Управление тепловыми процессами[1]

С.А. Айсагалиев, А.П. Белогуров , И.В. Севрюгин
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, г.Алматы,
e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Рассматриваются вопросы управляемости и быстродействия процессов, описываемых параболическим уравнением с распределённым управлением из заданного множества. Предлагаются методы решения указанных задач путём построения минимизирующих последовательностей.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый внутри области $Q = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ следующим уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu(x,t) + v(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющий на границе Q начальному и граничному условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \alpha u(1,t) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mu(x,t) \in \mathfrak{L}_2(Q)$, $u(x,t) = u(x,t,v) \in H^{1,0}(Q) = \{u(x,t) \in L_2(Q), \ u_x(x,t) \in L_2(Q)\}$, следы $u(x,\cdot) \in L_2(I_2)$ непрерывные в метрике $L_2(I_2)$, $I_2 = \{t \in R^1/0 \le t \le T\}$ при всех $x \in I_1 = \{x \in R^1/0 \le x \le 1\}$; следы $u(\cdot,t) \in L_2(I_1)$ непрерывны в метрике $L_2(I_1)$ при всех $t \in [0,T]$; след $u(\cdot,t)$ при $t = 0$, совпадает с заданной функцией $\varphi(x) \in L_2(I_1)$, а при $t = T$ совпадает с заданной функцией $\psi(x) \in L_2(I_2)$, α - заданное число, $v(x,t)$ - управление. Рассматриваются два случая:

$$1) \ v(x,t) \in L_2(Q),$$

$$2) \ v(x,t) \in V = \{v(x,t) \in L_2(Q)/ \iint\limits_Q |v(x,t)|^2 dxdt \le r^2\}.$$

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *(Задача управляемости без ограничения). Найти управление $v(x,T) \in L_2(Q)$, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in I_1$, в момент времени T, где $\psi(x) \in L_2(I_1)$ - заданная функция.*

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

Задача 2 *(Задача управляемости с ограничением). Найти управление* $v(x,T) \in V$*, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния* $u(x,0) = \varphi(x)$*,* $x \in I_1$*, в заданное конечное состояние* $u(x,T) = \psi(x)$*,* $x \in I_1$*, в момент времени* T*, где* $\psi(x) \in L_2(I_1)$ *- заданная функция.*

Задача 3 *(Задача управляемости с минимальной нормой). Найти управление* $v(x,t) \in L_2(Q)$ *с минимальной нормой, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния* $u(x,0) = \varphi(x)$ *в состояние* $u(x,T) = \psi(x)$*.*

Задача 4 *(Задача быстродействия). Пусть* $v(x,t) \in V$*,* $u(x,T) = \psi(x)$*. Момент времени* T *не фиксирован. Найти управление* $v(x,t) \in V$*, которое за кратчайшее время* T *переводит систему (1), (2) из начального состояния* $u(x,0) = \varphi(x)$*,* $x \in I_1$*, в желаемое конечное состояние* $u(x,T) = \psi(x)$*,* $x \in I_1$*.*

Один из подходов к решению задач 1-4 приведён в работе [1], более полное изложение указанного метода содержится в [2]. Решение проблем управляемости динамических систем сводится к существованию и построению решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода от искомой функции нескольких переменных относится к числу малоисследованных проблем интегральных уравнений. В работе [3] предложены методы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода для искомой функции от нескольких переменных. В данной работе получены решения задач 1-4, отличные от [1,2], на основе результатов исследования интегральных уравнений из [3].

Интегральные уравнения. Решение уравнения (1) с условиями (2) через функцию источника можно представить в виде

$$u(x,t) = \int\limits_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G(x,\xi,t-\tau)[\mu(\xi,\tau) + v(\xi,\tau)]d\xi d\tau, \tag{3}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cdot \frac{\cos\lambda_n x \cos\lambda_n \xi}{\omega_n^2},$$

λ_n - положительные корни уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$,

$$\omega_n^2 = \int\limits_0^1 \cos^2 \lambda_n x dx = \frac{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Из (3) при $t = T$ имеем

$$u(x,T) = \psi(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(\xi,\tau) \in L_2(Q)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau) = \psi_1(x),\ x \in I_1, \tag{4}$$

