Сызықты емес Навье – Стокс теңдеулер жүйесіне интегралдық қосымша шартпен қойылған кері есептің шешімділігі[1]

У.У.Абылкаиров, С.Е.Айтжанов
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
e-mail: SAitzhanov@mail.ru

Аннотация

Бұл жұмыста Навье-Стокс теңдеулер жүйесіне интегралдық шартпен кері есебі зерттелген. Тізбектей жуықтау әдісімен кері есептің жалпылама шешімділігі дәлелденді. Кері есептің шешімі бар және жалғыздығы туралы теорема алынды.

[1] жұмысында жалпы параболалық теңдеуге интегралдық бақылау шартымен қойылған кері есебінің жалпылама шешімділігі зерттелген. Әр түрлі әдістермен Навье-Стокс теңдеулер жүйесіне қосымша шарттармен қойылған кері есептер [2-9] жұмыстарында қарастырылған.

[10], [11] жұмыстарда параболалық теңдеулер үшін қойылған кері есептер жартыгруппа әдістерімен зерттелген, бірақ та бұл әдіс операторлардың сызықты және теңдеу коэффициенттерінің t уақыттан тәуелсіз болуын қажет етеді.

$Q_T = \Omega \times [0,T]$, $\Omega \subset R^2$ цилиндрінде цилиндрінде сызықты емес Навье-Стокс теңдеулер жүйесіне қойылған кері есебін қарастырайық, төмендегі (1)-(5) жүйелерді қанағаттандыратын $\vec{v}(x,t)$ және $f(t)$ функцияларын анықтау керек

$$\frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} + v_k \vec{v}_{x_k} + \nabla p(x,t) = \nu \Delta \vec{v}(x,t) + f(t)\vec{\lambda}(x,t), \tag{1}$$

$$div\vec{v} = 0, \tag{2}$$

бастапқы шартын

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \tag{3}$$

шекаралық шартын

$$\vec{v}|_S = 0, \tag{4}$$

және келесі интегралдық шартын

$$\int_\Omega \vec{u}(x,t) \cdot \vec{v}(x,t) dx = e(t) \tag{5}$$

мұндағы $\vec{\lambda}(x,t)$, $\vec{v}_0(x)$, $e(t)-$ берілген функциялар.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

(1)-(5) кері есебін берілген немесе күтілетін энергия $e(t)$ жету үшін, $f(t)$ функциясын дәл басқару есебі ретінде түсіндіруге болады. Үлестірімділік параметрлер жүйесіне қойылған кері есептер басқару теория әдістерімен [8], [9] жұмыстарында зерттелінген.

Анықтама 1. Егер $\vec{v}(x,t) \in L_\infty \left(0,T;\ \overset{0}{J}(\Omega)\right) \bigcap L_2 \left(0,T;\ \overset{0}{J}_1(\Omega)\right)$ және $f(t) \in L_2(0,T)$ функциялары мына интегралдық теңдіктерді қанағаттандырса

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{Q_T} \left[-\vec{v}\cdot\vec{\xi}_t + \nu\nabla\vec{v}\cdot\nabla\vec{\xi} - v_k\vec{v}\cdot\vec{\xi}_{x_k}\right] dxdt = \\ &\qquad\qquad = \textstyle\int_{Q_T} f(t)\vec{\lambda}\cdot\vec{\xi}dxdt + \int_\Omega \vec{v}_0(x)\vec{\xi}(x,0)dx,\end{aligned} \tag{6}$$

кез келген $\xi(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \bigcap \overset{0}{J}(Q_T),\ \ \xi(x,T) = 0,$

$$e'(t) = \int_\Omega \vec{u}_t\cdot\vec{v}dx - \nu\int_\Omega \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}dx + \int_\Omega v_k\vec{v}\cdot\vec{u}_{x_k}dx + f(t)\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\lambda}dx, \tag{7}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}&\vec{u}(x,t) \in C^1\left(0,T;\ \overset{0}{J}_1(\Omega)\right),\ e(t) \in W_2^1(0,T),\ \vec{\lambda}(x,t) \in C(\bar{Q}_T),\\ &\vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega),\ \ t\in[0,T]\ \ \text{үшін}\ \ \textstyle\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\lambda}dx \neq 0,\end{aligned} \tag{8}$$

онда $\vec{v}(x,t)$ және $f(t)$ функцияларын (1)-(5) кері есебінің жалпылама шешімі деп айтамыз.

