Разрешимость начально-краевой задачи для тепловой конвекции с коэффициентами вязкости и теплопроводности, зависящими от температуры[1]

С.Е. Айтжанов, Е.С. Алимжанов, Н.Б. Закариянова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: SAitzhanov@mail.ru

Аннотация

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость в целом по времени начально-краевой задачи тепловой конвекций для жидкости Кельвина-Фойгта. Данная модель описывает движения вязких неньютоновских жидкостей с полимерными добавками. В системе уравнений коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры. Для разрешимости начально-краевой задачи получены априорные оценки.

В течение последних полутора столетий основным объектом исследования математиков в области гидродинамики является модель ньютоновской жидкости. Она описывает течение при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей. В середине XIX века стали известны жидкости, которые не подчиняются ньютоновскому определяющему соотношению. Такими жидкостями являются, например, жидкости, в которых после прекращения движения напряжения не обращаются мгновенно в нуль, а спадают по некоторому закону, т.е. имеет место релаксация напряжений. А также жидкости, в которых после снятия напряжений движение не прекращается мгновенно, а затухает по некоторому закону, т.е. имеет место запаздывание деформаций, и жидкости, в которых имеют место оба этих эффекта. Первые модели таких жидкостей были предложены XIX в. Дж.Максвеллом, В.Кельвином и В.Фойгтом и были развиты в середине XX века благодаря работам Дж.Г.Олдройта. Одной из таких моделей является модель Кельвина–Фойгта. В работах [1] было показано, что математическая модель движения жидкости Кельвина–Фойгта описывает течение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы. В работах [2-7] исследована разрешимость начально-краевых задач для уравнений Кельвина-Фойгта и некоторых более сложных квазилинейных систем третьего порядка.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset R^2$ следующую задачу определения скорости движения жидкости $\vec{v}(x,t)$, давления $p(x,t)$ и температуры $\theta(x,t)$ из следующей системы

$$\vec{v}_t + v_k\vec{v}_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu(\theta)\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}\right) + \chi\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t} + \beta(x,t)\vec{g}(x,t)\theta + \vec{f}(x,t), \tag{1}$$

$$\theta_t + v_k\theta_{x_k} = div\,(\lambda(\theta)\nabla\theta) + \varphi(x,t), \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

$$div\vec{v} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{v}|_S = 0, \left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S = 0, \tag{4}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \tag{5}$$

где $\nu(\theta)-$ кинематический коэффициент вязкости, $\chi-$время запаздывания, физический смысл которого состоит в том, что после мгновенного снятия напряжений скорость течения не обращается мгновенно в нуль, а затухает, как $\exp\left(-\frac{t}{\chi}\right)$. $\lambda(\theta)-$коэффициент теплопроводности, $\beta-$ коэффициент кубического расширения, $\vec{g}-$ вектор ускорения силы тяжести, $\vec{f}(x,t)$ и $\varphi(x,t)-$ внешние силы и источник тепла, заданные функции.

На коэффициенты вязкости и теплопроводности налагаем следующие условия

$$\begin{gathered}\nu(\theta) \in C^1(R), \quad 0 < \nu_0 \le \nu(\theta) \le \nu_1, \quad |\nu'(\theta)| \le \nu_2, \quad \nu_2 > 0;\\ \lambda(\theta) \in C^1(R), \quad 0 < \lambda_0 \le \lambda(\theta) \le \lambda_1;\\ |\lambda'(\theta)\theta_x| \le \lambda_2, \quad \lambda_2 > 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Разрешимость краевых, начально-краевых и смешанных задач для системы уравнений тепловой конвекции исследовались в работах [8-13]. В работах [8], [9] исследована задача (1)-(5) при предположении коэффициентов входящие в уравнение константами. Следует отметить в работе [10] исследована задача для системы свободной конвекции с учетом диссипации энергии, когда коэффициент кубического расширения зависит от температуры. Когда коэффициент теплопроводности зависит от температуры была исследована Ш.С.Смагуловым [11], [12]. В работах [13] доказана классическая разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений тепловой конвекции и гладкость решения во всей цилиндрической области вплоть до границы в $W_p^{2,1}(Q_T)$ с любым $p > 1$ и $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, $\alpha < 1$. В работе [14] исследована двумерная задача тепловой конвекций с нелинейной вязкостью с учетом диссипации.

