

УДК 681.51:539.5

А.М. Полатов

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Республика Узбекистан, Ташкент; E-mail: asad3@yandex.ru

Численное решение задач упругопластического деформирования композитных материалов

В статье описывается численное моделирование расчета прочности волокнистых конструктивных материалов. Математическое моделирование процесса упругопластического деформирования волокнистых материалов основывается на анизотропной теории пластичности. Для исследования деформированного состояния материала проводится вычислительный эксперимент. Приводятся результаты анализа упругопластического состояния конструктивных материалов.

Ключевые слова: математическая модель, вычислительный эксперимент, волокнистый композит, упругопластическое состояние, прочность.

A.M. Polatov

Numerical simulation of solving nonlinear deformation process of composite materials

This paper describes the numerical simulation of calculating of fibrous construction materials strength. Mathematical modeling of physically nonlinear of fibrous materials is based on anisotropic plasticity theory. The research of material deformation state is based on a computational experiment. Results of elastic-plastic analysis of construction materials are given.

Key words: mathematical model, computational experiment, fiber composite, elastic-plastic state, strength.

A.M. Polatov

Формасы өзгерген композиттік материалдардың сандық моделдерінің сызықсыз есебін шығару

Бұл мақалада талшықты конструкциялық материалдардың беріктігін сандық есептеуі суреттеледі. Талшықты материалдарды физикалық түрде сызықсыз деформациялануды математикалық модельдеу үрдісі анизотропиялық созымдылық теориясында негіздейді. Материалды өзгертілген күйін зерттеу үшін есептеуіш тәжірибе жасайды. Конструкциялық материалдарды созылмалы күйін талдау нәтижелері келтіріледі.

Түйін сөздер: математикалық модель, есептеуіштік тәжірибе, талшықты композит, созылмалы күй, беріктік.

Современное состояние вычислительной техники и технологий позволяют посредством разработки численной модели изучаемого объекта, которая является эффективным инструментом математического моделирования, получить новые знания о моделируемом объекте. Численное моделирование является методом изучения сложных систем, так как численные модели позволяют проводить вычислительные эксперименты

на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта [1, 2]. Одним из областей, где применяется численное моделирование, является проектирование новых композиционных материалов и исследование прочностных характеристик композитов, которые получили широкое распространение в современных технологиях. Анализ поведения таких материалов осуществляется на основе сведения неоднородного по составу материала к однородному, с эффективными механическими параметрами, которые связывают неоднородную среду с эквивалентной ей однородной средой. Для однонаправленных волокнистых композитов используются выражения, полученные на основе асимптотических методов расчета композиционных материалов. Они позволяют учитывать радиальное взаимодействие компонентов, вызванное различием коэффициентов Пуассона матрицы и волокна [3]. Такой подход позволяет достаточно точно описать квазистатическое состояние композитных конструкций и посредством математического моделирования упругопластического поведения материалов, исследовать напряженно-деформированное состояние конструкции.

Разработанный специализированный комплекс программ позволяет исследовать упругопластическое деформирование в материалах и получить визуальную картину результатов расчета. На основе вычислительного эксперимента, путем подбора необходимого соотношения объемного содержания и механических параметров волокна и матрицы в композите, можно проектировать новые материалы с заранее заданными свойствами. Программный комплекс состоит из: системной составляющей, для организации функционирования комплекса; функционального наполнения, которое представляет собой набор программ, реализующий конкретную поставленную задачу из предметной области комплекса; программного обеспечения построения конечноэлементной модели области, занятой телом, и визуализации результатов расчета; интерфейса, обеспечивающего диалог пользователя с комплексом программ.

Для исследования упругопластического напряженно-деформированного состояния волокнистых композитов используется теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропной среды, предложенная проф. Б.Е. Победря [4]. При рассмотрении армированного композита, жесткость армирующих элементов которого существенно превышает жесткость связующего, появляется возможность использования упрощенной деформационной теории пластичности. Упрощенная теория позволяет применить теорию малых упругопластических деформаций для решения конкретных прикладных задач. Суть упрощения заключается в предположении того, что при простом растяжении композита в направлении оси трансверсальной изотропии и направлении, перпендикулярном к ней, пластические деформации не возникают. Вследствие чего интенсивность напряжений и деформаций определяются отдельно как по главной оси трансверсальной изотропии, так и по перпендикулярно расположенной плоскости.

