Решение задачи двухкомпонентного пограничного слоя с учетом теплообмена на границе

Ж.Ж. Жанабеков
Казахский национальный университет им.аль-Фараби
e-mail: zhanabekov@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматривается система уравнений двухфазного теплового пограничного слоя с поверхностью разрыва около пластины при произвольной скорости вдува. Граничное условие относительно температуры определяет процесс конвективного теплообмена между поверхностью пластины и окружающей средой (вдуваемая жидкость). Методом последовательных приближений задача сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений относительно температуры. На основе нулевого приближения построены формулы первого приближения для температурного поля.

Рассмотрим обтекание равномерным потоком асимптотически тонкой пластины. Пусть через поверхность пластины в основной поток вводится инородная жидкость. При этом система уравнении установившегося несжимаемого двухкомпонентного теплового пограничного слоя запишется в виде (1):

$$
\begin{aligned}
&u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)+\frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot U\cdot U',\\
&\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=0\\
&u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial T_i}{\partial y}=\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_i\frac{\partial T_i}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Граничными условиями будут

$$
u_1=0,\ v_1=v_w(x),\ a_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)=-(T_1-T_w)\cdot v_w, \text{при }\ y=0, \tag{2}
$$

$$
u_2=U(x), T_2=T_\infty,\ \text{при }\ y\to\infty \tag{3}
$$

где a_1- коэффициент температуропроводности. Условия на поверхности разрыва:

$$
\begin{aligned}
&u_1=u_2,\ \ T_1=T_2\\
&\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y},\ k_1\frac{\partial T_1}{\partial y}=k_2\frac{\partial T_2}{\partial y}\\
&u_1\frac{dy_0}{dx}-v_1=u_2\frac{dy_0}{dx}-v_2=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В упомянутой выше работе методом последовательных приближений построено решение задачи при условии $T_1=T_w$ при $=0$, т.е. температура вдуваемой жидкости на стенке равна температуре поверхности пластины. В данной работе учитывается условие (2), характеризующее закон конвективного теплообмена между поверхностью пластины и окружающей средой (вдуваемая жидкость). После преобразования с помощью переменных Гертлера-Виттинга уравнения энергии в (1) примут вид

$$\frac{1}{m\sigma_1}\cdot\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\eta^2}+\varphi_1\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}=2\xi\cdot\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}\right] \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sigma_2}\cdot\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\eta^2}+\varphi_2\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}=2\xi\cdot\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}\right] \tag{6}$$

где $\varphi_i(\xi,\eta)$– безразмерные функции тока, ξ,η– переменные Гертлера-Виттинга, $\theta_i=\frac{T_i-T_w}{T_\infty-T_w}$– безразмерная температура. При этом условия на границе и на поверхности разрыва имеют вид:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}=m\sigma_1\cdot f_w\cdot\theta_1,\ \text{ при }\ \ \eta=0, \tag{7}$$

$$\theta_2\to 1\ \text{ при }\ \ \eta\to\infty \tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta}=k\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta},\ \ \theta_1=\theta_2,\ \text{ при }\ \ \eta=\eta_0(\xi) \tag{9}$$

где $f_w(\xi)=\frac{v_w(x)}{U}\cdot\sqrt{2\xi}$ - безразмерная скорость вдува.

Следуя работе [1], вводятся новые переменные

$$s=\xi, z=\frac{\eta}{\eta_0(s)},\ \alpha_2(s)\cdot\varsigma=\alpha_3(s)\cdot\chi \tag{10}$$

где $\eta_0(s)=\sqrt{\alpha_1(s)}$, $\alpha_2(s)$ и $\alpha_3(s)$ - неопределенные пока функции, которые определяются из условия на поверхности разрыва.

Полагая $\theta_1(\xi,\eta)=g_1(s,z)$ и $\theta_2(\xi,\eta)=g_2(s,\chi)$, получим

