түйін сөздер: Абсолюттік орнықтылық, априорлық бағалар, меншікті емес интегралдар, ерекше емес түрлендірулер, шешімдер қасиеттері.

A.P. Makasheva, B.A. Aetova

Investigation of supersonic underexpanded jets

In this work the method of calculation of a three-dimensional supersonic jet in a co-flow is offered. The calculation method the parabolized of the equations Navier-Stokes which allows to carry out common calculations of the expiration of three-dimensional off-design co-flow jets to a co-flow supersonic jet is offered. To close the system of equations used algebraic turbulence model of Baldwin-Lomax. The initial system of equations is solved numerically explicit Mac Cormack scheme (two step) and Uorming Cutler-Lomax (three steps).

Key words: supersonic jets, flow, number Max, pressure, ideal gas.

А.П. Макашева, Б.А. Аетова

Исследование сверхзвуковой недорасширенной струи

В данной работе предлагается метод расчета трехмерной нерасчетной сверхзвуковой струи в спутный поток. Предлагается метод расчета параболизированных уравнений Навье-Стокса, которой позволяет единым образом проводить расчеты истечения трехмерных нерасчетных сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток. Для замыкания системы уравнений используется алгебраическая модель турбулентности Болдуина-Ломакса. Исходная система уравнений численно решается явной схема Мак-Кормака (двух шаговой) и Уорминг-Катлер-Ломакса (трех шаговой).

Ключевые слова: сверхзвуковая струя, поток, число Мах, давление, идеальной газ. решений.

1. Кіріспе

Соңғы жылдары газ динамикасында көптеген қолданбалы есептерінің пайда болуына байланысты дыбыс жылдамдығынан жоғары есептелмейтін ағыстарда кездесетін,

қозғалыссыз ортаға не ағынға таралатын ағындарды теориялық және тәжірибелілік түрде зерттеуге кө көңл бөлінді. Дыбыс жылдамдығынан жоғары есептелмейтін ағындарды тәжірибелілік түрде зерттеу өте үлкен қиындықтармен жүзеге асырылады. Мұндай ағынға тығыздықтың өзгеруінің, мах толқыны мен шекаралас қабатпен сейілту толқынының, дыбыс жылдамдығынан жоғары ағын аймағының дыбыс жылдамдығынан баяу аймақпен, сонымен қатар шекаралық қабатының өзара әрекеттесуі тән. Сонымен қоса, әдетте ғылыми тәжірибе тек шектеулі сипаттағы ақпараттарды береді. Мұндай жағдайлар дыбыс жылдамдығынан жоғары есептелмейтін ағыстарда ағынды есептеу әдістерін өңдеуді талап етеді. Дегенмен бұл жуықтаулар есепті жеңілдетуге мүмкіндік береді, бірақта бұл кезде тұтқырлығы жоқ газдардың теңдеулер жүйесінің қиындығына байланысты оларды шешудің сандық әдісі тек ЭВМ арқылы алуға болады.

Дыбыс жылдамдығынан жоғары бағыттас ағында ағатын ағыс жүйесі өзінің бағытында диффузиялық тасымалы ағынының массасы, қозғалыс саны және жылудың конвективті тасымалмен салыстырғанда аз болып, ескермеуге болады, ал қысым өрісі ағынмен төмен қарай таралуы жоғары қарай таралатын ағынның параметрлеріне әсер етпейді. Ағынның осы бағытындағы ағуының артықшылығы бұл ағыстың параболалық немесе Навье-Стокс теңдеуінің қысқартылған түрін қолдануға мүмкіндік береді, ол күрделілігі бойынша толық Навье-Стокс теңдеуі мен шекаралық қабаттың теңдеуінің аралық жағдайын көрсетеді.

