Оценки и асимптотические свойства решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с запаздываниями

С. Искандаров, М.А. Темиров
Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики
г. Бишкек, e-mail: mrmacintosh@list.ru, min.max@mail.ru

Аннотация

Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие оценки, ограниченность, степенную абсолютную интегрируемость на полуоси, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, всех решений и их первых, вторых, третьих производных слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра.

Все фигурирующие функции от $t, (t,\tau)$ и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; функции от $(t, x_k, y_k, z_k, u_k, v_k)$, $(t, \tau, w_k, \omega_k, p_k, q_k)$ $(k = 1, ..., m)$ являются непрерывными при $t \geq t_0$, $|x_k|$, $|y_k|$, $|z_k|$, $|u_k|$, $|v_k| < \infty$, $t \geq \tau \geq t_0$, $|w_k|$, $|\omega_k|$, $|p_k|$, $|q_k| < \infty$ $(k = 1, ..., m)$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ -дифференциальное уравнение; под оценкой и асимптотическим свойством решений ИДУ четвертого порядка понимаются оценка и асимптотическое свойство на полуинтервале J всех его решений и их первых, вторых, третьих производных. Под асимптотическими свойствами понимаются ограниченность, степенная абсолютная интегрируемость на J, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$.

Задача 1 *Установить достаточные условия, обеспечивающие оценки и асимптотические свойства, решений ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:*

$$\begin{aligned} &x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + \\ &+ Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)]\, d\tau = f(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} F_k(t, X_{1k}(t), \int\limits_{t_0}^{t} H_k(t,\tau,\ X_{2k}(\tau)d\tau), \quad t \geq t_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$X_{1k}(t) \equiv \{x(\alpha_k(t)), x'(\beta_k(t)), x''(\gamma_k(t)), x'''(\delta_k(t))\};$$

$$X_{2k}(t) \equiv \{x(\eta_k(t)), x'(\mu_k(t)), x''(\nu_k(t)), x'''(\rho_k(t))\},$$

и функции $F_k(t, x_k, y_k, z_k, u_k, v_k)$, $H_k(t, \tau, w_k, \omega_k, p_k, q_k)$ $(k = 1, ..., m)$ удовлетворяют условию "слабой нелинейности":

$$\begin{aligned} |F_k(t, x_k, y_k, z_k, u_k, v_k)| &\leq F_{0k}(t) + g_{0k}(t)\,|x_k| + g_{1k}(t)\,|y_k| + g_{2k}(t)\,|z_k| + \\ &+ g_{3k}(t)\,|u_k| + g_{4k}(t)\,|v_k|\,, \\ |H_k(t, \tau, w_k, \omega_k, p_k, q_k)| &\leq H_{0k}(t,\tau) + h_{0k}(t,\tau)\,|w_k| + h_{1k}(t,\tau)\,|\omega_k| + \\ &+ h_{2k}(t,\tau)\,|p_k| + h_{3k}(t,\tau)\,|q_k|\,, \end{aligned} \tag{SL}$$

$(F_{0k}(t) \geq 0,\ g_{jk}(t) \geq 0,\ g_{4k}(t) \geq 0,\ H_{0k}(t,\tau) \geq 0,\ h_{jk}(t,\tau) \geq 0\ (k = 1, ..., m;, j = 0, 1, 2, 3))$ *и при выполнении условия "запаздывания"аргументов:*

$$\begin{aligned} &\alpha_k(t) \leq t,\ \beta_k(t) \leq t,\ \gamma_k(t) \leq t,\ \delta_k(t) \leq t,\ \eta_k(t) \leq t, \\ &\mu_k(t) \leq t,\ \upsilon_k(t) \leq t,\ \rho_k(t) \leq t\ \ (k = 1, ..., m). \end{aligned} \tag{d}$$

При этом начальное множество $E_{t_0} = \{t_0\}$, т.е. состоит из одной точки t_0.

Отметим, что в [1] для ИДУ (1) с условиями (SL), (d) установлены достаточные условия ограниченности на полуинтервале J решений нестандартным методом сведения к системе [2], методом преобразования уравнений [3, с. 25-27], методом весовых и срезывающих функций [3, с. 31-32] и методом интегральных неравенств с запаздываниями [4]. В [5] задача, аналогичная сформулированной задаче, изучена методом сравнения с решениями соответствующей ДУ для векторного ИДУ вида (1) со степенными нелинейностями.