где

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \int\limits_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ x \in I_1.$$

Система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\varphi_n(x) = \frac{1}{\omega_n}\cos\lambda_n x$ являются полной ортонормированной системой в $L_2(0,1)$. Функция

$$G(x,\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \frac{\cos\lambda_n x \cos\lambda_n \xi}{\omega_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(x)\varphi_n(\xi).$$

Так как $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - полная ортонормированная система, то

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}\varphi_n(x),\ \psi_{1n} = \int\limits_0^1 \psi_1(x)\varphi_n(x)dx.$$

Теперь интегральное уравнение (4) запишется так

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(x)\varphi_n(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}\varphi_n(x).$$

Отсюда следует, что (приравнивая коэффициенты при $\psi_n(x)$)

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau = \psi_{1n},\ n = 1,2,\ldots. \tag{5}$$

Если обозначить $L_n(\xi,\tau) = e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)}\varphi_n(\xi)$, то уравнение (5) запишется в виде

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 L_n(\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau = \psi_{1n},\ n = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

где $a = 0,\ b = T,\ c = 0,\ d = 1$. Так как

$$\int\limits_0^1 v(\xi,\tau)\varphi_n(\xi)d\xi = v_n(\tau),\ v(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau)\varphi_n(\xi),$$

то интегральное уравнение (5) может быть представлено в виде

$$\int_0^T e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} v_n(\tau) d\tau = \psi_{1n}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Ниже рассмотрены в отдельности интегральные уравнения (4), (6), (7) в отдельности для двух случаев, когда: 1) $v(\xi, \tau) \in L_2(Q)$; 2) $v(\xi, \tau) \in V$.

Решение интегрального уравнения (6). Как следует из (6), усеченное уравнение для значений $n = 1, 2, \ldots, N$ запишется в виде

$$\int_0^T \int_0^1 L_n(\xi, \tau) \overline{v}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \overline{\psi}_N, \tag{8}$$

где

$$L_N(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_1(\xi) \\ e^{-\lambda_2^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_2(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{-\lambda_N^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_N(\xi) \end{pmatrix}, \; \overline{\psi}_N = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \cdots \\ \psi_{1N} \end{pmatrix}.$$

Применяя к интегральному уравнению (8) теорему 1 из [3], получим

Лемма 1 *Интегральное уравнение (8) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$S_1 = S_1(0, T; 0, 1) = \int_0^T \int_0^1 L_N(\xi, \tau) L_N^*(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

порядка $N \times N$ является положительно определённой.

Доказательство леммы следует из теоремы 1 путём замены $K(t, \tau)$ на $L(\xi, \tau)$.

Лемма 2 *Пусть матрица $S_1 > 0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (8) определяется по формуле*

$$\overline{v}_N(\xi, \tau) = p(\xi, \tau) + L_N^*(\xi, \tau) S_1^{-1} \overline{\psi}_N - L_N^*(\xi, \tau) S_1^{-1} \int_0^T \int_0^1 L_N(\xi, \tau) p(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{9}$$

где $p(\xi, \tau) \in L_2(Q)$ - произвольная функция. Кроме того, управление $\overline{v}(\xi, \tau)$ с минимальной нормой в $L_2(Q)$ равно

$$\overline{v}_N(\xi, \tau) = L_N^*(\xi, \tau) S_1^{-1} \overline{\psi}_N. \tag{10}$$

Доказательство леммы следует из теоремы 2, приведённой в [3]. Пусть $v_*(\xi, \tau)$ - решение интегрального уравнения (4). Вычислим функцию $\psi_2(x) = \int_0^T \int_0^1 G(x, \xi, T-\tau) \overline{v}_N(\xi, \tau) d\xi d\tau$, где $\overline{v}_N(\xi,\tau)$ определяется формулой (9) (или (10)). Тогда разность $v_*(\xi,\tau)-\overline{v}_N(\xi,\tau)=\delta\overline{v}_N(\xi,\tau)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta\overline{v}_N(\xi,\tau)d\xi d\tau=\psi_1(x)-\psi_2(x)=\Delta\overline{\psi}_N(x),\ x\in[0,1].$$

Соответствующее усечённое уравнение запишется так

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 L_N(\xi,\tau)\Delta\overline{v}_N(\xi,\tau)d\xi d\tau=\Delta\overline{\psi}_N,\ \Delta\overline{\psi}_N=\begin{pmatrix}\Delta\psi_1\\ \ldots\ldots\\ \Delta\psi_N\end{pmatrix},$$

где $\Delta\overline{\psi}_n=\int\limits_0^1\Delta\overline{\psi}\varphi_n(x)dx,\ n=\overline{1,N}$.