2. Есептің қойылымы

Жұмыста қарастырылып отырған ағысты сипаттау үшін Навье-Стокс теңдеуінің параболалық теңдеулер жүйесі қолданылады, олар Навье-стокстың толық теңдеулер жүйесінен маңызды емес тұтқыр-бойлық координата бойынша екінші туындысы болатын мүшелерін жою арқылы алынған (1)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

мұндағы

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p) u \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vw \\ (E_t + p) v \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p) w \end{bmatrix},$$

$$\vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + u\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix}, \quad \vec{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix},$$

$$\tau_{xy} = \mu_t u_t, \quad \tau_{xz} = \mu_t u_z, \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu_t (2u_y - w_z), \quad \tau_{yz} = \mu_t (v_z + w_y),$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \mu_t (2w_z - v_y), \quad q_y = kT_y, \quad q_z = kT_z, \quad E_t = \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right).$$

Қысым мен температура келесі өрнектер арқылы анықталады:

$$\rho = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2) \right], \quad T = \frac{1}{\rho c_v} \left[E_t - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2) \right],$$

$$c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_a^2}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

(1) теңдеулер жүйесі өлшемсіз консервативті жазылған. өлшемсіз параметрлер ретінде түтік қимасының шамалары ρ_0, u_0, T_0 алынған, мұндағы толық энергия E_t мен қысым шамасы $\rho_0 u_0^2$ өрнегіне сәйкес келеді.

(1) берілген жүйенің шекаралық шарттары келесідей:

Бастапқы шарт $x = 0$ болғанда

$$\text{ағынша: } u = 1, \quad T = 1, \quad \rho = 1, \quad v = w = 0, \quad T = 1, \quad u = \frac{M_a}{M_\infty} \sqrt{T}, \quad p = \frac{1}{\gamma n M_a^2}, \quad v = w = 0.$$

$$\text{ағын: } T = 1, \quad u = \frac{M_a}{M_\infty} \sqrt{T}, \quad p = \frac{1}{\gamma n M_a^2}, \quad v = w = 0.$$

Шекаралық шарты $x > 0$ болғанда

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad L,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad L,$$

мұндағы ρ - тығыздық; u және v, w -бойлық және көлденең жылдамдықтар; E_t - толық энергия; p -қысым; T - температура; $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ -абиабата көрсеткіші; c_p, c_v -тұрақты қысым мен көлемдегі меншікті жылу сыйымдылығы; μ_t - турбулентті тұтқырлық коэффициенті; k - жылу өткізгіштік коэффициенті, M_a -ағыншаның Мах саны.

Берілген теңдеулер жүйесін тұйықтау үшін Болдуин-Ломакстың турбулентті алгебралық моделі қолданылады:

$$\mu_t = I^k \rho l^2 |\Omega|,$$

мұндағы

$$|\Omega| = \sqrt{\Omega \cdot \Omega} = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}, \quad \Omega = \text{rot}V, \quad V = (u, v, w),$$

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Араласу ұзындығы (l) және көбейткіш (I^k) келесі түрде анықталады

$$I^k = \frac{1}{kRe(1 - 0.0025x)}, \quad k = \text{const}, \quad l = (u_{max} - u_{min}) / \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{max}.$$

3. Шешу әдісі

(1)теңдеулер жүйесін сандық шешу бөліктеудің екі кезеңді сызба нұсқасы бойынша жүзеге асырылады.

1 кезең. Ағын аумағының аралық есептелуі:

$$\frac{\vec{E}^{*i} - \vec{E}^{*n}}{\Delta x} = -\frac{\partial \vec{F}^n}{\partial y} - \frac{\partial \vec{G}^n}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}^p}{\partial x} \quad (2)$$

2 кезең. Айқындалатын аумақтың ақырғы есебі

$$\frac{A^n(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n)}{\Delta x} = \frac{\partial \vec{F}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}^{n+1}}{\partial z} \quad (3)$$

мұндағы $\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix}$.

Бірінші кезеңдегі теңдеулер жүйесінің сандық шешімі Мак-Кормактың (1 және 2 қадам) және Уорминг-Катлер-Ломакстың (3 қадам) айқындалған схемасы арқылы табылады.