На протяжении всей работы мы будем использовать обозначения функциональных пространств и нормы принятых в [15].

Определение. Сильным решением задачи (1)-(5) называются функции $\vec{v}(x,t), \theta(x,t)$ и ∇p, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\vec{v}(x,t) \in L_2\left(0,T;\, W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{J^1}(\Omega)\right), \vec{v}_t \in L_2(Q_T), \theta(x,t) \in L_2\left(0,T;\, W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W_2^1}(\Omega)\right),$$

$$\nabla p \in L_2(Q_T), \theta_t \in L_2(Q_T),$$

$\vec{v}_t + v_k\vec{v}_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu(\theta)\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_k}\right) + \chi\frac{\partial\Delta\vec{v}}{\partial t} + \beta(x,t)\vec{g}(x,t)\theta + \vec{f}(x,t)$, $div\vec{v} = 0$ почти всюду в Q_T,
$\theta_t + v_k\theta_{x_k} = div\left(\lambda(\theta)\nabla\theta\right) + \varphi(x,t)$, почти всюду в Q_T.

Теорема. Пусть выполнены условия (6), а также $\vec{v}_0\,(x) \in \overset{0}{J^2}(\Omega)$ $\theta_0\,(x) \in \overset{0}{W_2^1}(\Omega)$, $\vec{f} \in L_2\,(Q_T)$ и $\varphi \in L_2\,(Q_T)$. Тогда существует единственное сильное решение задачи

(1)-(5), и для него справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{v}_x\|^2+\|\Delta\vec{v}\|^2+\|\theta\|^2+\|\theta_x\|^2\right)+\|\nabla\theta\|^2_{2,Q_T}+$$
$$+\|\Delta\theta\|^2_{2,Q_T}+\|\theta_t\|^2_{2,Q_T}+\|\vec{v}_x\|^2_{2,Q_T}+\|\Delta\vec{v}\|^2_{2,Q_T}+ \tag{7}$$
$$+\|\vec{v}_t\|^2_{2,Q_T}+\|\vec{v}_{tx}\|^2_{2,Q_T}+\|\Delta\vec{v}_t\|^2_{2,Q_T}\le c<\infty.$$

Доказательство. Получим сначала априорные оценки. Для этого умножим уравнение (2) на θ и проинтегрируем по области Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2+\int_\Omega\lambda(\theta)\left|\nabla\theta\right|^2dx=\int_\Omega\varphi\cdot\theta\,dx. \tag{8}$$

Отсюда известным способом получим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|\theta\|^2+\int_0^t\int_\Omega\lambda(\theta)\left|\nabla\theta\right|^2dxd\tau\le c_1<\infty. \tag{9}$$

Теперь умножим скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ уравнение (1) на функцию $\vec{v}(x,t)$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{v}_x\|^2\right)+\int_\Omega\nu(\theta)\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}^2dx=\int_\Omega(\beta\vec{g}\theta+\vec{f})\vec{v}dx. \tag{10}$$

Используя для оценки стоящих в правой части равенства (10) интегралов неравенство Гельдера и Юнга, получим следующие оценки

$$\left|\int_\Omega\vec{f}\cdot\vec{v}dx\right|\le\left\|\vec{f}\right\|\cdot\|\vec{v}\|\le\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2+\frac{1}{2}\left\|\vec{f}\right\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega\beta\vec{g}\cdot\theta\cdot\vec{v}dx\right|\le\beta_0\int_\Omega|\theta|\cdot|\vec{v}|\,dx\le\beta_0\|\theta\|\cdot\|\vec{v}\|\le\frac{\beta_0^2c_1^2}{2}+\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2.$$

Подставим в тождество (10) приходим к следующему неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\vec{v}\|^2+\|\vec{v}_x\|^2\right]+\int_0^t\int_\Omega\nu(\theta)\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}^2dxd\tau\le\|\vec{v}\|^2+\frac{\beta_0^2c_1^2}{2}+\frac{1}{2}\left\|\vec{f}\right\|^2.$$

Применяя лемму Гроноулла, получим оценку:

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{v}_x\|^2\right)+\int_0^T\int_\Omega\nu(\theta)\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}^2dxd\tau\le c_2<\infty. \tag{11}$$