Лемма 3 *Пусть матрица $S_1>0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\Delta\overline{v}_N(\xi,\tau)\|^2=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left|L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\Delta\overline{\xi}_N\right|^2d\xi d\tau,\ \lim_{N\to\infty}\|\Delta\overline{v}_N(\xi,\tau)\|=0.$$

Леммы 1-3 относятся к случаю, когда $v(\xi,\tau)\in L_2(Q)$, и дают решения задач 1,3 для усечённого интегрального уравнения (8). Рассмотрим случай, когда

$$v(\xi,\tau)\in V=\{v(\xi,\tau)\in L_2(Q)/\iint_Q|v(\xi,\tau)|^2d\xi d\tau\le r^2\}.$$

Пусть

$$w(\xi,\tau)=p(\xi,\tau)-L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 L_N(\xi,\tau)p(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ p(\xi,\tau)\in L_2(Q).$$

Введём множество

$$M=\{w(\xi,\tau)\in L_2(Q)/w(\xi,\tau)=p(\xi,\tau)-L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 L_N(\xi,\tau)p(\xi,\tau)d\xi d\tau\}.$$

Как следует из леммы 2, решение интегрального уравнения (8) имеет вид

$$\overline{v}(\xi,\tau)=L_N^*S_1^{-1}\overline{\psi}+w(\xi,\tau),\ w(\xi,\tau)\in M.$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$I_N(v,w)=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left[v(\xi,\tau)-L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\overline{\psi}_N-w(\xi,\tau)\right]^2d\xi d\tau\to\inf,\tag{11}$$

при условиях

$$v(\xi,\tau)\in V,\ w(\xi,\tau)\in M.\tag{12}$$

Лемма 4 *Пусть пара* $(v_*(\xi,\tau), w_*(\xi,\tau)) \in V \times W$ *- решение оптимизационной задачи (11), (12) при* $N \to \infty$. *Для того чтобы функция* $v_*(\xi,\tau) \in V$ *была решением интегрального уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы* $I_N(v_*, w_*) = 0$ *при* $N \to \infty$.

Таким образом, для решения задачи управляемости в случае $v(\xi,\tau) \in V$ необходимо найти решение оптимизационной задачи (11), (12).

Градиент функционала. Оптимизационная задача (11), (12) может быть решена путём построения минимизирующих последовательностей $\{v_n(\xi,\tau)\} \subset V$, $\{w_n(\xi,\tau)\} \subset M$, которые сходятся к $v_N^*(\xi,\tau) \in V$, $w_N^*(\xi,\tau) \in M$ при $n \to \infty$, где $\lim_{N\to\infty} v_N^*(\xi,\tau) = v_*(\xi,\tau)$, $\lim_{N\to\infty} w_N^*(\xi,\tau) = w_*(\xi,\tau) \in M$.

Теорема 1 *Функционал (11) при условиях (12) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$I'_N(v,w) = (I'_{1N}(v,w), I'_{2N}(v,w)) \in L_2(q) \times L_2(Q) \tag{13}$$

в любой точке $(v,w) \in V \times M$ *равен*

$$I'_{1N}(v,w) = 2[v(\xi,\tau) - L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\overline{\psi}_N - w(\xi,\tau)] \in L_2(Q), \tag{14}$$

$$I'_{2N}(v,w) = -2[v(\xi,\tau) - L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\overline{\psi}_N - w(\xi,\tau)] \in L_2(Q), \tag{15}$$