В настоящей работе для решения поставленной задачи сначала развиваются идеи нестандартных методов сведения к системе из [6, 2], затем применяются метод преобразования уравнений [3, с. 25-27], метод весовых функций [3, с. 27-28], метод срезывающих функций [3, с. 41] и метод интегральных неравенств с запаздываниями [1]. Устанавливаются достаточные условия типа немалости членов.

Переходим к изложению основных результатов.

В ИДУ (1) аналогично [6, 2] сделаем замены:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W_1(t)y(t), \quad x'(t) = -\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = W_2(t)u(t), \quad y''(t) = -\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t), \tag{3}$$

где λ, μ - некоторые вспомогательные параметры, $\lambda,\ \mu \neq 0$; $0 < W_r(t)$ $(r = 1, 2)$ - некоторые весовые функции; $y(t)$, $u(t)$ - новые неизвестные функции.

Идея замены (2) взята из [6], замены (3) – из [2].

Из (2), (3) дифференцированием получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x''(t) = \ & -\lambda^2 x'(t) + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) = -\lambda^2[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + \\ & + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) = \lambda^4 x(t) + M_1(t)y(t) + W_1(t)y'(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $M_1(t) \equiv W_1'(t) - \lambda^2 W_1(t)$,

$$\begin{aligned} x'''(t) = \ & \lambda^4 x'(t) + M_1'(t)y(t) + M_1(t)y'(t) + W_1'(t)y'(t) + W_1(t)y''(t) = \\ & = \lambda^4[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + M_1'(t)y(t) + [M_1(t) + W_1'(t)]y'(t) + \\ & + W_1(t)[-\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t)] = \\ & = -\lambda^6 x(t) + M_2(t)y(t) + M_3(t)y'(t) + W_1(t)W_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $M_2(t) \equiv M_1'(t) + (\lambda^4 - \mu^2)W_1(t)$, $M_3(t) \equiv M_1(t) + W_1'(t)$,

$$\begin{aligned} x^{(4)}(t) = \ & -\lambda^6 x'(t) + M_2'(t)y(t) + M_2(t)y'(t) + M_3'(t)y'(t) + M_3(t)y''(t) + \\ & + (W_1(t)W_2(t))'u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) = -\lambda^6[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + \\ & + M_2'(t)y(t) + [M_2(t) + M_3'(t)]y'(t) + M_3(t)[-\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t)] + \\ & + (W_1(t)W_2(t))'u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) = \lambda^8 x(t) + M_4(t)y(t) + M_5(t)y'(t) + \\ & + M_6(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $M_4(t) \equiv M_2'(t) - \lambda^6 W_1(t) - \mu^2 M_3(t)$, $M_5(t) \equiv M_2(t) + M_3'(t)$, $M_6(t) \equiv M_3(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'$.

Подставляя (2) – (6) в ИДУ (1), имеем:

$$\begin{aligned}
&\lambda^8 x(t) + M_4(t)y(t) + M_5(t)y'(t) + M_6(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) + a_3(t)[-\lambda^6 x(t)+\\
&+M_2(t)y(t)+M_3(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)u(t)]+a_2(t)[\lambda^4 x(t)+M_1(t)y(t)+W_1(t)y'(t)]+\\
&+a_1(t)[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)[-\lambda^2 x(\tau)+\\
&+W_1(\tau)y(\tau)] + Q_2(t,\tau)[\lambda^4 x(\tau) + M_1(\tau)y(\tau) + W_1(\tau)y'(\tau)] + Q_3(t,\tau)[-\lambda^6 x(\tau)+\\
&+M_2(\tau)y(\tau) + M_3(\tau)y'(\tau) + W_1(\tau)W_2(\tau)u(\tau)]\}d\tau = f(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m} F_k(t, \tilde{X}_{1k}(t), \int\limits_{t_0}^{t} H_k(t,\tau,\tilde{X}_{2k}(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{1k}(t) \equiv \ &\{x(\alpha_k(t)), -\lambda^2 x(\beta_k(t)) + W_1(\beta_k(t))y(\beta_k(t))\lambda^4 x(\gamma_k(t))+\\
&+M_1(\gamma_k(t))y(\gamma_k(t)) + W_1(\gamma_k(t))y'(\gamma_k(t)), -\lambda^6 x(\delta_k(t))+\\
&+M_2(\delta_k(t))y(\delta_k(t)) + M_3(\delta_k(t))y'(\delta_k(t)) + W_1(\delta_k(t))W_2(\delta_k(t))u(\delta_k(t))\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{2k}(t) \equiv \ &\{x(\eta_k(t)), -\lambda^2 x(\mu_k(t)) + W_1(\mu_k(t))y(\mu_k(t)), \lambda^4 x(v_k(t))+\\
&+M_1(v_k(t))y(v_k(t)) + W_1(v_k(t))y'(v_k(t)), -\lambda^6 x(\rho_k(t))+\\
&+M_2(\rho_k(t))y(\rho_k(t)) + M_3(\rho_k(t))y'(\rho_k(t)) + W_1(\rho_k(t))W_2(\rho_k(t))u(\rho_k(t))\}.
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$b_3(t) \equiv a_3(t) + M_6(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $u(t)$),

$b_2(t) \equiv a_2(t)(W_2(t))^{-1} + [a_3(t)M_3(t) + M_5(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $y'(t)$),

$b_1(t) \equiv a_1(t)(W_2(t))^{-1} + [a_2(t)M_1(t) + a_3(t)M_2(t) + M_4(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $y(t)$),

$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4 a_2(t) - \lambda^6 a_3(t) + \lambda^8]\,(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $x(t)$)

$P_0(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}\ [Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_1(t,\tau) + \lambda^4 Q_2(t,\tau) - \lambda^6 Q_3(t,\tau)]$ (коэффициент $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}\ [Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)M_1(\tau) + Q_3(t,\tau)M_2(\tau)]$ (коэффициент $y(\tau)$),

$P_2(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}\ [Q_2(t,\tau)W_1(\tau) + Q_3(t,\tau)M_3(\tau)]$ (коэффициент $y'(\tau)$),

$K(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}\, Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)$ (коэффициент $u(\tau)$).

Проделая в (7) некоторые простейшие выкладки, деля обе части на $W_1(t)W_2(t)$, учитывая введенные обозначения, и соединяя с заменами (2), (3), получаем следующую систему, эквивалентную заданному ИДУ четвертого порядка (1):

$$\begin{cases}
x'(t) + \lambda^2 x(t) = W_1(t)y(t),\\
y''(t) + \mu^2 y(t) = W_2(t)u(t),\\
u'(t) + b_3(t)u(t) + b_2(t)y'(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+\\
+P_1(t,\tau)y(\tau) + P_2(t,\tau)y'(\tau) + K(t,\tau)u(\tau)]\,d\tau = (W_1(t)W_2(t))^{-1}f(t)+\\
+(W_1(t)W_2(t))^{-1}\sum_{k=1}^{m} F_k(t,\tilde{X}_{1k}(t), \int\limits_{t_0}^{t} H_k(t,\tau,\tilde{X}_{2k}(\tau)d\tau), \quad t \geq t_0.
\end{cases} \tag{8}$$

Пусть [3]:

$0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$(W_1(t)W_2(t))^{-1}f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)\ \ (i=1,...,n)$ – некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},$$

