УДК 004.051

Б.Г. Муканова[1], С.Д. Маусумбекова[2]

[1]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Казахстан, Астана;*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы;*
E-mail: mbsha01@gmail.com; saulemaussumbekova@gmail.com

Решение регуляризованной обратной задачи для эллиптического уравнения в цилиндрических координатах: аналитические формулы*

Рассматривается обратная задача продолжения для эллиптического уравнения для модели стационарной диффузии в цилиндрическом слое. Требуется по данным Коши на внешней оболочке неоднородного цилиндра восстановить стационарное поле на внутренней границе цилиндра. Задача сведена к решению трех типов задач Коши для ОДУ второго порядка. На основе необходимых условий минимума функционала невязки выведены формулы в виде рядов для регуляризованного квазирешения задачи.
Ключевые слова: обратная задача, квазирешение, численный метод, уравнение Лапласа, необходимые условия минимума, метод Фурье.

B. Mukanova, S. Maussumbekova

Solution to a regularized inverse problem for an elliptic equation in cylindrical coordinates: analytical formulas

The continuation inverse problem for a solution to an elliptic equation in cylindrical layer for a model of stationary diffusion process is considered. Cauchy data are given on the outer boundary of the cylindrical layer; one need to recover a field at the inner boundary of the cylinder. The problem is reduced to three different Cauchy problems for a second order ordinary differential equation. On the base of necessary minimality conditions of the residual functional analytical formula for a regularized quasisoltion to the inverse problem is derived.
Key words: inverse problem, quasisolution, numerical method, Laplace's equation, necessary minimality conditions, Fourier method.

Муканова Б., Маусымбекова С.

Цилиндрлік координат жүйесінде эллиптикалық теңдеу үшін регуляризацияланған кері есепті шешу: аналитикалық формулалар

Цилиндрлік қабатта стационарлы диффузия моделі үшін эллиптикалық теңдеуді кері

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант № 1046 / ГФ2.

есебі қарастырылған. Біртекті емес цилиндрдің сыртқы қабатындағы Коши берілгендері бойынша цилиндрдің ішкі шекарасындағы мәнді табу қажет. Есеп үш түрлі екінші ретті жай диффеернциалдық теңдеулерді шешуге келтірілген. Есептің квази шешімі функционалдың минимумының қажетті шарты негізінде қатар ретінде көрсетілген.

Түйін сөздер: кері есеп, квази шешім, сандық әдіс, Лаплас теңдеуі, Фурье әдісі.

Введение. Общее эллиптическое уравнение является универсальной математической моделью для описания множества естественных и технологических процессов, в том числе и стационарной диффузии поля температуры. В технологических процессах актуальной является задача определения температуры на внутренней границе цилиндрического слоя, если исследователю доступна для наблюдений только внешняя граница. Частным случаем математической модели для этой задачи является задача Коши для уравнения Лапласа, которая являет собой классический пример некорректной задачи (пример Адамара). Более того, в областях простой формы решение задачи может быть получено в виде ряда [1], но это решения является экспоненциально неустойчивым по отношению к возмущению данных Коши. Это обстоятельство позволяет отнести эту задачу к сильно некорректным, согласно классификации обратных задач [2]. За последние десятилетия был достигнут существенный прогресс в решении обратных задач, а именно, методы квазирешения [3] и регуляризации [4] позволяют с теперь приемлемой точностью решать поставленную задачу. Стандартным приемом в численном решении обратных задача является метод минимизации функционала невязки на основе градиентных методов. Однако, аналитические методы имеют преимущество перед численными в точности и при анализе зависимости результатов от параметров задачи. В работе [5] впервые получены аналитические формулы для регуляризованного решения начально-краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод основан на системе необходимых условий минимума функционала невязки и построении решения этой системы в конечном виде. В настоящей работе мы реализуем этот подход для решения обратной задачи для трехмерной установившейся теплопроводности в среде с цилиндрической геометрией для эллиптического уравнения с переменным старшим коэффициентом. С учетом того, что заданные функции в краевых условиях путем замены неизвестной функции суммой решений задач, каждая из которой содержит только одно ненулевое условие, не ограничивая общности, мы будем рассматривать однородные краевые условия и правые части в постановке обратной задачи.

1. Постановка задачи

Пусть для наблюдателя доступна внешняя часть цилиндра радиуса, высотой, материал цилиндра неоднороден и коэффициент теплопроводности зависит только от радиуса. Требуется найти температуру на внутренней границе цилиндра, если известны поток тепла и температура на внешней границе.