Умножим уравнение (2) на $\Delta\theta$ и проинтегрируем по области Ω, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_x\|^2+\int_\Omega\lambda(\theta)\left|\Delta\theta\right|^2dx=-\int_\Omega\lambda'(\theta)\theta_x\left|\Delta\theta\right|^2dx+\int_\Omega\upsilon_k\theta_{x_k}\Delta\theta\,dx-\int_\Omega\varphi\cdot\Delta\theta\,dx. \tag{12}$$

Оценим члены в правой части равенства (12) с помощью неравенства Гельдера, Юнга и теоремы вложения Соболева, а также полученные неравенства (9) и (11)

$$\left|\int_\Omega v_k\theta_{x_k}\Delta\theta\,dx\right| \le \|\Delta\theta\|\cdot\|\theta_x\|_{3,\Omega}\,\|\vec{v}\|_{6,\Omega} \le$$

$$\le c_3''\,\|\Delta\theta\|^{\frac{4}{3}}\cdot\|\theta_x\|^{\frac{2}{3}}\,\|\vec{v}_x\|^{\frac{2}{3}} \le \varepsilon_1\,\|\Delta\theta\|^2 + c_3(\varepsilon_1^{-1})\,\|\theta_x\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega \lambda'(\theta)\theta_x|\Delta\theta|^2dx\right| \le \lambda_2\int_\Omega|\Delta\theta|^2dx,$$

$$\int_\Omega|\varphi\cdot\Delta\theta dx| \le \|\varphi\|\cdot\|\Delta\theta\| \le \varepsilon_2\,\|\Delta\theta\|^2 + c_4(\varepsilon_2^{-1})\,\|\varphi\|^2.$$

Подставляя найденные оценки в тождество (12), имеем следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta_x\|^2 + \lambda_0\int_\Omega|\Delta\theta|^2\,dx \le (\lambda_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\|\Delta\theta\|^2 + c_3(\varepsilon_1^{-1})\,\|\theta_x\|^2 + c_4(\varepsilon_2^{-1})\,\|\varphi\|^2.$$

При выборе ε_1 и ε_2 достаточно малым, чтобы выполнялось $\lambda_0-\lambda_2-\varepsilon_1-\varepsilon_2>0$, тогда полученное неравенство приводится к следующему виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta_x\|^2 + (\lambda_0-\lambda_2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\int_\Omega|\Delta\theta|^2\,dx \le c_3(\varepsilon_1^{-1})\,\|\theta_x\|^2 + c_4(\varepsilon_2^{-1})\,\|\varphi\|^2.$$

Отсюда стандартным образом выводим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|\theta_x\|^2 + \int_0^T\int_\Omega|\Delta\theta|^2\,dxd\tau \le c_5 < \infty. \tag{13}$$

Аналогичным образом, умножим уравнение (1) на $\Delta\vec{v}$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|\vec{v}_x\|^2 + \chi\,\|\Delta\vec{v}\|^2\right) + \int_\Omega\nu(\theta)|\Delta\vec{v}|^2dx = \int_\Omega v_k\vec{v}_{x_k}\Delta\vec{v}dx+\\ -\int_\Omega\nu'(\theta)\theta_x\vec{v}_{x_k}\Delta\vec{v}dx - \int_\Omega(\beta\vec{g}\theta+\vec{f})\Delta\vec{v}dx.\end{gathered} \tag{14}$$

Оценим правую часть тождества (14), применяя неравенства Гельдера, Юнга и теоремы вложения Соболева, а также полученные оценки (9), (11) и (13)

$$\left|\int_\Omega\nu'(\theta)\theta_x\vec{v}_{x_k}\Delta\vec{v}dx\right| \le \nu_2\int_\Omega|\theta_x|\cdot|\vec{v}_{x_k}|\cdot|\Delta\vec{v}|dx \le$$

$$\le \nu_2\,\|\Delta\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}_x\|_{3,\Omega}\,\|\theta_x\|_{6,\Omega} \le$$

$$\le c_6''\,\|\Delta\vec{v}\|^{\frac{4}{3}}\,\|\Delta\theta\|^{\frac{2}{3}} \le \varepsilon_3\,\|\Delta\vec{v}\|^2 + c_6(\varepsilon_3)\,\|\Delta\theta\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega v_k\vec{v}_{x_k}\Delta\vec{v}dx\right| \le \|\Delta\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}_x\|_{3,\Omega}\,\|\vec{v}\|_{6,\Omega} \le$$