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}=-m\sigma_1\left\{\left[(\alpha_1+s\alpha_1^{'})\cdot f_1+2s\alpha_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial g_1}{\partial z}-2s\alpha_1\widetilde{u_1}\frac{\partial g_1}{\partial s}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial\chi^2}=-\sigma_2\left\{\left[(s\alpha_1\alpha_3^2)'\cdot r_2+2s\alpha_1\alpha_3^2\frac{\partial r_2}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial g_2}{\partial\chi}-2s\alpha_1\alpha_3^2\cdot\frac{\partial r_2}{\partial\chi}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial s}\right\} \tag{12}$$

$$\varphi_1(\xi,\eta)=\sqrt{\alpha_1(s)}\cdot f_1(s,z),\ \ \varphi_2(\xi,\eta)=\sqrt{\alpha_1(s)}\cdot\alpha_2(s)\cdot f_2(s,\zeta)$$

$$f_1(s,z)=\int_1^z\widetilde{u_1}(s,\overline{z})d\overline{z},\ \ f_2(s,\zeta)=\int_0^\zeta\widetilde{u_2}(s,\overline{\zeta})d\overline{\zeta}$$

$$\alpha_2(s)\cdot f_2(s,\varsigma)=\alpha_3(s)\cdot r_2(s,\chi),\ \ r_2(s,\chi)=\int_0^\chi\widetilde{v_2}(s,\overline{\chi})d\overline{\chi}$$

Граничные условия относительно температуры и условия на поверхности разрыва (7)–(9) примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial z}=m\sigma_1\cdot f_w(s)\cdot g_1,\ \ \text{ при } z=0 \tag{13}$$

$$g_2(s,\chi) \to 1, \quad \text{при } \chi \to \infty \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{k}{\alpha_3} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \chi} \ \text{ и } \ g_1 = g_2, \quad \text{при } z = 1, \ \text{при } \chi = 0 \tag{15}$$

Формально интегрируя уравнения (11) и (12) дважды по своим поперечным координатам z, χ, а также учитывая граничные условия к ним, получим интегро-дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} g_1(s,z) = \ & -m\sigma_1 \cdot \left[(\alpha_1 + s\alpha_1^{'}) \cdot A_1^*(s,z) + 2s\alpha_1 \cdot C_1^*(s,z)\right] + \\ & + \left[m\sigma_1 \cdot \sqrt{\alpha_1} \cdot f_w(s) \cdot z + 1\right] \cdot g_w(s) \end{aligned} \tag{16}$$

$$g_2(s,\chi) = 1 - \sigma_2 \cdot \left[(s\alpha_1\alpha_3^2)^{'} \cdot A_2^*(s,\chi) + 2s\alpha_1\alpha_3^2 C_2^*(s,\chi)\right] \tag{17}$$

где $A_1^*(s,z), C_1^*(s,z), A_2^*(s,\chi)$, и $C_2^*(s,\chi)$ принятые в работе [1] обозначения. Для определения температуры на поверхности тела $g_w(s) = g_1(s,0)$ воспользуемся первым равенством условия (15). При этом

$$g_w(s) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_1} \cdot f_w(s)} \cdot \tag{18}$$

$$\left\{(\alpha_1 + s\alpha_1^{'})\delta_1 + 2s\alpha_1(\delta_1^*)^{'} + \frac{k\sigma_2}{m\sigma_1}\left[(\alpha_1\alpha_3 + s\alpha_1^{'}\alpha_3 + 2s\alpha_1\alpha_3^{'})\delta_3^* + 2s\alpha_1\alpha_3 \cdot (\delta_3^*)^{'}\right]\right\}$$

Подставляя (18) в (16), получим

$$g_1(s,z) = (\alpha_1 + s\alpha_1^{'}) \cdot [(k\sigma_2\alpha_3 \cdot \delta_3^* - m\sigma_1\delta_1^*) \cdot (z + w(s)) - m\sigma_1 \cdot A_1^*(s,z)] + \tag{19}$$

$$+2s\alpha_1\left[(k\sigma_2\alpha_3\delta_3^* - m\sigma_1\delta_1^*)^{'}(z + w(s)) - m\sigma_1 C_1^*(s,z)\right], \ w(s) = \frac{1}{m\sigma_1\sqrt{\alpha_1}f_w(s)}.$$

Из второго равенства условия (15) определяется неизвестная функция $\alpha_3(s)$. Пусть в нулевом приближении распределение скоростей и температур имеет вид

$$\widetilde{u_1}^{(0)} = \widetilde{u_0} \cdot z, \qquad \widetilde{u_2}^{(0)} = 1 - (1 - \widetilde{u_0}) \cdot e^{-\zeta} \tag{20}$$

$$g_1^{(0)} = g_0 \cdot z, \qquad g_2^{(0)} = 1 - (1 - g_0) \cdot e^{-\chi}$$

Где $\widetilde{u_0}, g_0$ - постоянные, которые будем считать известными. Легко заметить, что функции (20) удовлетворяют граничным условиям и условиям на поверхности разрыва (13)–(15). При этом $g_0 = m\sigma_1 \cdot \sqrt{\alpha_1} f_w(s) \cdot g_w(s)$ при $z = 0$, где $g_w(s)$ определяется по формуле (18), т.е.