1 қадам

$$\vec{E}_{i,j}^{*1} = \vec{E}_{i,j}^{*n} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} (\vec{F}_{i+1,j}^n - \vec{F}_{i,j}^n) + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\vec{G}_{i,j+1}^n - \vec{G}_{i,j}^n) \right\}$$

2 қадам

$$\vec{E}_{i,j}^{*2} = \frac{1}{2} (\vec{E}_{i,j}^{*n} + \vec{E}_{i,j}^{*1}) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} (\vec{F}_{i,j}^1 - \vec{F}_{i-1,j}^1) + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\vec{G}_{i,j}^1 - \vec{G}_{i,j-1}^1) \right\}$$

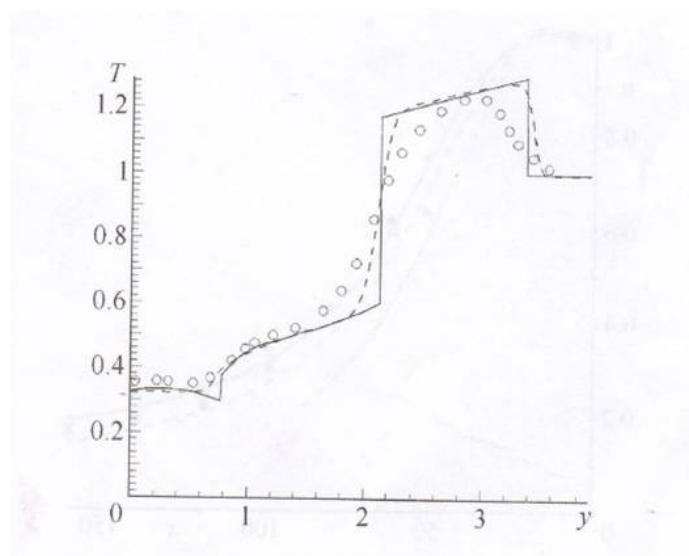
3 қадам

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i,j}^{*3} = & \vec{E}_{i,j}^{*n} - \frac{1}{24} \left\{ \omega_{i+1/2,j}^n * [\vec{E}_{i+2,j}^{*n} - 4\vec{E}_{i+1,j}^{*n} + 6\vec{E}_{i,j}^{*n} - 4\vec{E}_{i-1,j}^{*n} + \vec{E}_{i+2,j}^{*n}] - \right. \\ & \left. - \omega_{i,j-1/2}^n * [\vec{E}_{i,j+2}^{*n} - 4\vec{E}_{i,j+1}^{*n} + 6\vec{E}_{i,j}^{*n} - 4\vec{E}_{i,j-1}^{*n} + \vec{E}_{i,j-2}^{*n}] \right\} - \\ & - \frac{1}{24} \left[\frac{\Delta x}{\Delta y} (-2\vec{F}_{i+2,j}^n + 7\vec{F}_{i+1,j}^n - 7\vec{F}_{i-1,j}^n + 2\vec{F}_{i-2,j}^n) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta x}{\Delta z} (-2\vec{G}_{i,j+2}^n + 7\vec{G}_{i,j+1}^n - 7\vec{G}_{i,j-1}^n + 2\vec{G}_{i,j-2}^n) \right] - \\ & - \frac{3}{8} \left[\frac{\Delta x}{\Delta y} (\vec{F}_{i+1,j}^2 + \vec{F}_{i-1,j}^2) + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\vec{G}_{i,j+1}^2 + \vec{G}_{i,j-1}^2) \right]. \end{aligned}$$

Айқындалатын аумақтың ақырғы есебін (3) шешу үшін үш қадамды матрицалық қуалау әдиси қолданылады:

1 қадам

$$\left[\frac{\Delta x}{2\Delta z^2} (\mu_{ti,j} + \mu_{ti,j+1}) \right] \vec{U}_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \left[A_{i,j}^n + \frac{\Delta x}{2\Delta z^2} (\mu_{ti,j} + 2\mu_{ti,j} + 2\mu_{ti,j-1}) \right] \vec{U}_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} +$$