Лемма 1. Егер (1)-(5) кері есебінің шешімі $(\vec{v},\ \ f)$ жеткілікті тегіс болса, онда (1)-(5) кері есебі (1)-(4), (7) есеп қойылымына берілгендері бірдей болған жағдайда эквивалентті, сонымен қатар $f(t)$ функциясын айқын түрде табуға болады:

$$f(t) = \left[e'(t) - \int_\Omega \vec{u}_t\vec{v}dx + \nu\int_\Omega \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}dx - \int_\Omega v_k\vec{v}\vec{u}_{x_k}dx\right]\left(\int_\Omega \vec{u}\vec{\lambda}dx\right)^{-1}.$$

Теорема 1. (8) шарты орындалсын, онда (1)-(5) кері есебінің $\vec{v}(x,t) \in V_2(Q_T)$ және $f(t) \in L_2(0,T)$ жалпылама шешімі бар және жалғыз болады.

Дәлелдеу. Тізбектей жуықтау әдісімен (1)-(5) кері есебінің жалпылама шешімі «тұтас» уақыт аралығында бар және жалғыз екенін дәлелдейік. Нөлдік жуықтау ретінде $\vec{v}^0 = 0$ деп алайық және барлық $m = 1,2,...$ үшін $(\vec{v}^m,\ \ f^m)$ жуықтауларын келесі қатыстардан анықтаймыз:

$$\begin{aligned}&f^m(t) = \left(\textstyle\int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{\lambda}dx\right)^{-1}\left[e'(t) - \textstyle\int_\Omega \vec{u}_t\cdot\vec{v}^{m-1}dx + \right.\\ &\qquad\qquad\left. +\nu\textstyle\int_\Omega \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}^{m-1}dx - - \textstyle\int_\Omega v_k^{m-1}\vec{v}^{m-1}\cdot\vec{u}_{x_k}dx\right],\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vec{v}^m}{\partial t} + v_k^m\vec{v}_{x_k}^m + \nabla p^m = \nu\Delta\vec{v}^m + f^m\vec{\lambda}(x,t), \tag{10}$$

$$div\vec{v}^m = 0, \tag{11}$$

$$\vec{v}^m|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \tag{12}$$

$$\vec{v}^m|_S = 0. \tag{13}$$

Әрбір $f^m(t)$ үшін жалғыз ғана $\vec{v}^m(x,t)$ вектор-функциясы бар және (10)-(13) есебін жалпылама шешімі ретінде қанағаттандыратынын көрсетейік.

(10)-(13) есебінің шешімі бар және жалғыз екенін дәлелдеу.

$f^m(t)$ функциялары $\vec{v}^{m-1}(x,t)$ вектор-функциялары арқылы өрнектелетіндіктен, олар белгілі функциялар болады, $f^m(t)$ функциясын (10) апарып қояйық, және (10)-(13) есебінің бір мәнді шешілетіндігін зерттейік. (10)-(13) сызықты емес Навье-Стокс үшін тура есебі [12-14] жұмыстарында жақсы зерттелінген.

Анықтама 2. ([12]) $\vec{v}^m(x,t) \in V_2(Q_T)$ функциясы төмендегі интегралдық теңдікті қанаұаттандырса

$$\int_{Q_T} \left[-\vec{v}^m \cdot \vec{\xi}_t + \nu \nabla \vec{v}^m \cdot \nabla \vec{\xi} - v_k^m \vec{v}^m \cdot \vec{\xi}_{x_k} \right] dxdt = \\ = \int_{Q_T} f^m \vec{\lambda} \cdot \vec{\xi} dxdt + \int_\Omega \vec{v}_0(x) \vec{\xi}(x,0) dx, \tag{14}$$

кез – келген $\vec{\xi}(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \bigcap \overset{0}{J}(Q_T)$, $\vec{\xi}(x,T) = 0$, мұндағы $\vec{\lambda} \in C(\bar{Q}_T)$,$\vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$, $f^m \in L_2(0,T)$, онда $\vec{v}^m(x,t)$ функциясын (10)-(13) есебінің жалпылама шешімі деп айтамыз.