Квазистатическая задача теории малых упругопластических деформаций трансверсально-изотропных тел состоит в решении уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V$$

на основе обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

и краевых условий

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^o, \quad x_i \in \Sigma_1, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^o, \quad x_i \in \Sigma_2,$$

где u_i - компоненты вектора перемещений; X_i, S_i - объёмные и поверхностные силы; Σ_1, Σ_2 - части поверхности Σ объёма V ; n_j - внешняя нормаль к поверхности Σ_2 ; C_{ijkl} - тензор упругих констант, который зависит от пяти независимых упругих постоянных.

Для упрощенной трансверсально-изотропной теории пластичности обобщенный закон Гука записывается соотношениями [5]:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma} &= (\lambda_2 + \lambda_4) \tilde{\theta} + \lambda_3 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_3 \tilde{\theta} + \lambda_1 \varepsilon_{33}, \\ P &= P(p), \quad Q = Q(q), \end{aligned} \right\}$$

где

$$P = \begin{cases} 2\lambda_7 p, & \text{если } p < p^* \\ 2\lambda_7 p^* + 2\lambda_7'(p - p^*), & \text{если } p > p^* \end{cases},$$

$$Q = \begin{cases} 2\lambda_9 q, & \text{если } q < q^* \\ 2\lambda_9 q^* + 2\lambda_9'(q - q^*), & \text{если } q > q^* \end{cases},$$

p^*, q^* - соответствующие пределы упругой деформации.

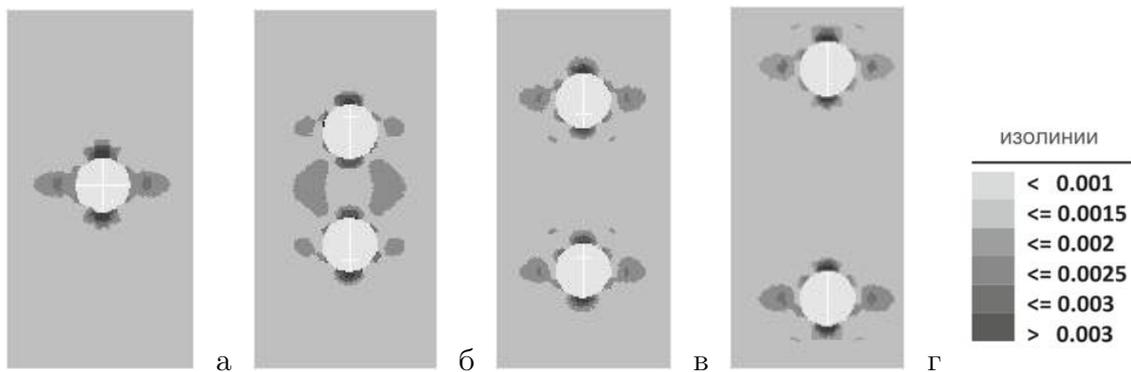
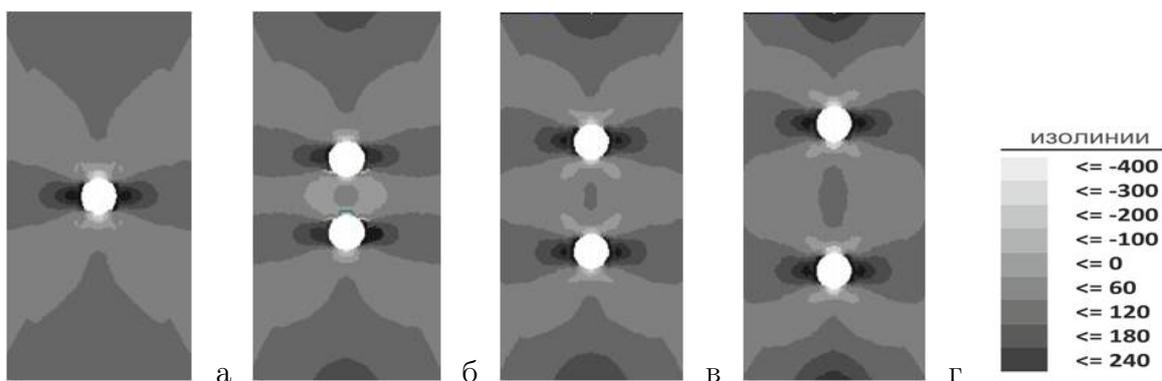
Механические параметры трансверсально-изотропного материала связаны с модулями λ_i следующими соотношениями:

$$\lambda_3 = E'(1 - \nu)/l; \quad \lambda_4 = E(\nu + k\nu^2)/[(1 + \nu)/l]; \quad \lambda_5 = E\nu'/l;$$

$$\lambda_7 = G = E/[2(1 + \nu)]; \quad \lambda_9 = G'; \quad l = 1 - \nu - 2\nu'^2 k; \quad k = E/E'.$$

Далее рассматривается задача, связанная с увеличением прочности конструкции путем внесения конструктивных изменений. Анализируется влияние разгрузочных полостей на напряженное состояние однонаправленных композиционных материалов сложной конфигурации. Исследуется процесс уменьшения напряжений за счет изменения формы контура при минимально искаженном напряженном состоянии. Известно что, путем конструктивных изменений можно достичь улучшения в распределении напряжений и добиться увеличения прочности конструкции [6]. Отметим, что в [7] приводится вышеописанный эффект на примере повышения усталостной прочности для круглых стержней с поперечными отверстиями. Влияние разгрузочных щелей на напряженное состояние породного массива в окрестностях выработки описано в [8]. Анализ влияния и взаимовлияния разгружающих полостей в изотропных конструкционных материалах исследуется в [9, 10].

С этой целью, в трехмерной постановке, исследуется упругопластическое напряженно-деформированное состояние волокнистой пластины из бороалюминия. Она одноосно

Рисунок 1. Распределение значений интенсивности деформаций p_u Рисунок 2. Распределение значений компоненты напряжений σ_{xx}

растягивается по направлению волокна $P_{zz} = 950$ МПа. Пластина, из чисто конструктивных соображений, снабжена круглым отверстием в центре. Размеры прямоугольной пластины: высота - 1 см, ширина - 0.5 см, толщина - 0.1 см, радиус отверстия $R = 0.05$ см. Объемное содержание борных волокон - 35%, соответствующие механические параметры: $E = 0.9964 \cdot 10^5$ МПа, $E' = 1.8532 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0.4311 \cdot 10^5$ МПа, $G' = 0.3802 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.1558$, $\mu' = 0.2762$, предел упругой деформации дюралюминия $p^* = 0.003$.

Приводится анализ результатов решения задачи, полученных на основе проведения вычислительного эксперимента. В исследуемой задаче в окрестности отверстия также наблюдается повышенное напряжение (рис. 1.а). Предположим, что к существующему отверстию добавляется второе (рис. 1.б-г).

Для исследования влияния расстояния между двумя вертикально расположенными отверстиями проводится вычислительный эксперимент. Установлено, что дополнительное отверстие также вызывает повышение напряжений в окрестностях отверстий. Однако известно [6], что взаимовлияние отверстий ведет к уменьшению общего напряжения. Значения интенсивности деформаций p_u при расстоянии между центрами отверстий $h = 0.2$ см уменьшаются во внешних точках на 7.7%, а во внутренних - на 26.7% (рис. 1.б). Интересно отметить, что для упругой задачи эти значения составляют, соответственно, 6.7% и 32.7%. Значения параметров напряженно-деформированного состояния в этом случае меньше, чем в случае с изолированным отверстием. В таблице приведены значения в точках контуров пары отверстий, которые располагаются наиболее близко