$$\le \varepsilon_4\,\|\Delta\vec{v}\|^2 + c_7'(\varepsilon_4)\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}_x\|^4 \le \varepsilon_4\,\|\Delta\vec{v}\|^2 + c_7(\varepsilon_4)\,\|\vec{v}_x\|^4,$$

$$\left|\int_\Omega \vec{f}\cdot\Delta\vec{v}dx\right| \le \left\|\vec{f}\right\|\cdot\|\Delta\vec{v}\| \le \varepsilon_5\|\Delta\vec{v}\|^2 + c_8(\varepsilon_5)\left\|\vec{f}\right\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega \beta\vec{g}\cdot\theta\cdot\Delta\vec{v}dx\right| \le \beta_0\int_\Omega|\theta|\cdot|\Delta\vec{v}|\,dx \le \beta_0\|\theta\|\cdot\|\Delta\vec{v}\| \le \frac{\beta_0^2c_1^2}{2}+\frac{1}{2}\|\Delta\vec{v}\|^2.$$

Подставим полученные оценки в тождество (14) и выбирая $\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6=\frac{\nu_0}{2}$, получим следующее неравенство

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|\vec{v}_x\|^2+\chi\|\Delta\vec{v}\|^2\right)+\tfrac{\nu_0}{2}\textstyle\int_\Omega|\Delta\vec{v}|^2dx \le$$

$$\le c_6(\varepsilon_3)\|\Delta\theta\|^2+c_7(\varepsilon_4)\|\vec{v}_x\|^4+c_8(\varepsilon_5)\left\|\vec{f}\right\|^2+c_0''(\varepsilon_6)c_2.$$

Из полученного неравенства следует нужная оценка

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}_x\|^2+\chi\|\Delta\vec{v}\|^2\right)+\nu_0\int_0^T\int_\Omega|\Delta\vec{v}|^2dxd\tau \le c_9<\infty. \tag{15}$$

Умножим уравнение (2) на θ_t, а также уравнение (1) на $\vec{v}_t$, и проинтегрируем по области Ω, будем иметь следующие соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\lambda(\theta)|\theta_x|^2dx+\|\theta_t\|^2=\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda'(\theta)\theta_t|\theta_x|^2dx-\int_\Omega v_k\theta_{x_k}\theta_t\,dx+\int_\Omega\varphi\cdot\theta_t\,dx, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\|\vec{v}_t\|^2+\chi\|\vec{v}_{tx}\|^2+\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\textstyle\int_\Omega\nu(\theta)\,|\vec{v}_x|^2\,dx=\tfrac{1}{2}\int_\Omega\nu'(\theta)\theta_t\,|\vec{v}_x|^2\,dx-\\&-\textstyle\int_\Omega v_k\vec{v}_{x_k}\vec{v}_tdx+\int_\Omega(\beta(\theta)\vec{g}\theta+\vec{f})\vec{v}_tdx.\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично как при оценивании соотношения (12) и (14), получаем следующие оценки для θ_t и $\vec{v}_t$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\int_\Omega\lambda(\theta)|\theta_x|^2dx\right|+\int_0^T\|\theta_t\|^2\,d\tau\le c_{10}. \tag{18}$$

$$\int_0^T\|\vec{v}_t\|^2\,d\tau+\chi\int_0^T\|\vec{v}_{tx}\|^2\,d\tau\le c_{11}. \tag{19}$$

Теперь умножим скалярно в $L_2(Q_T)$ уравнение (1) на $\Delta\vec{v}_t$, с помощью неравенства вложения имеем оценку для вектор-функций $\Delta\vec{v}_t$:

$$\|\vec{v}_{tx}\|^2_{2,Q_T}+\|\Delta\vec{v}_t\|^2_{2,Q_T}\le c_{12}<\infty. \tag{20}$$

На основе полученных априорных оценок методом Фаэдо-Галеркина легко доказывается существования решения, удовлетворяющего условиям (7). Предельные переходы следуют из известных теорем о компактности [15].