Теорема 2 *Градиент функционала* $I'_N(v,w) \in L_2(Q) \times L_2(Q)$ *удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\|I'_{1N}(v_1,w_1) - I'_{1N}(v_2,w_2)\|_{L_2} \le L(\|v_1 - v_2\|_{L_2} + \|w_1 - w_2\|_{L_2}), \tag{16}$$

$$\forall (v_1,w_1),\ (v_2,w_2) \in V \times W,\ l = const > 0.$$

Проекция точки на множество. Отметим, что: 1) для любых чисел α и β точка $\alpha w_1(\xi,\tau) + \beta w_2(\xi,\tau) \in M$ при $w_1(\xi,\tau) \in M$, $w_2(\xi,\tau) \in M$. В самом деле,

$$\alpha w_1(\xi,\tau) + \beta w_2(\xi,\tau) = [\alpha p_1(\xi,\tau) + \beta p_2(\xi,\tau)] - L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\int_0^T\int_0^1 L_N(\xi,\tau)[\alpha p_1(\xi,\tau)+$$

$$+\beta p_2(\xi,\tau)]d\xi d\tau \in M.$$

Отсюда следует, что M - линейное многообразие в $L_2(Q)$; 2) если $p(\xi,\tau) \equiv 0$, $(\xi,\tau) \in Q$, то $w(\xi,\tau) \in W$. Следовательно, линейное многообразие M - подпространство, т.е. выпуклое замкнутое множество.

Теорема 3 *Любой элемент* $f(\xi,\tau) \in L_2(Q)$ *имеет единственную проекцию на множестве* M, *причём*

$$P_M[f(\xi,\tau)] = f(\xi,\tau) - L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\int_0^T\int_0^1 L_N(\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ (\xi,\tau) \in Q, \tag{17}$$

где $P_M[f(\xi,\tau)]$ *- проекция точки* $f(\xi,\tau)$ *на* M.

Проекция точки $f_1(\xi,\tau) \in L_2(Q)$ на V определяется так:

$$P_V[f_1(\xi,\tau)] = \begin{cases} r \cdot \dfrac{f_1(\xi,\tau)}{\|f_1(\xi,\tau)\|_{L_2}}, \text{ если } \|f_1\|^2_{L_2} > r^2, \\ f_1(\xi,\tau), \text{ если } \|f_1\|^2_{L_2} \le r^2. \end{cases} \tag{18}$$

Выпуклый функционал. Рассмотрим функционал (11) при условиях (12), как показано выше, множество M выпукло и замкнуто, множество V является выпуклым замкнутым шаром. Следовательно, множество $V \times M$ выпукло и замкнуто.

Теорема 4 *Функционал $I_N(v,w)$ на множестве $V \times M$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является выпуклым.*

Минимизирующие последовательности. Рассмотрим оптимизационную задачу (11), (12). Строим последовательности $\{v_n(\xi,\tau) \subset V\}$, $\{w_n(\xi,\tau) \subset M\}$ по следующему правилу

$$v_{n+1}(\xi,\tau) = P_V[v_n(\xi,\tau) - \alpha_n I'_{1N}(v_n,w_n)], \; n = 0,1,2,\dots, \tag{19}$$

$$w_{n+1}(\xi,\tau) = P_M[w_n(\xi,\tau) - \alpha_n I'_{2N}(v_n,w_n)], \; n = 0,1,2,\dots, \tag{20}$$

где $0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{L+2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$. В частности, $\varepsilon_1 = \frac{L}{2}$, $\alpha_n = \frac{1}{L}$, $\varepsilon_0 - \frac{1}{L}$.

Градиент $I'_N(v,w) = (I'_{1N}(v,w), I'_{2N}(v,w))$ определяется формулами (13)-(15), $L > 0$ - постоянная Липшица из (16), причём $P_V[\cdot]$, $P_W[\cdot]$ определяются соотношениями (17), (18).