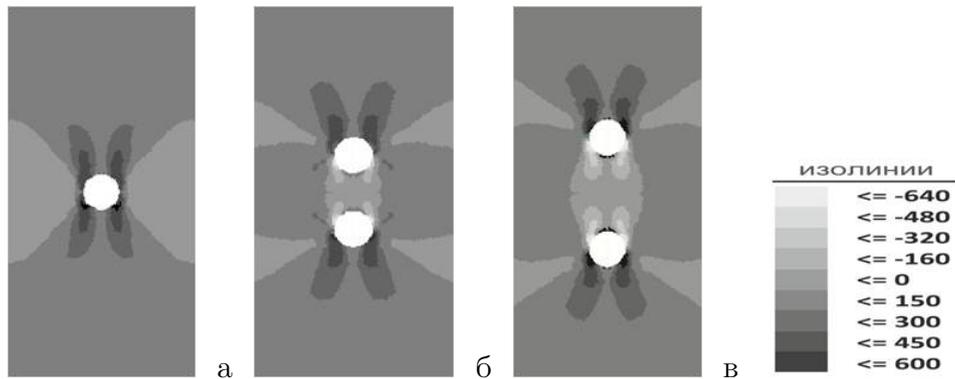


Рисунок 3. Распределение значений компоненты напряжений τ_{zx}

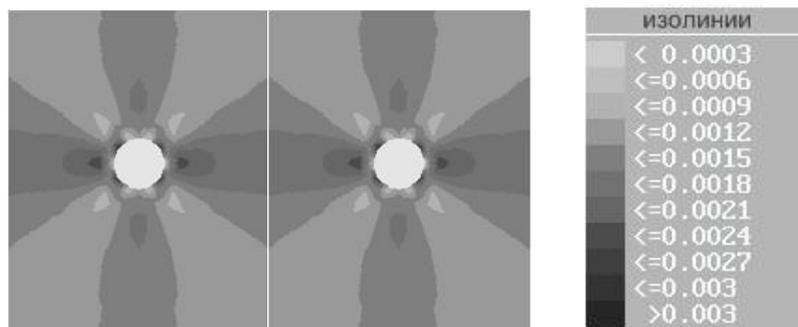


Рисунок 4. Распределение значений интенсивности деформаций p_u

друг к другу (в знаменателе) и наиболее удаленные (в числителе). При $h = 0.2$ см два вертикально расположенных отверстия формируют единый концентратор напряжения. По мере удаления отверстий друг от друга, т.е. при $h = 0.3$ и 0.4 см, их взаимовлияние исчезает (рис.1. в, г). Это явление можно объяснить, используя представление о силовом потоке, описанном в работе [6]. Внешние силы создают поток, который распространяется вдоль конструкции. Линия давления (силовой поток) отклоняется вторым отверстием. Влияние отверстия после того, как проходящий силовой поток отклонен, возрасти уже, не может.

Таблица 1. Значения параметров в точках контуров отверстий

отверстие		Упругая задача		Упругопластическая задача	
		p_u	p_u , МПа	p_u	p_u , МПа
изолированное		0.00524	451.99	0.00449	322.72
пара отверстий	$h = 0.2$	0.00489	421.77	0.00414	307.68
		0.00353	304.22	0.00325	269.38
	$h = 0.3$	0.00520	448.81	0.00452	323.83
		0.00468	403.48	0.00433	315.92
	$h = 0.4$	0.00560	482.73	0.00507	347.72
		0.00527	454.05	0.00491	340.89