Единственность же доказывается обычным способом, пусть имеются два решения $\vec{v'}$, θ' и $\vec{v}''$, θ''. Запишем для их разности $\vec{u}=\vec{v}'-\vec{v}''$, $\Theta=\theta'-\theta''$ задачу (1)-(5); затем умножим скалярно в $L_2(Q_t)$ на $\vec{u}$ и Θ соответственно, тогда получим

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}(x,t)\|^2_{2,\Omega}+\chi\|\vec{u}_x(x,t)\|^2_{2,\Omega}\right)+\textstyle\int_{Q_t}\nu(\theta')|\vec{u}_x|^2dxdt=\\&=-\textstyle\int_{Q_t}(\nu(\theta')-\nu(\theta''))\vec{v''}_{x_k}\vec{u}_{x_k}dxdt+\int_{Q_t}\beta\vec{g}\Theta\vec{u}dxdt+\int_{Q_t}u_k\vec{v''}\vec{u}_{x_k}dxdt.\end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\|\Theta(x,t)\|^2_{2,\Omega}+\int_{Q_t}\lambda(\theta')|\nabla\Theta|^2dxdt=-\int_{Q_t}(\lambda(\theta')-\lambda(\theta''))\nabla\theta''\nabla\Theta dxdt-\int_{Q_t}u_k\theta'_{x_k}\Theta dxdt. \quad (22)$$

Оценим правые части (21), (22) применяя неравенства Гельдера, Юнга и теоремы вложения Соболева, а также коэффициентам вязкости и теплопроводности применим обобщенную теорему о среднем, тогда имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_t}u_k\vec{v''}\vec{u}_{x_k}dxdt\right|\le\|\vec{u}_x\|_{2,Q_t}\|\vec{u}\|_{4,Q_t}\left\|\vec{v''}\right\|_{4,Q_t}\le\\
&\le\sqrt[4]{2}\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^{\frac12}_{2,\Omega}\|\vec{u}_x\|^{\frac32}_{2,Q_t}\left\|\vec{v''}\right\|_{4,Q_t}\le\kappa_1\left\|\vec{v''}\right\|_{4,Q_t}\left(\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right),\\
&\left|\int_{Q_t}\beta\vec{g}\Theta\vec{u}dxdt\right|\le\kappa_2\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}+\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right),\\
&\left|\int_{Q_t}u_k\theta'\cdot\Theta_{x_k}dxdt\right|\le\kappa_3\|\theta'\|_{4,Q_t}(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}+\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}),\\
&\left|\int_{Q_t}(\nu(\theta')-\nu(\theta''))\vec{v''}_{x_k}\vec{u}_{x_k}dxdt\right|\le c\|\Theta\|_{4,Q_t}\left\|\vec{v''}_x\right\|_{4,Q_t}\|\vec{u}_x\|_{2,Q_t}\le\\
&\le\kappa'_4\left\|\vec{v''}_x\right\|^{\frac12}_{2,Q_t}\left\|\Delta\vec{v''}\right\|^{\frac12}_{2,Q_t}\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}+\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right)\le\\
&\le\kappa_4\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}+\max_{0\le t\le T}\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right),\\
&\left|\int_{Q_t}(\lambda(\theta')-\lambda(\theta''))\nabla\theta''\cdot\nabla\Theta dxdt\right|\le c\|\Theta\|_{4,Q_t}\|\theta''_x\|_{4,Q_t}\|\Theta_x\|_{2,Q_t}\le\\
&\le\kappa'_5\|\theta''_x\|^{\frac12}_{2,Q_t}\|\Delta\theta''\|^{\frac12}_{2,Q_t}\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}\right)\le\\
&\le\kappa_5\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}\right).
\end{aligned}\quad (23)$$

Подставив найденные (23) в равенства (21) и (22), затем, сложив полученные выражения, выводим следующее

$$\begin{aligned}
&\left(\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,\Omega}\right)+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right)^{\frac12}+\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}\right)^{\frac12}\le\\
&\le\kappa_6\left(\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{u}\|^2_{2,\Omega}+\|\vec{u}_x\|^2_{2,\Omega}\right)+\|\vec{u}_x\|^2_{2,Q_t}\right)^{\frac12}+\kappa_7\left(\max_{0\le t\le T}\|\Theta\|^2_{2,\Omega}+\|\Theta_x\|^2_{2,Q_t}\right)^{\frac12},
\end{aligned}\quad (24)$$

из которого следует, что $\vec{u} \equiv 0$ и $\Theta \equiv 0$ для тех t, удовлетворяющих требованию

$$\kappa_4 \equiv \left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{\sqrt{\nu_0}}\right)\left(\kappa_2 + \kappa_4 + \kappa_1 \left\|\vec{v''}\right\|_{4,Q_t} + \kappa_3 \left\|\theta'\right\|_{4,Q_t}\right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$
$$\kappa_5 \equiv \left(\sqrt{2} + \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right)\left(\kappa_2 + \kappa_4 + \kappa_5 + \kappa_3 \left\|\theta'\right\|_{4,Q_t}\right)^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{25}$$