$$g_w(s) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha_1} \cdot f_w(s)} \cdot \left[\frac{k}{m} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot (\alpha_1\alpha_3 + s\alpha_1^{'}\alpha_3 + 2s\alpha_1\alpha_3^{'}) \cdot \delta_3^* - (\alpha_1 + s\alpha_1^{'}) \cdot \delta_1^*\right]$$

$$\alpha_1 = \left(-\frac{1}{\widetilde{u_0} \cdot \sqrt{s}} \cdot \int_0^s \frac{f_w(s^*)}{\sqrt{s^*}} ds^*\right), \ \alpha_3 = \frac{k(1 - g_0)}{g_0},$$

где

$$\delta_1^* = \frac{\widetilde{u}_0 \cdot g_0}{3}, \qquad \delta_3^* = (1-g_0)\cdot\left[1-\frac{(1-\widetilde{u}_0)\cdot\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_3}\right];$$

Распределение температур в первом приближении скоростей и температур имеет вид

$$g_1^{(1)}(s,z) = (s\cdot\alpha_1)'\cdot$$

$$\left\{\left[k\sigma_2\alpha_3(1-g_0)\left(1-\frac{1-\widetilde{u}_0}{\alpha_2+\alpha_3}\alpha_2\right)-m\sigma_1\frac{\widetilde{u}_0 g_0}{3}\right](z+w(s))-m\sigma_1\frac{\widetilde{u}_0 g_0}{24}(z^4-6z^2)\right\}+$$

$$+2s\alpha_1 k\sigma_2(1-g_0)\left[(1-\widetilde{u}_0)\frac{\alpha_2\alpha_3'-\alpha_2'\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)^2}\alpha_3+\left(1-\frac{1-\widetilde{u}_0}{\alpha_2+\alpha_3}\alpha_2\right)\frac{d\alpha_3}{ds}\right](z+w(s)),$$

$$g_2^{(1)}(s,\chi) = 1-\sigma_2(s\alpha_1\alpha_3^2)'(1-g_0)\left[(\chi+2)-(1-\widetilde{u}_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\left(1-\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2+\alpha_3)^2}e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\chi}\right)\right]e^{-\chi}+$$

$$2s\alpha_1(1-g_0)(1-\widetilde{u}_0)\frac{\alpha_2'\alpha_3+\alpha_2\alpha_3'}{\alpha_2+\alpha_3}\left[\left(\frac{\alpha_2+3\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)^2}\alpha_2+\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}\chi\right)\alpha_2 e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\chi}-(\alpha_2+\alpha_3)\right]e^{-\chi}$$

Список литературы

[1] Жанабеков Ж.Ж. Оптимальное управление теплообменом в двухкомпонентном пограничном слое Автореф.дис.на соиск.учен.степени канд.физ.-мат.наук. - Алматы, 1981. - 17 с.

Ж.Ж. Жаңабеков , The solution of two-component boundary layer with the heat transfer at the border, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 35 – 38

In this paper, we consider a system of equations of two-phase warm boundary layer near the surface rupture of the plate at an arbitrary rate of injection. The boundary condition relative to temperature determines the process of convective heat transfer between the surface plate and the environment (injected fluid) The method of successive approximations of the problem reduces to solving an integro-differential equations with relative to temperature. It was based on the zero order approximation formulas are constructed first approximation for the temperature field.

Ж.Ж. Жанабеков, Екі компонентті шекаралық қабаттың шекарасындағы жылу алмасуы туралы есепті шешу , ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2012, №1(72), 35 – 38

Мақалады пластина қабырғасы арқылы сұйық кез келген заңдылықпен үрілгенде пайда болған айырушы беті бар екі фазалық жылу шекарасы қабатының теңдеулер жүйесі қарастырылады. Температураға қатысты шекаралық шарт пластина беті мен қоршаған орта арасындағы конвективті жылу алмасу үрдісін анықтайды. Есеп біртіндеп жуықтап есептеу әдісімен температура бойынша интегро - дифференциалдық теңдеулерді шешуге келтіріледі. Нөлдік жуықтау арқылы температуралық өрістің бірінші жуықтап есептеу формуласы алынған.