Лемма 2. ([12]) Кез келген $\vec{\lambda} \in C(\bar{Q}_T)$, $\vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$, $f^m \in L_2(0,T)$ үшін (10)-(13) есебінің $V_2(Q_T)$ кеңістігінде шешімі бар және жалғыз болады.

Сонымен 2 лемманың негізінде, $\{(\vec{v}^m,\ f^m)\}$ тізбектері қисынды анықталғандығын көрсетеді. Енді $V_2(Q_T) \times L_2(0,T)$ кеңістігінде $\{(\vec{v}^m,\ f^m)\}$ тізбектері фундаменталді тізбектер екенін дәлелдейік. $V_2(Q_T) \times L_2(0,T)$ кеңістіктері толық болғандықтан, онда $(\vec{v},\ f)$ жұбы $\{(\vec{v}^m,\ f^m)\}$ тізбектерінің шегі болады, яғни $m \to \infty$–да $(\vec{v}^m,\ f^m) \to (\vec{v},\ f)$, олай болса $(\vec{v},\ f)$ жұбы (1)-(5) кері есебінің ізделінді әлсіз шешімі болады.

$\vec{w}^{m+1} = \vec{v}^{m+1} - \vec{v}^m$,$\Phi^{m+1} = f^{m+1} - f^m$ белгілеулерін енгізейік, онда (9), (10)-(13) мына түрге келеді

$$A^{m+1} = \left[\nu \int_\Omega \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{C}^m dx - \int_\Omega \vec{u}_t \cdot \vec{C}^m dx - \right. \\ \left. - \int_\Omega \left(v_k^m \vec{C}^m + C_k^m \vec{v}^{m-1} \right) \vec{u}_{x_k} dx \right] \left(\int_\Omega \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx \right)^{-1}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \vec{C}^{m+1}}{\partial t} + v_k^{m+1} \vec{C}_{x_k}^{m+1} + C_k^{m+1} \vec{v}_{x_k}^m + \nabla \left(p^{m+1} - p^m \right) = \nu \Delta \vec{C}^{m+1} + A^{m+1} \vec{\lambda}, \tag{16}$$

$$div \vec{C}^{m+1} = 0, \tag{17}$$

$$\left. \vec{C}^{m+1} \right|_{t=0} = 0, \tag{18}$$

$$\left. \vec{C}^{m+1} \right|_S = 0. \tag{19}$$

Оң жағындағы A^{m+1} былайша бағалайық

$$|A^{m+1}| \leq \Big[\nu \int_\Omega |\nabla \vec{u}| \cdot \left|\nabla \vec{C}^m\right| dx + \int_\Omega |\vec{u}_t| \cdot \left|\vec{C}^m\right| dx + \int_\Omega |\vec{u}_{x_k}| \cdot |v_k^m| \cdot \left|\vec{C}^m\right| dx +$$

$$+ \int_\Omega |\vec{u}_{x_k}| \cdot |C_k^m| \cdot |\vec{v}^{m-1}|\, dx\Big] \left(\int_\Omega \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx\right)^{-1} \leq c_3 \left\|\nabla \vec{C}^m\right\|.$$

τ бойынша 0–ден t шейін интегралдайық, сонда

$$\int_0^t \left|A^{m+1}\right|^2 d\tau \leq c_4 \left\|\vec{C}^m\right\|^2_{V_2(Q_t)}. \tag{20}$$

(16) теңдеуді $L_2(Q_t)$ кеңістігінде $\vec{C}^{m+1}$ скаляр көбейтсек, онда

$$\frac{1}{2}\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,\Omega} + \nu \left\|\nabla \vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t} = -\int_{Q_t} \vec{v}^m_{x_k} C_k^{m+1} \vec{C}^{m+1} dQ_\tau + \int_{Q_t} A^{m+1} \vec{\lambda} \cdot \vec{C}^{m+1} dQ_\tau. \tag{21}$$