Если такие t не исчерпывают всего интервала $[0, T]$, то, повторяя рассуждение для $t \in [t_1, t_2]$, где t_1 таково, что $\vec{u}(x, t_1) = 0$, и т.д., мы за конечное число шагов убедимся, что $\vec{u} \equiv 0$, $\Theta \equiv 0$ во всем Q_T. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Доклады Академии наук СССР. –1971. –Т.200. –№4. –С.809-812.

[2] *А.П. Осколков* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина-Фойгта // Записки научных семинаров ЛОМИ. –1982. –Т.115. –С.191-202.

[3] *А.П. Осколков* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Записки научных семинаров ЛОМИ. –1973. –Т.38. –С.98-136.

[4] *Осколков А.П.* О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Записки научных семинаров ЛОМИ. –1976. –Т.59. –С.133-177.

[5] *Осколков А.П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. I // Труды Математического института АН СССР. –1975. –Т.127. –С.32-57.

[6] *Хомпыш Х.* Разрешимость начально-краевой задачи тепловой конвекции с условием проскальзывания для уравнений жидкости Кельвина-Фойгта // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева, научный журнал. –Алматы. –2010. -№2(78). –С. 178-182.

[7] *Турбин М.В.* О корректной постановке начально-краевых задач для обобщенной модели Кельвина-Фойгта // Известия Высших учебных заведений. Серия «математика». –2006. –№3(526). –С.50-58.

[8] *Черняков П.С.* О нестационарной свободной конвекции в ограниченной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1966. – Т. 6, № 2. – С.288–303.

[9] *Коренев Н.К.* О некоторых задачах конвекции в вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Ленинградского Университета. – 1971. – № 7. – С. 29–39.

[10] *Кажихов А.В., Рагулин В.В.* О задаче конвекции в вязкой жидкости. В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, –1979. – Вып. 40. – С. 127–133.

[11] *Смагулов Ш.* Корректность краевой задачи для уравнений свободной конвекции с диссипацией // В сб.: Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 1985. – С. 134–139.

[12] *Джаикбаев А.М., Дурмагамбетов А.А., Смагулов Ш.* Об уравнениях свободной конвекции с диссипацией // Доклады АН СССР. – 1988. –Т. 301, № 3. – С. 579–581.

[13] *Сахаев Ш.С.* О дифференциальных свойствах решений одной задачи свободной конвекции // Известия АН КазССР, серия физ.–матем. – 1977. – № 3. – С. 80–84.

[14] *Consiglieri L., Rodrigues J.F., Shilkin T.* On the Navier-Stokes equations with the energy-dependent nonlocal viscosities // Записки научных семинаров ПОМИ. –2003. –Т.306. –С.71-91.

[15] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, – 1970. – 288 с.

S.E. Aitzhanov, E.S. Alimzhanov, N.B. Zakaryanova, *Solvability of initial-boundary value problem for the heat convection coefficient of viscosity and thermal conductivity, temperature dependen*, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 27 – 34

In this paper we investigate the unique solvability in the whole time of the initial-boundary value problem of heat convection for Kelvin-Voigt. This model describes the motion of viscous non-Newtonian fluids with polymer additives. In the system of equations the coefficient of viscosity and thermal conductivity depend on temperature. For the solvability of initial-boundary value problem of a priori estimates.

С.Е. Айтжанов, Е.С. Алимжанов, Н.Б. Закариянова, *Тұтқырлыгы және жылуөткізгіштік коэффициенттері температурадан тәуелді жылу конвекция үшін бастапқы–шеттік есептің шешімділігі* ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2012, №1(72), 27 – 34

Бұл жұмыста Кельвин-Фойгт сұйығы үшін бастапқы-шеттік жылу конвекция есебінің тұтас уақыт аралығында бірмәнді шешілімділігі зерттелінеді. Бұл модель полимер қоспалы ньютондық емес тұтқыр сұйықтардың қозғалысын сипатайды. Жүйе теңдеулерінің тұтқырлық және жылу өткізгіштік коэффициенттері температурадан тәуелді. Бастапқы-шеттік есептің шешімділігі үшін қажетті априорлық бағалаулар алынды.