Теорема 5 *Пусть последовательность $\{v_n(\xi,\tau)\} \subset V$, $\{w_n(\xi,\tau)\} \subset M$ определяются соотношениями (19), (20). Тогда:*

1) Нижняя грань функционала $I_N(v,w)$ достигается на множестве $V \times M$ и $I_{N*} = \inf_{(v,w)\in V\times M} I_N(v,w) = I_N(v_{n*}, w_{n*})$ при каждом фиксированном N;

2) Последовательность $(v_n(\xi,\tau), w_n(\xi,\tau)) \subset V \times M$ минимизирующая, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} I_N(v_n,w_n) = I_{N*} = \inf I_N(v,w), \; (v,w) \in V \times M;$$

3) Последовательность $\{v_n(\xi,\tau), w_n(\xi,\tau)\} \subset V \times M$ слабо сходится к точке $(v_{N*} = v_{N*}(\xi,\tau), w_{N*} = w_{N*}(\xi,\tau))$ при $n \to \infty$, т.е. $v_n \xrightarrow{сл} v_{N*}$, $w_n \xrightarrow{сл} w_{N*}$ при любом фиксированном N;

4) Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \le I_N(v_n,w_n) - I_{N*} \le \frac{c}{n}, \; n = 1,2,\dots, \; c = const > 0. \tag{21}$$

5) если $I_* = \lim_{N\to\infty} I_{N*} = \lim_{N\to\infty} I_{N*}(v_{N*}, w_{N*}) = 0$, то уравнение $\lim_{N\to\infty} v_{N*}(\xi,\tau) = v_*(\xi,\tau) \in V$ переводит траекторию системы (1), (2) из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$; если $I_* > 0$, то управление $v_*(\xi,\tau) \in V$ минимизирует норму $\|u(x,T) - \psi(x)\|$, т.е. управление $v_*(\xi,\tau) \in V$ обеспечивает наилучшее приближение $u(x,T)$ к $\psi(x)$.

Решение интегрального уравнения (4). Другой приближённый метод решения интегрального уравнения (4) может быть получен путём разбиения отрезка [0,1] на N_1 частей с точками разбиения $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{N_1} = 1$. Как следует из (4), для значений $x = x_i,\ i = \overline{0, N_1}$ имеем

$$\int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(\xi) \varphi_n(x_i) \overline{\overline{v}}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \psi_1(x_i),\ i = \overline{0, N_1}.$$

Усечённое уравнение представим в виде

$$\int_0^T \int_0^1 P_{N_1}(\xi, \tau) \overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \overline{\overline{\psi}}_{N_1}, \tag{22}$$

где

$$P_{N_1}(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(\xi) \varphi_n(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 (T-\tau)} \varphi_n(\xi) \varphi_n(x_{N_1}) \end{pmatrix},\ \overline{\overline{\psi}}_{N_1} = \begin{pmatrix} \psi_1(x_0) \\ \ldots\ldots \\ \psi_1(x_{N_1}) \end{pmatrix}.$$

Лемма 5 *Интегральное уравнение (22) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$S_2 = S_2(0, T; 0, 1) = \int_0^T \int_0^1 P_{N_1}(\xi, \tau) P_{N_1}^*(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

порядка $(1 + N_1) \times (1 + N_1)$ *является положительно определённой.*

Доказательство леммы следует из теоремы 1, приведённой в [3].

Лемма 6 *Пусть* $S_2 > 0$. *Тогда общее решение интегрального уравнения (22) определяется по формуле*

$$\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi, \tau) = \rho(\xi, \tau) + P_{N_1}^*(\xi, \tau) S_2^{-1} \overline{\overline{\psi}}_{N_1} - P_{N_1}^*(\xi, \tau) S_2^{-1} \int_0^T \int_0^1 P_{N_1}(\xi, \tau) \rho(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{23}$$

где $\rho(\xi, \tau) \in L_2(Q)$ *- произвольная функция. Кроме того, управление с минимальной нормой в* $L_2(Q)$ *равно*

$$\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi, \tau) = P_{N_1}^*(\xi, \tau) S_2^{-1} \overline{\overline{\psi}}_{N_1}. \tag{24}$$

Доказательство леммы следует из теоремы 2, приведённой в работе [3].