Запишем математическую модель задачи. Стационарное распределение температуры в цилиндрическом слое описывается эллиптическим уравнением вида:

$$\Lambda u \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ra(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{a(r)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+a(r)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,(r,\varphi,z)\in Q \qquad (1)$$

в области переменных

$$[Q = \{(r, \varphi, z) | r \in (R_1, R_2), \varphi \in [0, 2\pi), z \in (0, H)\}$$

при начально-краевых условиях:

$$u(r, \varphi, 0) = 0, \quad u(r, \varphi, H) = 0, \quad u(R_2, \varphi, z) = s(\varphi, z), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R_2, \varphi, z) = p(\varphi, z), \tag{3}$$

и условиях периодичности по углу φ:

$$u(r, 0, z) = u(r, 2\pi, z), \quad u_\varphi(r, 0, z) = u_\varphi(r, 2\pi, z), \tag{4}$$

Требуется найти решение на границе $r = R_1$.:

$$u(R_1, 0, z) = q(z), \tag{5}$$

здесь функция $a(r)$ описывает коэффициент температуропроводности среды и предполагается некоторой известной гладкой положительной функцией $a(r)$, строго отделенной от нуля и ограниченной сверху.

Задача решается методом квазирешения [5], а именно, путем минимизации регуляризованного функционала невязки вида:

$$J(q)=\frac{R_2}{2}\int_0^H\int_0^{2\pi}(u_r(R_2, \varphi, z; q) - p(\varphi, z))^2 d\varphi dz + \frac{R_1}{2}\beta\int_0^H\int_0^{2\pi} q^2(\varphi, z) d\varphi dz \to \min_{q(.,\cdot)}. \tag{6}$$

Можно показать, что оператор обратной задачи является самосопряженным, что влечет выпуклость функционала невязки. Добавление к функционалу второго слагаемого обеспечивает сильную выпуклость функционала. Это влечет существование и единственность решения задачи минимизации (7) на выпуклом множестве функций интегрируемых с квадратом функций q(z) [6]. Можно также показать аналогично [7], что рассматриваемый функционал является дифференцируемым, поэтому решение задачи минимизации может быть найдено из условия равенства нулю производной Фреше рассматриваемого функционала.

2. Аналитические формулы и метод решения

На основе методов теории оптимизации, аналогично работам [5], [8]-[9], мы можем получить условия минимума функционала невязки, выраженные в виде системы уравнений из прямой и сопряженной задач вида:

$$\Lambda u = 0, \quad \Lambda v = 0, \quad (\mathrm{r}, \varphi, \mathrm{z}) \in \mathrm{Q} \tag{7}$$

с краевыми условиями вида:

$$\begin{array}{l} u(r, \varphi, 0) = 0, \quad u(r, \varphi, H) = 0, \\ v(r, \varphi, 0) = 0, \quad v(r, \varphi, H) = 0, \\ v(R_1, \varphi, z) = 0, \\ a(R_2)v(R_2, \varphi, z) - u_r(R_2, \varphi, z) = -p(\varphi, z), \\ u(R_2, \varphi, z) = 0,\, \beta u(R_1 \varphi, z) = a(R_1) v_r(R_1, \varphi, z), \\ v(r, 0, z = v(r, 2\pi, z), v_\varphi(r, 0, z = v_\varphi(r, 2\pi, z), \\ u(r, 0, z = u(r, 2\pi, z), u_\varphi(r, 0, z = u_\varphi(r, 2\pi, z), \\ \mathrm{r} \in [\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, H]. \end{array} \tag{8}$$

Решение системы (8)-(9) одновременно определит нам искомое решение обратной задачи – функцию $u(r, \varphi, z)$. Зададимся некоторым числом гармоник K, L по углу φ и по z и будем искать решение задачи (8)-(9) в виде рядов:

$$u(r, \varphi, z) = \sum_1^L \sum_1^K u_{kl}(r) \sin k\varphi \sin \frac{\pi l z}{H}, v(r, \varphi, z) = \sum_1^L \sum_1^K r_{kl}(r) \sin k\varphi \sin \frac{\pi l z}{H} \quad (9)$$