$$E_i(t)\equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t),\quad (i=1,...,n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ \ (i=1,...,n)$ - некоторые функции, $\Delta(t)\equiv 2\lambda^2\varphi(t)-\varphi'(t)$.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t),u(t))$ системы (8) ее первое уравнение умножаем на $\varphi(t)x(t)$, второе – на $y'(t)$, третье – на $u(t)$, полученные соотношения сложим и интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (), (f), (R), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)\ \ (i=1,...,n)$, $\Delta(t)$, применяем леммы 1.4, 1.5 [7], и условие (SL). Тогда будем иметь следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2ds+(y'(t))^2+\mu^2(y(t))^2+(u(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_3(s)\,(u(s))^2ds+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(U_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(U_i(s,t_0))^2ds+B_i(t)(U_i(t,t_0))^2-\\
&-2E_i(t)U_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(U_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)U_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\\
&+\int_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)(U_i(t,\tau))^2d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{is\tau}(s,\tau)(U_i(s,\tau))^2d\tau ds\}\le c_*+\\
&+2\int_{t_0}^{t}[W_1(s)\varphi(s)\,|x(s)|\,|y(s)|+W_2(s)\,|u(s)|\,|y'(s)|]ds+2\int_{t_0}^{t}|u(s)|\,\{|b_2(s)|\,|y'(s)|+\\
&+|b_1(s)|\,|y(s)|+|b_0(s)|\,|x(s)|+\int_{t_0}^{s}[|P_0(s,\tau)|\,|x(\tau)|+|P_1(s,\tau)|\,|y(\tau)|+\\
&+|P_2(s,\tau)|\,|y'(\tau)|]\,d\tau\}ds+2\int_{t_0}^{t}(W_1(s)W_2(s))^{-1}\,|u(s)|\sum_{k=1}^{m}\{F_{0k}(s)+g_{0k}(s)\,|x(\alpha_k(s))|+\\
&+g_{1k}(s)[\lambda^2\,|x(\beta_k(s))|+W_1(\beta_k(s))\,|y(\beta_k(s))|]+g_{2k}(s)[\lambda^4\,|x(\gamma_k(s))|+\\
&+|M_1(\gamma_k(s))|\,|y(\gamma_k(s))|+W_1(\gamma_k(s))\,|y'(\gamma_k(s))|]+g_{3k}(s)[\lambda^6\,|x(\delta_k(s))|+\\
&+|M_2(\delta_k(s))|\,|y(\delta_k(s))|+|M_3(\delta_k(s))|\,|y'(\delta_k(s))|+W_1(\delta_k(s))W_2(\delta_k(s))\,|u(\delta_k(s))|]+\\
&+g_{4k}(s)\int_{t_0}^{s}H_{ok}(s,\tau)d\tau+\int_{t_0}^{s}G_{ok}(s,\tau)\,|x(\eta_k(\tau))|\,d\tau+\int_{t_0}^{s}G_{1k}(s,\tau)[\lambda^2\,|x(\mu_k(\tau))|+\\
&+W_1(\mu_k(\tau))\,|y(\mu_k(\tau))|]d\tau+\int_{t_0}^{s}G_{2k}(s,\tau)[\lambda^4\,|x(v_k(\tau))|+|M_1(v_k(\tau))|\,|y(v_k(\tau))|+\\
&+W_1(v_k(\tau))\,|y'(v_k(\tau))|]d\tau+\int_{t_0}^{s}G_{3k}(s,\tau)[\lambda^6\,|x(\rho_k(\tau))|+|M_2(\rho_k(\tau))|\,|y(\rho_k(\tau))|+\\
&+|M_3(\rho_k(\tau))|\,|y'(\rho_k(\tau))|+W_1(\rho_k(\tau))W_2(\rho_k(\tau))\,|u(\rho_k(\tau))|\,d\tau\}ds,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$U_i(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)u(\eta)d\eta, \quad (i=1,...,n),$$

$$c_* = \varphi(t_0)\left(x(t_0)\right)^2 + \left(y'(t_0)\right)^2 + \mu^2\left(y(t_0)\right)^2 + \left(u(t_0)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0),$$

$$G_{jk}(t,\tau) \equiv g_{4k}(t)h_{jk}(t,\tau) \ \ (j=0,1,2,3; k=1,...,m).$$

Теорема 1 *Пусть*

1) выполняются условия (SL), (d), $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $W_r(t) > 0 \ \ (r=1,2)$, $\varphi(t) > 0$; (K), (f), (R);

2) $\Delta(t) \geq 0$;

3) $b_3(t) \geq 0$;