Сурет 1. $M_a = 2, M_\infty = 4, n = 10, T_0 = T_\infty = 1$: тұтас сызық-идеалды ағын үшін [4], штрих- осы жұмыстың нәтижесі, дөгелекшелер-[3] нәтижелері

$$+ \left[\frac{\Delta x}{2\Delta z^2} (\mu_{ti,j} + \mu_{ti,j-1}) \right] \vec{U}_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} = A_{i,j}^n \vec{U}_{i,j}^n$$

2қадам

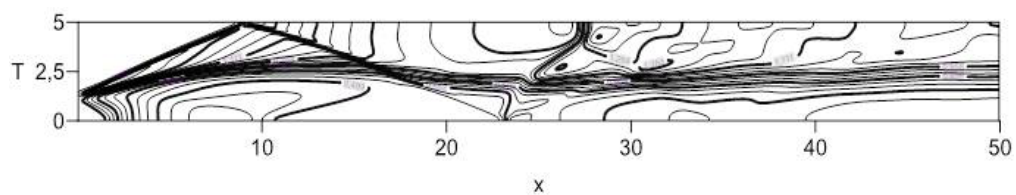
$$\vec{U}_{i,j}^n = A_{i,j}^n \vec{U}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

3қадам

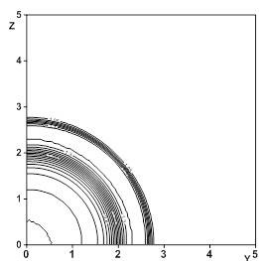
$$\left[\frac{\Delta x}{2\Delta y^2} (\mu_{ti,j} + \mu_{ti+1,j}) \right] \vec{U}_{i+1,j}^{n+1} - \left[A_{i,j}^n + \frac{\Delta x}{2\Delta y^2} (\mu_{ti+1,j} + 2\mu_{ti,j} + 2\mu_{ti-1,j}) \right] \vec{U}_{i,j+1}^{n+1} + \left[\frac{\Delta x}{2\Delta y^2} (\mu_{ti,j} + \mu_{ti-1,j}) \right] \vec{U}_{i-1,j}^{n+1} = -\vec{U}_{i,j}^n$$

4. Есептеу нәтижелері

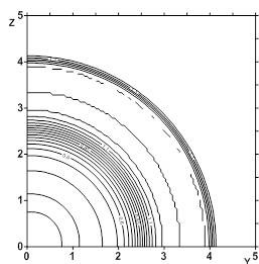
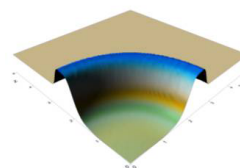
Дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыншаның бағыттас дыбыс жылдамдығынан жоғары тұтқырлы ағысқа ағып шығуы тестілі түрде келесі параметрлермен қарастырылады: $M_a = 2, M_\infty = 4, n = 10, T_0 = T_\infty = 1$, марштық координата бойынша қадамы $\Delta x = 0.0025$ Түйендер санының есептеу нәтижелеріне әсерін қарастыратын тестілік есептеу жұмыстары алдын ала жүргізілді, нәтижесінде, көлденең бағыттарында 100×100 түйін болатын, $\Delta y = \Delta z = 0.15$ қадаммен берілетін тор таңдалынды. 1 суретте ағындағы температураның таралуы көлденең қимасы бойынша есептеулерінің [3] $x = 5.5$ мәндерімен салыстыру келтірілген. Үшінші ретті дәлдікпен алынған (штрих сызық) авторлардың нәтижелері идеалды ағын (тұтас сызық) үшін [4] есептеу нәтижелерімен жақсы сәйкестенеді, сонымен қатар, екінші ретті дәлдікпен алынған [3] есептеу нәтижелері (дөгелекшелер) едәур төмендеген.