Для каждого k, l введем вспомогательные функций $U(r)$, $W(r)$, $V(r)$, которые являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{r}\left(ra(r)U'\right)' - a(r)\left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{\pi^2 l^2}{H^2}\right) U = 0, \;\; \mathrm{r} \in (\mathrm{R_1}, \mathrm{R_2}) \\ U'(R_2) = 1, \;\; U(R_2) = 0, \end{array} \quad (10)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{r}\left(ra(r)W'\right)' - a(r)\left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{\pi^2 l^2}{H^2}\right) W = 0, \qquad \mathrm{r} \in (\mathrm{R_1}, \mathrm{R_2}) \\ W'(R_2) = 0, \quad W(R_2) = 1 \end{array} \quad (11)$$

Решение поставленных выше задач можно получить методами Рунге-Кутта, либо аналитически, если коэффициент теплопроводности постоянный, на основе аппарата функций Бесселя. Уравнения для функций U, W, V идентичны, они приводятся к виду:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{(p(r)+1)}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{\pi^2 l^2}{H^2}\right) R = 0, \;\; p(r) = \ln(a(r)). \quad (12)$$

Разложим в ряд Фурье данные Коши (2)-(3), вычислив коэффициенты двойных рядов:

$$p(\varphi, z) = \sum_1^K \sum_1^L p_{kl} \sin k\varphi \sin \frac{\pi l z}{H}, s(\varphi, z) = \sum_1^K \sum_1^L s_{kl} \sin k\varphi \sin \frac{\pi l z}{H}.$$

После подстановки решения в виде (10) и краевых условий в задачу (8)-(9) мы получим систему двухточечных краевых задач для функций $u_{kl}(r)$ и $v_{kl}(r)$:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{r}\left(a(r)ru'_{kl}\right)' - a(r)\left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{\pi^2 l^2}{H^2}\right) u_{kl} = 0, \\ \frac{1}{r}\left(a(r)rv'_{kl}\right)' - a(r)\left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{\pi^2 l^2}{H^2}\right) v_{kl} = 0, \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{array}{l} v_{kl}(R_1) = 0, \\ a(R_2)v_{kl}(R_2) - u'_{kl}(R_2) = -p_{kl}, \\ u_{kl}(R_2) = s_{kl}, \\ \beta u_{kl}(R_1) - a(R_2)v'_{kl}(R_1) = 0. \end{array} \quad (14)$$

Будем искать решение задач (16)-(17) для каждой пары (k,l) в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач (11)-(13):

$$u_{kl}(r) = AU(r) + CW(r), v_{kl}(r) = BV(r) \quad (15)$$

Подставим выражения (18) в условия (17) для каждой пары значений(k, l), откуда получаем систему линейных уравнений для неопределенных коэффициентов A, B, C:

$$C = \frac{s_{kl}}{W(R_2)}, \quad A = a_2 BV(R_2) + p_{kl}, \quad B = \frac{-\beta U(R_1)p_{kl} - \beta s_{kl} W(R_1)/W(R_2)}{a_2(\beta V(R_2)U(R_1) - 1)},$$

$$A = \frac{-\beta^2 s_{kl} V(R_2) W(R_1)/W(R_2) + p_{kl}}{\beta V(R_2) U(R_1) - 1}.$$

Запишем частичную сумму ряда (10) в точке R_1, тем самым определяя искомую температуру на внутренней границе цилиндра:

$$q(\varphi, z) = u(R_1, \varphi, z) = \sum_1^L \sum_1^K u_{kl}(R_1) \sin k\varphi \sin \frac{\pi l z}{H},$$

где

$$u_{kl}(R_1) = \frac{-\beta^2 s_{kl} V(R_2) W(R_1)/W(R_2) + p_{kl}}{\beta V(R_2) U(R_1) - 1} U(R_1) + \frac{s_{kl}}{W(R_2)} W(R_1).$$

Мы реализовали описанный выше алгорим решения обратной задачи для среды с постоянным коэффициентом теплопроводности. На рисунке 1 мы сравниваем результат восстановления с точным решением. На результат расчета влияли как значения параметров задачи, так и значения параметров регуляризации β и число учитываемых гармоник L.