4) $A_i(t) \geq 0$, $B_i(t) \geq 0$, $B_i'(t) \leq 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau) \geq 0$, *существуют функции* $A_i^*(t) \in L^1(J, R_+, c_i(t), R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ *такие, что* $A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)$, $(E_i^{(r)}(t))^2 \leq B_i^{(r)}(t)c_i^{(r)}(t)$, $R''_{it\tau}(t,\tau) \leq R_i^*(t)R'_{i\tau}(t,\tau) \ \ (i=1,...,n;\ r=0,1)$;

5) $W_1(t)(\varphi(t))^{\frac{1}{2}} + W_2(t) + |b_2(t)| + |b_1(t)| + |b_0(t)|\,(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + \int\limits_{t_0}^{t}[|P_0(t,\tau)|\,(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(t,\tau)| +$
$|P_2(t,\tau)|]d\tau + (W_1(t)W_2(t))^{-1}\{F_{0k}(t) + g_{0k}(t)(\varphi(\alpha_k(t)))^{-\frac{1}{2}} + g_{1k}(t)[(\varphi(\beta_k(t)))^{-\frac{1}{2}} + W_1(\beta_k(t))] +$
$+ g_{2k}(t)[(\varphi(\gamma_k(t)))^{-\frac{1}{2}} + |M_1(\gamma_k(t))| + W_1(\gamma_k(t))] + g_{3k}(t)[(\varphi(\delta_k(t)))^{-\frac{1}{2}} + |M_2(\delta_k(t))| + |M_3(\delta_k(t))| +$
$+ W_1(\delta_k(t))W_2(\delta_k(t))] + g_{4k}(t)\int\limits_{t_0}^{t} H_{ok}(t,\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} G_{ok}(t,\tau)(\varphi(\eta_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}}d\tau +$
$+ \int\limits_{t_0}^{t} G_{1k}(t,\tau)[(\varphi(\mu_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} + W_1(\mu_k(\tau))]d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} G_{2k}(t,\tau)[(\varphi(v_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} +$
$+ |M_1(v_k(\tau))| + W_1(v_k(\tau))]d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} G_{3k}(t,\tau)[(\varphi(\rho_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} + |M_2(\rho_k(\tau))| + |M_3(\rho_k(\tau))| +$
$+ W_1(\rho_k(\tau))W_2(\rho_k(\tau))]d\tau \in L^1(J, R_+ \backslash \{0\}) \ \ (k=1,...,m).$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t))$ *системы (8) справедливы следующие утверждения:*

$$x(t) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \tag{10}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds = O(1), \tag{11}$$

$$y^{(k)}(t) = O(1) \quad (k=0,1), \tag{12}$$

$$u(t) = O(1), \tag{13}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} b_3(s)(u(s))^2 ds = O(1), \tag{14}$$

$$A_i(t)(U_i(t,t_0))^2 = O(1) \quad (i = 1, ..., n), \tag{15}$$

и для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедлива оценка (10) и:

$$x'(t) = [(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + W_1(t)]O(1), \tag{16}$$

$$x''(t) = [(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + |M_1(t)| + W_1(t)]O(1), \tag{17}$$

$$x'''(t) = [(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + |M_2(t)| + |M_3(t)| + W_1(t)W_2(t)]O(1). \tag{18}$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\begin{gathered}V(t) \equiv \varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds + (y'(t))^2 + \mu^2(y(t))^2 + (u(t))^2 + \\ +2\int_{t_0}^{t} b_3(s)(u(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} [A_i(t)(U_i(t,t_0))^2 + \int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)(U_i(t,\tau))^2 d\tau].\end{gathered} \tag{19}$$

Тогда в силу условий 1) – 4) имеем: $c_* \geq 0$, $V(t) \geq 0$ и каждое слагаемое из (19) неотрицательное, и из (9) имеем следующее интегральное неравенство с запаздываниями:

$$\begin{gathered}V(t) \leq c_* + 2\int_{t_0}^{t} [\mu^{-1} W_1(s)(\varphi(s))^{\frac{1}{2}} + W_2(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (A_i^*(s) + R_i^*(s))]V(s)ds + \\ +2\int_{t_0}^{s} (V(s))^{\frac{1}{2}} \{[|b_2(s)| + \mu^{-1}|b_1(s)| + |b_0(s)|(\varphi(s))^{-\frac{1}{2}}](V(s))^{\frac{1}{2}} + \\ + \int_{t_0}^{s} [|P_0(s,\tau)|(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}|P_1(s,\tau)| + |P_2(s,\tau)|](V(\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau\} ds + \\ +2\int_{t_0}^{t} (W_1(s)W_2(s))^{-1}(V(s))^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{m} \{F_{0k}(s) + g_{0k}(s)(\varphi(\alpha_k(s)))^{-\frac{1}{2}}(V(\alpha_k(s)))^{\frac{1}{2}} + \\ +g_{1k}(s)[\lambda^2(\varphi(\beta_k(s)))^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}W_1(\beta_k(s))](V(\beta_k(s)))^{\frac{1}{2}} + g_{2k}(s)[\lambda^4(\varphi(\gamma_k(s)))^{-\frac{1}{2}} + \\ +\mu^{-1}|M_1(\gamma_k(s))| + W_1(\gamma_k(s))](V(\gamma_k(s)))^{\frac{1}{2}} + g_{3k}(s)[\lambda^6(\varphi(\delta_k(s)))^{-\frac{1}{2}} + \\ +\mu^{-1}|M_2(\delta_k(s))| + |M_3(\delta_k(s))| + W_1(\delta_k(s))W_2(\delta_k(s))](V(\delta_k(s)))^{\frac{1}{2}} + \\ +g_{4k}(s)\int_{t_0}^{s} H_{ok}(s,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{s} G_{ok}(s,\tau)(\varphi(\eta_k(\tau))^{-\frac{1}{2}}(V(\eta_k(\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau + \\ + \int_{t_0}^{s} G_{1k}(s,\tau)[\lambda^2(\varphi(\mu_k(\tau))^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}W_1(\mu_k(\tau))](V(\mu_k(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\tau + \\ + \int_{t_0}^{s} G_{2k}(s,\tau)[\lambda^4(\varphi(v_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}|M_1(v_k(\tau))| + W_1(v_k(\tau))](V(v_k(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\tau + \\ + \int_{t_0}^{s} G_{3k}(s,\tau)[\lambda^6(\varphi(\rho_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} + \mu^{-1}|M_2(\rho_k(\tau))| + |M_3(\rho_k(\tau))| + \\ +W_1(\rho_k(\tau))W_2(\rho_k(\tau))](V(\rho_k(\tau)))^{\frac{1}{2}} d\tau\} ds.\end{gathered} \tag{20}$$

Применением к (20) лемму [1] об интегральном неравенстве с запаздываниями и с учетом условий 4), 5), получаем:

$$V(t) \leq c_{**}, \tag{21}$$

где c_{**} - вполне определенное положительное число. Из (21) вытекают утверждения (10) – (15). Наконец из (2) получаем оценку (16), из (4) – оценку (17), из (5) – оценку (18). Теорема доказана.

Таким образом, для любого решения $x(t)$ и его производных $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра (1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ справедливы оценки (10), (16) – (18).

Для удобства дальнейшего исследования введем обозначения:

$$D_0(t) \equiv (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}, \quad D_1(t) \equiv D_0(t) + W_1(t), \quad D_2(t) \equiv D_0(t) + |M_1(t)| + W_1(t),$$

$$D_3(t) \equiv D_0(t) + |M_2(t)| + |M_3(t)| + W_1(t)W_2(t).$$

Тогда оценки (10), (16) – (18) примут вид:

$$x^{(k)}(t) = D_k(t)O(1) \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{22}$$

Аналогично следствиям 3.1 – 3.4 [3, с. 117] из (22) вытекают следующие 2 следствия.