Вычислим функцию

$$\psi_3(x) = \int_0^T \int_0^1 G(x, \xi, T - \tau) \overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $\overline{\overline{v}}(\xi,\tau)$ определяется по формуле (23) (или (24)). Тогда разность $v_*(\xi,\tau)-\overline{\overline{v}}(\xi,\tau)=\Delta\overline{\overline{v}}(\xi,\tau)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi,\tau)d\xi d\tau=\psi_1(x)-\psi_3(x)=\Delta\overline{\overline{\psi}}_{N_1}(x),\ x\in[0,1].$$

Соответствующее усечённое решение имеет вид

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 P_{N_1}(\xi,\tau)\Delta\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi,\tau)d\xi d\tau=\overline{\overline{\psi}}_{N_1},\ \Delta\overline{\overline{\psi}}_{N_1}=\begin{pmatrix}\Delta\overline{\overline{\psi}}(x_0)\\ \dots\dots\dots\\ \Delta\overline{\overline{\psi}}(x_{N_1})\end{pmatrix}.$$

Лемма 7 *Пусть матрица $S_2>0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\Delta\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi,\tau)\|^2=\int\limits_0^T\int\limits_0^1|P^*_{N_1}(\xi,\tau)S_2^{-1}\Delta\overline{\overline{\psi}}_{N_1}|^2d\xi d\tau,\ \lim_{N_1\to\infty}\|\Delta\overline{\overline{v}}_{N_1}(\xi,\tau)\|=0.$$

Доказательство леммы следует из теорем 1,2, приведённых в [3], при $N_1\to\infty$ интегральные уравнения (4) и (22) совпадают.

Леммы 4-6 относятся к случаю $v(\xi,\tau)\in L_2(Q)$ и дают решения задач 1,3 для усечённого интегрального уравнения (22). Ниже рассматривается случай, когда $v(\xi,\tau)\in V$. Теперь рассмотрим усечённое интегральное уравнение (22), общее решение которого имеет вид (23). Пусть

$$\mu(\xi,\tau)=\rho(\xi,\tau)-P^*_{N_1}(\xi,\tau)S_2^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 P_{N_1}(\xi,\tau)\rho(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ \rho(\xi,\tau)\in L_2(Q).$$

Введём множество

$$\Gamma=\{\mu(\xi,\tau)\in L_2(Q)/\mu(\xi,\tau)=\rho(\xi,\tau)-P^*_{N_1}(\xi,\tau)S_2^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 P_{N_1}\rho(\xi,\tau)d\xi d\tau\}.$$

Как следует из леммы 5, решение интегрального уравнения (22) имеет вид $\overline{\overline{v}}(\xi,\tau)=P^*_{N_1}(\xi,\tau)S_2^{-1}\overline{\overline{\psi}}_{N_1}+\mu(\xi,\tau)$, $\mu(\xi,\tau)\in\Gamma$.

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$I_{N_1}(v,\mu)=\int\limits_0^T\int\limits_0^1[v(\xi,\tau)-P^*_{N_1}(\xi,\tau)S_2^{-1}\overline{\overline{\psi}}_{N_1}-\mu(\xi,\tau)]^2d\xi d\tau\to\inf \tag{25}$$

при условиях

$$v(\xi,\tau)\in V,\ \mu(\xi,\tau)\in\Gamma. \tag{26}$$

Для оптимизационной задачи (25), (26) остаются верными лемма 3, теоремы 1-5 после замены индекса N на N_1, функции $w(\xi,\tau)$ на $\mu(\xi,\tau)$, множества M на Γ.

Решение интегрального уравнения (7). В работе [4] для решения интегрального уравнения (7) методом моментов найдено управление с минимальной нормой в случае $v(\xi,\tau)\in L_2(Q)$. Этот результат является частным случаем общего решения интегрального уравнения (7).

Лемма 8 *Интегральное уравнение (7) имеет решение тогда и только тогда, когда величина*

$$C_n = C_n(0,T) = \int\limits_0^T e^{-2\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}d\tau > 0,\ \ n=1,2,\ldots.$$

Доказательство леммы следует из результатов работы [4].