(21) оң жағын Гельдер теңсіздігін және Лемма 1 ([12], 19 бет) пайдаланып, бағалайық, сонда

$$\left| -\int_{Q_t} \vec{v}^m_{x_k} C_k^{m+1} \vec{C}^{m+1} dQ_\tau \right| \leq \int_{Q_t} \left|\vec{v}^m_{x_k}\right| \cdot \left|\vec{C}^{m+1}\right|^2 dQ_\tau \leq \left\|\vec{v}^m_{x_k}\right\|_{2,Q_t} \cdot \left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{4,Q_t} \leq$$

$$\leq c_5 \left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{4,Q_t} \leq c_5\sqrt{2}\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|_{2,Q_t} \left\|\nabla \vec{C}^{m+1}\right\|_{2,Q_t} \leq \varepsilon \left\|\nabla \vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t} + \tfrac{c_5^2}{\varepsilon}\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t},$$

$$\left| \int_{Q_t} A^{m+1} \vec{\lambda} \cdot \vec{C}^{m+1} dQ_\tau \right| \leq c_6 \int_0^t |A^{m+1}| \int_\Omega \left|\vec{C}^{m+1}\right| dx d\tau \leq$$

$$\leq c_6 c(\Omega) \int_0^t |A^{m+1}| \cdot \left\|\vec{C}^{m+1}\right\|_{2,\Omega} d\tau \leq \tfrac{\varepsilon c_6^2 c^2(\Omega)}{2} \int_0^t |A^{m+1}|^2 d\tau + \tfrac{1}{2\varepsilon}\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t}.$$

Осы алынған бағалауларды (21) апарып қойсақ, және $\varepsilon \leq \frac{\nu}{2}$ етіп таңдап алсақ, онда келесі дифференциалдық теңсіздікті аламыз:

$$\frac{1}{2}\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,\Omega} + (\nu - \varepsilon)\left\|\nabla \vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t} \leq \left(\frac{c_5^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{2,Q_t} + \frac{\varepsilon c_6^2 c^2(\Omega)}{2} \int_0^t \left|A^{m+1}\right|^2 d\tau. \tag{22}$$

$c_7 = \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{c_5^2}{\varepsilon}$ белгілесек және соңғы алынған теңсіздікке Гроноулла теңсіздігін қолдансақ

$$\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|^2_{V_2(Q_t)} \leq c_4 \frac{\varepsilon c_6^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_7 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp\left[c_7 t\right] \left\|\vec{C}^m\right\|^2_{V_2(Q_t)}. \tag{23}$$

(20) және (23) бағалауларын бірге қарастыра отырып, келесі бағалаудың орынды екеніне көз жеткіземіз

$$\int_0^t \left|A^{m+1}\right|^2 d\tau \leq c_4 \frac{\varepsilon c_6^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_7 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp\left[c_7 t\right] \int_0^t |A^m|^2 dt. \tag{24}$$

$c_4, \ c_6, \ c_7, \ \varepsilon$ және σ тұрақтыларын төмендегі шарттарды қанағаттандыратындай етіп, таңдап алуымыз керек

$$\begin{gathered} 0<\varepsilon \leq \tfrac{\nu}{2}, \quad 0<\sigma \leq t_0, \\ c_4 \tfrac{\varepsilon c_6^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \tfrac{\nu-\varepsilon+c_7+1}{\nu-\varepsilon} \exp\left[c_7 \sigma\right] \leq q<1. \end{gathered} \tag{25}$$

Онда (23) және (24) бағалаулары кез келген $m=1,2,...$ үшін келесі түрге келеді

$$\int_0^\sigma \left|A^{m+1}\right|^2 d\tau \leq q \int_0^\sigma \left|A^m\right|^2 dt, \tag{26}$$

$$\left\|\vec{C}^{m+1}\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq q\left\|\vec{C}^m\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2, \tag{27}$$

мұндағы $Q_\sigma=\Omega \times(0, \sigma]$.

(25) шарты орындалғанда (26), (27) бағалауларынан, $V_2(Q_\sigma) \times L_2(0, \sigma)$ кеңістіктерінде сәйкесінше $\{(\vec{v}^m, \ f^m)\}$ тізбектері фундаменталді екендігі шығады. Жоғарыдағы талқылаулардан соң $V_2(Q_\sigma) \times L_2(0, \sigma)$ кеңістіктерінде сәйкесінше жалғыз ғана $(\vec{v}, \ f)$ жұбы бар, сонымен қатар
$V_2(Q_\sigma)$ кеңістігінде $\vec{v}^m \rightarrow \vec{v}$,
$L_2(0, \sigma)$ кеңістігінде $f^m \rightarrow f$
орынды.