Следствие 1 *Если выполняются все условия теоремы и*

a) $D_k(t) = O(1) \quad (0 \le k \le 3)$;

b) $D_k(t) \to 0, \quad t \to \infty \quad (0 \le k \le 3)$;

c) существуют const $\lambda_k > 0$ *такие, что* $D_k(t) = e^{-\lambda_k t}O(1) \quad (0 \le k \le 3)$;

d) существуют const $\omega_k > 0$, $q_k > 0$ *такие, что* $D_k(t) = (t + \omega_k)^{-q_k} \quad (t_0 = 0, 0 \le k \le 3)$;

e) $D_k(t) \in L^{P_k}(J, R)$ $(P_k > 0, 0 \le k \le 3)$,

то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верны асимптотические свойства:

a) $x^{(k)}(t) = O(1) \quad (0 \le k \le 3)$;

b) $x^{(k)}(t) \to 0, \quad t \to \infty \quad (0 \le k \le 3)$;

c) $x^{(k)}(t) = e^{-\lambda_k t}O(1) \quad (\lambda_k > 0, 0 \le k \le 3)$;

d) $x^{(k)}(t) = (t + \omega_k)^{-q_k} \quad (\omega_k > 0, q_k > 0, t_0 = 0, 0 \le k \le 3)$;

e) $x^{(k)}(t) \in L^{P_k}(J, R) \quad (P_k > 0, 0 \le k \le 3)$.

Следствие 2 *Если выполняются все условия следствия 1 при $k = 0, 1, 2, 3$, то для любого решения $x(t)$ и его производных $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ справедливы утверждения a), b), c), d), e) при $k = 0, 1, 2, 3$.*

Пример 1 *Для ИДУ четвертого порядка*

$$x^{(4)}(t) + [7 + t^2 + E(t)]x'''(t) + [16 + 3t^2 + 3E(t) - 29e^{-2t}\sin e^{-t}]x''(t) +$$
$$+[18 + 4t^2 + 4E(t) - 58e^{-2t}\sin e^{-t} + \tfrac{e^{-2t}}{t^5+2}]x'(t) + [9 + 2t^2 + 2E(t) - 29e^{-2t}\sin e^{-t} +$$
$$+\tfrac{e^{-2t}}{t^5+2} - \tfrac{e^{-3t}}{(t+1)^2}]x(t) + \int\limits_0^t \{[2Q_3(t,\tau) + (\tfrac{1}{t^2+1} - \tfrac{1}{(t+5)^2} - \tfrac{\sin t}{t^3+1})e^{-3t}]x(\tau) +$$
$$+[4Q_3(t,\tau) + (\tfrac{2}{t^2+1} - \tfrac{1}{(t+5)^2})e^{-3t}]x'(\tau) + [3Q_3(t,\tau) + \tfrac{e^{-3t}}{t^2+1}]x''(\tau) +$$
$$+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\}d\tau = -\tfrac{\exp(-3t+t^4\sin t)}{t+2} + \sin e^{-4t}\cos(\int\limits_0^t x(\tfrac{\tau}{5})d\tau) +$$
$$+\tfrac{e^{-3t}}{t^6+1}\left|x(\tfrac{t}{5})\right|\sin x(t) - \tfrac{e^{-3t}\cos t\cdot x'(\frac{t}{6})}{(t^2+9t+510)(1+\left|x'(\frac{t}{6})\right|)} + \tfrac{e^{-3t}}{(t+8)^5}x''(\tfrac{t}{7})e^{-|x(t)|} -$$
$$-\tfrac{e^{-4t}}{1+\left|x'(\frac{t}{6})\right|}x'''(\tfrac{t}{8}) + \int\limits_0^t e^{-3t}\{\tfrac{\cos x(\tau)}{(t+\tau+2)^3}\sin x(\tfrac{\tau}{9}) - \tfrac{e^{-t}}{t+\tau+5}x'(\tfrac{\tau}{10})\cdot e^{-\left|x'(\frac{\tau}{10})\right|} +$$

$$+\frac{x''(\frac{\tau}{11})}{(t^2+1)(\tau^2+3)[\left|x''(\frac{\tau}{11})\right|+1]} - \frac{\left|x'''(\frac{\tau}{12})\right|}{(t+2\tau+1)^4[+|x(\tau)|]}\}d\tau+$$
$$+\sin(e^{-3t}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t+\tau+9)^3[\left|x(\frac{\tau}{5})\right|+1]}, \quad t \geq 0,$$