Лемма 9 *Пусть $C_n>0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (7) имеет вид*

$$v_n(\tau) = p_n(\tau) + e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}\cdot C_n^{-1}\psi_{1n} - e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}p_n(\tau)d\tau, \tag{27}$$

где $p_n(\tau)\in L_2(0,T)$ - произвольная функция. Кроме того, управление с минимальной нормой равно

$$v_{n_{min}}(\tau) = e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n},\ \ \tau\in[0,T]. \tag{28}$$

Заметим, что результат (28) принадлежит А.И. Егорову [5], управление с минимальной нормой

$$v_{min}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n}\varphi_n(\xi),\ \ (\xi,\tau)\in Q.$$

Рассмотрим случай, когда $v(\xi,\tau)\in V$. Как следует из леммы 9, общее решение интегрального уравнения (7) имеет вид

$$\begin{gathered} v(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\varphi_n(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\xi)[p_n(\tau) + e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n} - \\ - e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}p_n(\tau)d\tau], \end{gathered} \tag{29}$$

где $p_n(\tau)\in L_2(0,T)$ - произвольная функция. Пусть функция

$$\omega_n(\tau) = p_n(\tau) - e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)}p_n(\tau)d\tau. \tag{30}$$

Тогда управление $v(\xi,\tau)$ из (29) с учётом (27) запишется в виде

$$v(\xi,\tau) = v_{min}(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(\xi,\tau)\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau)\varphi(\xi), \tag{31}$$

где

$$v_{min}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n}\varphi_n(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}v_{n_{min}}(\tau)\varphi(\xi). \tag{32}$$

Заметим, что: 1) если $\|v_{min}(\xi,\tau)\|^2\le r^2$, то управление (32) является решением задачи 2; 2) если $\|v_{min}(\xi,\tau)\|^2>r^2$, то задача 2 не имеет решения; 3) если $\|v_{min}(\xi,\tau)\|^2<r^2$, то задача 2 имеет решение. В этом случае необходимо найти управление $v(\xi,\tau)$, где $\|v(\xi,\tau)\|^2\le r^2$.

Ниже рассмотрен случай, когда $\|v_{min}(\xi,\tau)\|^2<r^2$. Так как $\{\varphi_k(\xi)\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированная система, то $\|\varphi_k(\xi)\|^2=1$, $\int\limits_0^1\varphi_k(\xi)\varphi_j(\xi)d\xi=0$, $k\ne j$. Как следует из леммы 9, функция

$$v_n(\tau)=e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n}+\omega_n(\tau)=\sigma_n(\tau)+\omega_n(\tau),$$

где $\sigma_n(\tau)=e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}$, $\sigma_n\perp\omega_n$, т.е. $<\sigma_n,\omega_n>_{L_2}=0$ в силу теоремы 2 и из [3]. Тогда

$$\|v_n\|_{L_2}^2=\|\sigma_n\|_{L_2}^2+\|\omega_n\|_{L_2}^2,\ \|v_n\|_{L_2}^2=\int\limits_0^1 v_n^2(\tau)d\tau.$$

Из (31) следует, что норма

$$\|v\|_{L_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\|_{L_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\sigma_n\|_{L_2}^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega_n\|_{L_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|v_{min}\|_{L_2}^2+\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega_n\|_{L_2}^2,$$

где $\|v_{min}\|_{L_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\sigma_n\|_{L_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T|e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}C_n^{-1}\psi_{1n}|^2d\tau=r_1^2$.

Поскольку $\|v\|_{L_2}^2\le r^2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega_n\|_{L_2}^2\le r^2-r_1^2,\ r^2-r_1^2>0. \tag{33}$$

Как следует из формулы (30), норма

$$\|w_n\|_{L_2}^2=\int\limits_0^T|\omega_n(\tau)|^2d\tau=\|\omega_n\|_{L_2}^2-C_n^{-1}\left(\int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}p_n(\tau)d\tau\right)^2>0. \tag{34}$$

Из (33), (34) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|p_n\|_{L_2}^2-\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{-1}\left(\int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}p_n(\tau)d\tau\right)^2\le r^2-r_1^2. \tag{35}$$

В частности, если $\sum_{n=1}^{\infty}\|p_n\|_{L_2}^2=r^2-r_1^2$, то выполнено неравенство (35).

Поскольку $p_n(\tau) \in L_2(0,1)$ - произвольные функции, то при $p_1(\tau) \neq 0$, $p_j(\tau) \equiv 0$ при $j > 1$ имеем $\|p_1\|^2 = r^2 - r_1^2$, т.е. $\int\limits_0^T p_1^2(\tau)d\tau = r^2 - r_1^2$. Отсюда, при $p_1(t) = c = const$, получим $c = \sqrt{(r^2 - r_1^2)/T}$.