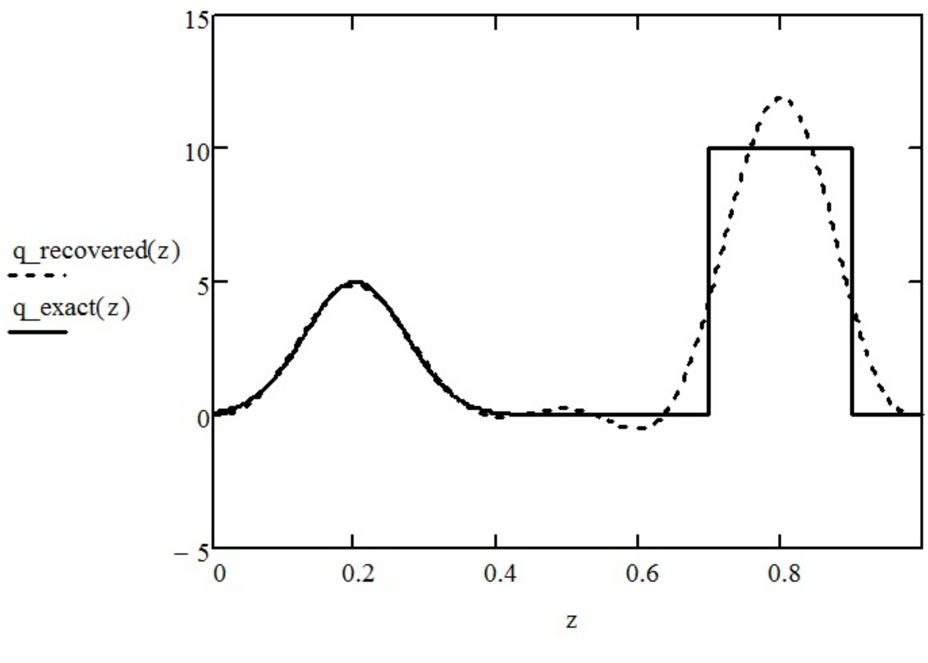

Рисунок 1. Результат решения обратной задачи при параметрах расчета $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, число гармоник L=10, β=0.

Предварительные расчеты показывают, что разработанный нами метод позволяет с высокой точность решать задачи Коши для эллиптического уравнения в цилиндрическом слое в случае гладких данных задачи. Отметим, что метод не позволяет с хорошей точностью восстановить разрывные функции.

Литература

[1] *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР, 1957. – Т.112. – №2. – С. 195–197.

[2] *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – Москва: Наука, 1978. – 206 с.

[3] *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах. // Матем. сборник, 1963 – Т.61. – №2. – С. 211–223.

[4] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1974. – 224 с.

[5] *Mukanova B.* Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation. // Inverse Problems in Science and Engineering, 2012. – V.21. – Iss.8. – P. 1255–1267.

[6] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[7] *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Аяпбергенова А.Т., Нечаев Д.В.* Оптимизационный метод решения задач продолжения. // Вычислительные технологии, 2004. – Т.9. Специальный выпуск: Труды Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям, 2004. – С. 49–60.

[8] *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.

[9] *Егоров А.И.* Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопроводности. // Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики. – 1972. – Т.12. – №3. – С. 791–799.

References

[1] *Lavrentiev M.M.* O zadache Koshi dlja linejnyh jellipticheskih uravnenij vtorogo porjadka. // DAN SSSR, 1957. – T.112. – №2. – S. 195–197.

[2] *Ivanov V.K , Vasin V.V , Tanana V.P.* Teorija linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozhenija. – Moskva: Nauka, 1978. – 206 s.

[3] *Ivanov V.K.* O nekorrektno postavlennyh zadachah // Matem. sbornik, 1963 – T.61. – №2. – S. 211–223.

[4] *Tikhonov A.N, Arsenin V.Y.* Metody reshenija nekorrektnyh zadach. – Moskva: Nauka, 1974. – 224 s.

[5] *Mukanova B.* Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation. // Inverse Problems in Science and Engineering, 2012. – V.21. – Iss.8. – P. 1255–1267.

[6] *Vasil'ev F.P.* Metody reshenija jekstremal'nyh zadach. – Moskva: Nauka, 1981. – 400 s.

[7] *Kabanikhin SI Bektemesov MA Ayapbergenova AT, DV Nechaev* Optimizacionnyj metod reshenija zadach prodolzhenija. // Vychislitel'nye tehnologii, 2004. – T.9. – Special'nyj vypusk: Trudy Soveshhanija rossijsko-kazahstanskoj rabochej gruppy po vychislitel'nym i informacionnym tehnologijam, 2004.– S. 49–60.

[8] *Lions Zh.L.* Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chastnymi proizvodnymi. – Moskva: Mir, 1972. – 416 s.

[9] *Egorov A.I.* Ob uslovijah optimal'nosti v odnoj zadache upravlenija processom teploprovodnosti. // Zhurn. Vychisl. Matematiki i mat. Fiziki. – 1972. – T.12. – №3. – S. 791–799.