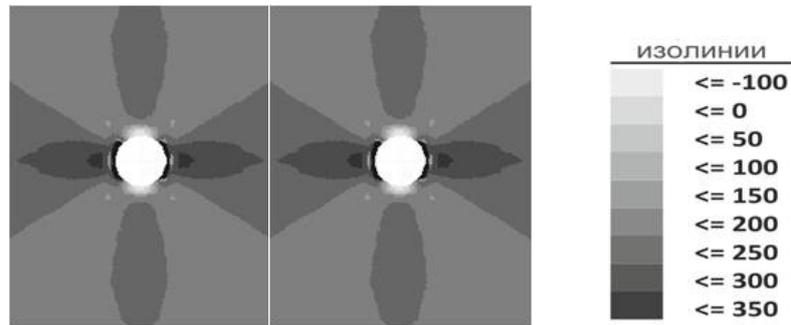


Рисунок 5. Распределение значений компоненты напряжений σ_{xx}

Для изучения эффекта разгружающих отверстий анализируется распределение компонент напряженного состояния. Формирование пластической зоны по плоскости изотропии в основном определяется компонентой напряжений σ_{xx} (рис. 2). Влияние остальных параметров незначительно.

При $h = 0.2$ см между отверстиями формируется стабильная зона сжатия (рис. 2.а). Она включает в себя также и окрестности близлежащих точек отверстий. Распределение значений компонент напряжений τ_{zx} и σ_{zz} приводится на рис. 3 и 4. Наибольшие значения касательных напряжений τ_{zx} концентрируются по боковым контурам отверстий в промежутке углов от 30 до 45 градусов относительно горизонтального диаметрального сечения. В окрестностях изолированного отверстия значения τ_{zx} отрицательные (рис. 3.а). Два вертикальных отверстия образуют зоны, как с отрицательными, так и с положительными значениями (рис. 3.б,в).

Далее исследуется напряженно-деформированное состояние полосы бесконечной длины из волокнистого материала с системой однонаправленных отверстий. Волокна располагаются по направлению оси OZ . Объемное содержание борных волокон 35%. Пластина растягивается по направлению волокон ($P_{zz} = 950$ МПа). Центры системы отверстий радиуса $R = 0.05$ см располагается на оси. Расстояние между центрами отверстий $l = 0.5$ см, высота полосы – 1 см, толщина – 0.1 см.

Анализ значений интенсивности деформаций указывает на наличие взаимовлияния горизонтально расположенных отверстий (рис. 4). Окрестности отверстий разгружаются, и пластические зоны отсутствуют. Вся полоса находится в упругом напряженном состоянии. Повышенные значения наблюдаются вдоль оси системы отверстий.

Распределение значений компонент напряжений σ_{xx} отражает картину напряженного состояния (рис. 5). Концентрация растягивающих значений напряжений по боковым сторонам отверстий обусловлена их взаимовлиянием. Повышенное напряженное состояние наблюдается также и в областях между отверстиями.

Далее исследуется растяжение бесконечной полосы с парной системой двух вертикально расположенных отверстий. Расстояние между отверстиями равно по вертикали $h = 0.2$ см, по горизонтали – $l = 0.5$ см. На рис. 6 представлено распределение значений интенсивности деформаций p_u . Разгрузка деформированного состояния полосы является результатом взаимовлияния отверстий, как по вертикали, так и по горизонтали (рис. 6). Значения интенсивности деформаций полосы несколько ниже, чем в случае системы одноосных отверстий.

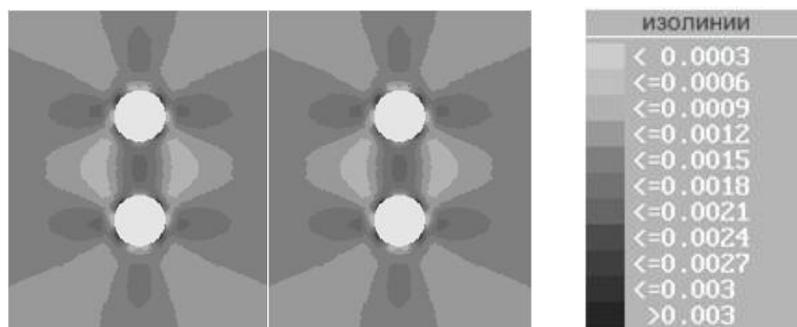


Рисунок 6. Распределение значений интенсивности деформаций p_u



Рисунок 7. Распределение значений компоненты напряжений σ_{xx}

Распределение количественных значений напряжений по компоненте σ_{xx} приведено на рис. 7. В отличие от пластины с изолированным отверстием (рис. 2), между вертикальными отверстиями отсутствует зона сжимающих напряжений, они сконцентрированы только по бокам области.