Управление с минимальной нормой. Как следует из леммы 2, для интегрального уравнения (6) управление с минимальной нормой определяется по формуле (10). В этом случае для исходного интегрального уравнения (4) управление с минимальной нормой $v_{min}(\xi,\tau) = \lim_{N\to\infty} L_N^*(\xi,\tau)S_1^{-1}\overline{\psi}_N$, $(\xi,\tau) \in Q$.

Для интегрального уравнения (7) управление минимальной нормы

$$v_{min}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2(T-\tau)} C_n^{-1}\psi_{1n}\varphi_n(\xi),\ (\xi,\tau) \in Q.$$

Из леммы 6 следует, что управление минимальной нормы для интегрального уравнения (22) определяется по формуле (24). В этом случае искомое

$$v_{min}(\xi,\tau) = \lim_{N_1\to\infty} P_{N_1}^*(\xi,\tau)S_2^{-1}\overline{\overline{\psi}}_{N_1},\ (\xi,\tau) \in Q.$$

Оптимальное быстродействие. Задача оптимального быстродействия, связанная с выбором значения T, может быть решена по следующему алгоритму:

1. Выбирается значение $T = T_0$, где T_0 -заданная величина. Строится последовательность $v_n, w_n \subset V \times M$ по правилу (19),(20), где

$$V = \{v(\xi,\tau) \in L_2(Q)/ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_0^1 v^2(\xi,\tau)d\tau \leq r^2\},$$

r - заданное число. Определим $v_*(\xi,\tau) = v_*$, $w_*(\xi,\tau) = w_*$, где $I_* = \lim_{N\to\infty} I_{N*}(v_{N*}, w_{N*})$, $v_* = v_{N*}(\xi,\tau)$, $w_* = \lim_{N\to\infty} w_{N*}(\xi,\tau)$.

2. Если $I_* > 0$, то в качестве нового значения берём $T = 2T_0$, а в случае $I_* = 0$ полагаем $T = T_0/2$. Заметим, что значение $I_* \geq 0$.

3. Для новых значений

$$T = \begin{cases} 2T_0, & \text{если } I_* > 0, \\ T_0/2, & \text{если } I_* = 0, \end{cases}$$

строятся последовательности $\{v_n, w_n\}$ и определяются $v_{**} = v_{**}(\xi,\tau)$, $w_{**} = w_{**}(\xi,\tau)$ и значение I_{**}. Здесь возможны два случая: а) $I_{**} > 0$; б) $I_{**} = 0$. Определяется значение

$$T = \begin{cases} 3T_0, & \text{если } I_{**} > 0, \\ T_0/4, & \text{если } I_{**} = 0. \end{cases}$$

Последовательно применяя данную схему вычисления T, находим минимальное значение $T = T_*$.

Список литературы

[1] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Сартаев Т.М.* К проблеме управляемости и быстродействия процесса для параболического уравнения с ограниченным управлением. //Вестник КазНУ. сер. мат., мех., инф. -2010, №2 (65), с. 63-73.

[2] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control. //Siberian Mathematical Journal, Vol. 53, №1, pp. 13-28, 2012.

[3] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В.* К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных. //Вестник КазНУ. сер. мат., мех., инф. -2011, №1 (68), с. 21-30.

[4] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений. //Мат. журнал. -2005, т.5, №4 (18), с.17-34./ Ин-т математики МОН РК.

[5] *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. -464 с.

S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov, I.V. Sevryugin, Control of thermal processes.
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 14 – 26

In this work considered the controllability and speed of the process described by a parabolic equation with distributed control from the prescribed set. Offers solutions of this problems by constructing minimizing sequences.

С.А. Айсағалиев, А.П. Белогуров, И.В. Севрюгин, Жылу үдерiстерiн басқару.
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2012, №1(72), 14 – 26

Берiлген жиында үлестiрiлген басқарулары бар параболалық теңдеулермен сипатталатын үдерiстердiң басқарымдылық және тез әсер ету мәселелерi қарастырылады. Минимумдаушы тiзбектер құру арқылы берiлген есептердiң шешу әдiстерi ұсынылады.