$(\vec{v}^m, \ f^m)$ тізбектерінің әлді жинақталуынан (9) және (14) теңдіктерінде $m \rightarrow \infty$ шекке көшетін болсақ, (1)-(5) кері есебінің $Q_\sigma=\Omega \times(0, \sigma]$ цилиндрінде $(\vec{v}, \ f)$ жалпылама шешімін аламыз.

(1)-(5) кері есебінің $Q_\sigma=\Omega \times(0, \sigma]$ цилиндрінде $(\vec{v}_k, \ f_k)$, $k=1,2$ екі шешімі бар болсын, онда (25)-(27), келесі бағалауларды табамыз

$$\int_0^\sigma \left|f_1-f_2\right|^2 d\tau \leq q \int_0^\sigma \left|f_1-f_2\right|^2 dt,$$

$$\left\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq q\left\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2,$$

немесе

$$(1-q) \int_0^\sigma \left|f_1-f_2\right|^2 d\tau \leq 0,$$

$$(1-q)\left\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq 0.$$

$q<1$ болғандықтан $\int_0^\sigma \left|f_1-f_2\right|^2 d\tau=0$ және $\left\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right\|_{V_2(Q_\sigma)}^2=0$, осыдан келіп, $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_2, \ f_1 \equiv f_2$ шығады.

Жоғарыда көрсетілген әдісті ақырлы уақыт үшін, ақырлы рет қолдансақ, бүкіл Q_T цилиндрінде $(\vec{v}, \ f)$ жалпылама шешімі бар және жалғыз болатындығын дәлелдейміз.

Список литературы

[1] *Абылкаиров У.У.* Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения // Математический журнал ИМ РК. – Алматы, –2003. – V.3. –№4(10). – С.5–12.

[2] *Прилепко А.И., Васин И.А.* Некоторые нестационарные обратные задачи гидродинамики с финальным наблюдением // ДАН СССР. –1990. –Т. 314. –№ 5. –С. 1075–1078.

[3] *Васин И.А.* О существовании и единственности обобщенного решения обратной задачи для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса в случае интегрального переопределения // Математические заметки. – 1993. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 34–44.

[4] *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, –V. 231. –Marcel Dekker. – 2000. – 709 p.

[5] *Абылкаиров У.У.* Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D–3D системы Навье – Стокса I // Математический журнал ИМ РК. – 2005. –V. 5. – № 2(16). – С. 5–11.

[6] *Абылкаиров У.У.* Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D–3D системы Навье – Стокса II // Математический журнал ИМ РК. – 2005. – V. 5. – № 3(17). – С. 11–18.

[7] *Абиев А.К., Айтжанов С.Е.* Об одном методе решения обратной задачи для системы Навье-Стокса // Вестник ЕНУ. Серия "естественно-технические науки". - 2010. - №4(44). - С.34 - 41.

[8] *Лионс Ж.–Л.* Управление сингулярными распределенными системами. –М.: Наука, –1987.

[9] *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная Книга, – 1999. – 350 с.

[10] *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – №8. – С. 1343–1353.

[11] *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 305. – С. 1045–1049.

[12] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, – 1970. – 288 с.

[13] *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, – 1981. – 408 с.

[14] *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Наука, – 1972. – 588 с.

U.U.Abylkairov, S.E.Aitzhanov, The inverse problem for a nonlinear system of Navier-Stokes equations with integral overdetermination, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 7 – 13

In this paper the inverse problem for the nonlinear Navier-Stokes equations with an integral condition override. Method of successive approximations proved the generalized solvability of the inverse problem. Obtained existence and uniqueness of the inverse problem.

У.У.Абылкаиров, С.Е.Айтжанов, Обратная задача для нелинейной системы уравнений Навье-Стокса с интегральным переопределением Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2012, №1(72), 7 – 13

В данной работе исследуется обратная задача для нелинейной системы Навье-Стокса с интегральным условием переопределением. Методом последовательных приближений доказана обобщенная разрешимость обратной задачи. Получена теорема существования и единственность решения обратной задачи.