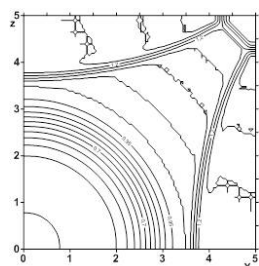
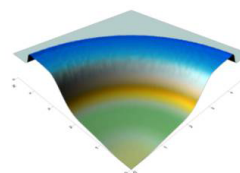
(а)



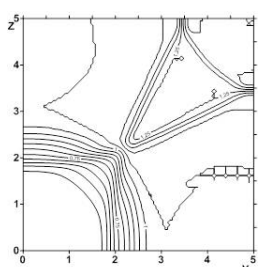
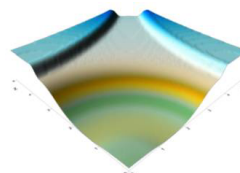
(б)



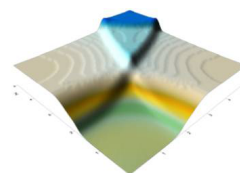
(в)



(г)



(д)



Сурет 2. $M_a = 2$, $M_\infty = 4$, $n = 10$, $T_0 = T_\infty = 1$: а) изотерм өрісі; б)–д) температураның таралуы: б) $x = 3.35$, в) $x = 6.7$, г) $x = 13.4$, д) $x = 18.4$

2 суретте изотерм өрісі (сурет 2а) және x осі бойынша температураның таралуы (сурет 2б) көрсетілген. ағын және ағыс жазықтықта әртүрлі жылдамдықпен таралғандықтан екеуінің арасында қиылысу қбаты пайда болады (ағын мен оны қоршаған ағыс арасындағы шекара), олар изотерм өрісінен анық байқалады (2 сурет 2а), сондай-ақ, изотермнен температураның тығыздық жүйесіні секірімесі ($n > 1$) пайда болады, және қиылысу қабатында қисық сызыққа айналады. Температура таралуынан байқалатыны ағыншалар жүйесі бастапқы кезде жалғыз ағынша түрінде айналады (сурет 2б), одан кейін жазықтықта ағыстың таралу шекарасы квадрат түріне айналады (сурет 2г,д). Авдуревский және басқалардың тәжірибелік жұмыстарында ағыстың осыған ұқса көрінісі байқалған.

Әдебиеттер

- [1] *Шифф Л.Д., Стегер Дж.Л.* Численный расчет стационарных сверхзвуковых вязких течений. // Ракетная техника и космонавтика. – 1980. – Т.18. – № 12. – С. 16–29.
- [2] *Аверенкова Г.И., Ашратов Э.А.* Сверхзвуковые струи идеального газа. // Труды ВЦ МГУ. – 1970. – Ч.1. – С. 4–35.
- [3] *Мышенков В.И.* Расчет течения вязкой ламинарной сверхзвуковой струи в спутном потоке. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1979. – Т.19. – №2. – С. 474–485.
- [4] *Ковалев Б.Д., Мышенков В.И.* Расчет вязкой сверхзвуковой струи, истекающей в спутный поток. // Уч. Зап. ЦАГИ. – 1978. – №3. – С. 125–130.
- [5] *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984. – 715 с.

References

- [1] *Shiff L.D., Steger Dj,L.* Chislini rascheta stacionarnik sverxzvukovix viyazkix techeni. // Raketnaya texnika i kosmonavtika. – 1980. – T.18. – № 12. – S. 16–29.
- [2] *Averenkova G.I., Ashratov E.A.* Sverkhzvukovie stui ideal'nogo gaza. // Trudi VC MGU. – 1970. – Ch.1. – S. 4–35.
- [3] *Mishenkov V.I.* Raschet techeniya viyazkoi laminarnoi sverxzvukovoi strui v sputnom potoke. // Journ. vichisl. matematiki i matem. fiziki. – 1979. – T.19. – №2. – S. 474–485.
- [4] *Kovolev B.D., Mishenkov V.I.* Raschet viyazkoi sverxzvukovi strui, istekaychei v sputnyi potok. // Uch. Zap. CAGI. – 1978. – №3. – S. 125–130.
- [5] *Abramovich G.N.* Teorya turbylentnix strui. – M.: Nauka, 1984. – 715 s.