В заключении необходимо отметить, что анализ результатов вычислительного эксперимента позволяет определить места для размещения дополнительных отверстий, разгрузить их и уменьшить концентрацию напряжений в конструкциях.

Литература

- [1] Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журнал индустр. матем. – Новосибирск. – 2009. – Т.12. – №3. – С. 5–14.
- [2] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры, – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
- [3] Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: "Пороги 2008. – 196 с.
- [4] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.

- [5] *Халджигитов А.А., Бабаджанов М., Адамбаев У.Э.* Равновесие параллелепипеда по деформационной теории трансверсально изотропных сред. // Проблемы механики, Ташкент. 2000. – № 4-5. – С. 12–16.
- [6] *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. – ОГИЗ: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
- [7] *Thum A. u. H. Oschatz.* Steigerung der Dauerfestigkeit bei Rundstiiben mit Querbohrungen. // Forschg. auf Ing. –Wes., Т.3. – №2, 1932. – P. 87–93.
- [8] *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Костромин П.П.* Влияние разгрузочных щелей на напряженное состояние и ползучесть породного массива в окрестности выработки. // Вычислительная механика сплошных сред, Новосибирск. – 2011. – Т.4. – №2. – С. 110–118.
- [9] *Поляков Б.Н., Няшин Ю.И.* К созданию САПР роликотправильных машин. // САПР в тяжелом машиностроении: Сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 2000. – С. 45–68.
- [10] *Полатов А.М.* Разгружающие полости в конструкционных материалах. // Проблемы механики. – Ташкент, 2012. – № 2. – С. 28–31.

References

- [1] *Annin B.D.* Transversal'no-izotropnaya uprugaya model' geomaterialov // Sib. jurn. industr. matem. – Novosibirsk. – 2009. – Т.12. – №3. – S. 5–14.
- [2] *Samarskiy A.A., Mihailov A.P.* Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery. – M.: Fizmatlit, 2001. – 320 s.
- [3] *Bol'shakov V.I., Andrianov I.V., Danishevsky V.V.* Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnykh materialov s uchetom vnutrennei struktury. – Dnepropetrovsk: "Porogi 2008. – 196 s.
- [4] *Pobedria B.E.* Mekhanika kompozitsionnykh materialov. – M.: MGU, 1984. – 336 s.
- [5] *Khaldzhigitov A.A., Babadzhanov M., Adambaev U.E.* Ravnovesie parallelepipeda po deformatsionnoi teorii transversal'no izotropnykh sred. // Problemy mekhaniki, Taschkent. 2000. – № 4-5. – S. 12–16.
- [6] *Neiber G.* Kontsentratsia napriazhenii. – OGIZ: Gostekhizdat, 1947. – 204 s.
- [7] *Thum A. u. H. Oschatz.* Steigerung der Dauerfestigkeit bei Rundstiiben mit Querbohrungen. // Forschg. auf Ing. –Wes., Т.3. – №2, 1932. – P. 87–93.
- [8] *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Kostromina P.P.* Vlianie razgruzochnik stselei na napriazhennoe sostoianie i polzuchest' porodnovo massiva v okrestnosti vyrabotki. // Vychislitel'naia makhanika splostnykh sred. Novosibirsk. – 2011. – Т.4. – №2. – S. 110–118.

- [9] *Poliakov B.N., Niaschin Ju.I.* K sozdaniju SAPR rolikopravil'nykh maschin. // SAPR v tiazhelom maschinostroenii: Sb. nauch. tr. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. gos. prof.-ped. un-ta, 2000. – S. 45–68.
- [10] *Polatov A.M.* Razgruzhaiyschie polosti v konstruktsionnykh materialakh. // Problemy mekhaniki. – Taschkent, 2012. – № 2. – S. 28–31.