где $E(t) \equiv \exp(e^t \cdot \sqrt[3]{\cos t})$, $Q_3(t,\tau) \equiv e^{-3t+3\tau}[\frac{1}{t-\tau+1} + \frac{t+\tau+115}{t+\tau+116}] \exp(t^4 \sin t + \tau^4 \sin \tau)$, выполняются все условия теоремы и утверждения c) следствия 2 при $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $W_1(t) \equiv e^{-t}$, $W_2(t) \equiv e^{-2t}$, $\varphi(t) \equiv e^t$, здесь $t_0 = 0$, $b_3(t) \equiv 1 + t^2 + E(t)$, $\Delta(t) \equiv e^t$, $b_2(t) \equiv -29 \sin e^{-t}$, $b_1(t) \equiv \frac{1}{t^5+2}$, $b_0(t) \equiv -\frac{1}{(t+1)^2}$, $P_0(t,\tau) \equiv \frac{\sin t}{t^3+1}$, $P_1(t,\tau) \equiv \frac{e^{-\tau}}{(t+5)^2}$, $P_2(t,\tau) \equiv \frac{e^{-\tau}}{t^2+1}$, $K(t,\tau) \equiv [\frac{1}{t-\tau+1} + \frac{t+\tau+115}{t+\tau+116}] \exp(t^4 \sin t + \tau^4 \sin \tau)$, $f(t) \equiv -\frac{\exp(-3t+t^4 \sin t)}{t+2}$, $n = 1$, $\psi_1(t) \equiv \exp(t^4 \sin t)$, $R_1(t,\tau) \equiv \frac{1}{t-\tau+1} + \frac{t+\tau+115}{t+\tau+116}$, $A_1(t) \equiv \frac{t+115}{t+116}$, $A_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+115)(t+116)}$, $R_1^*(t) \equiv 0$, $B_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, $E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+2}$, $c_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, $m = 1$, $\alpha_1(t) \equiv \frac{t}{5}$, $\beta_1(t) \equiv \frac{t}{6}$, $\gamma_1(t) \equiv \frac{t}{7}$, $\delta_1(t) \equiv \frac{t}{8}$, $\eta_1(t) \equiv \frac{t}{9}$, $\mu_1(t) \equiv \frac{t}{10}$, $v_1(t) \equiv \frac{t}{11}$, $\rho_1(t) \equiv \frac{t}{12}$, $F_{01}(t) \equiv e^{-t}$, $g_{01}(t) \equiv \frac{1}{t^6+1}$, $g_{11}(t) \equiv \frac{1}{t^2+9t+510}$, $g_{21}(t) \equiv \frac{1}{(t+8)^5}$, $g_{31}(t) \equiv e^{-t}$, $g_{41}(t) \equiv 1$, $H_{01}(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+9)^3}$, $h_{01}(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+2)^3}$, $h_{11}(t,\tau) \equiv \frac{e^{-t}}{t+\tau+5}$, $h_{21}(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t^2+1)(\tau^2+3)}$, $h_{31}(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+2\tau+1)^4}$, и значит, для любого его решения и их производных справедливы оценки: $x^{(k)}(t) = e^{-\frac{t}{2}}O(1)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. Отсюда заключаем, что все решения и их производные до третьего порядка включительно стремятся к нулю при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону.

Замечание 1 *В условиях теоремы и следствий 1, 2 коэффициенты $a_k(t)$ и ядра $Q_k(t,\tau)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ и свободный член $f(t)$ ИДУ (1) могут быть недифференцируемыми и немалыми на полуинтервале J, что подтверждается, например, выше приведенным иллюстративным примерам.*

Отметим, что выбирая вспомогательные параметры, λ, μ и функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, $\varphi(t)$, $\psi_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$ из теоремы и следствий 1, 2 можно получить коэффициентные признаки для соответствующих утверждений.

Список литературы

[1] *Искандаров С., Темиров М.А.* Достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с запаздываниями. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С. 49 – 56.

[2] *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка. // Там же. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 36 – 40.

[3] *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

[4] *Искандаров С., Темиров М.А.* Об ограниченности решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздывания-

ми. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 68 – 73.

[5] *Пахыров З.* Об ограниченности решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1971. – Вып. 8. – С. 239 – 255.

[6] *Искандаров С.* О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 31 – 35.

[7] *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс... докт.физ.- мат.наук: 01.01.02 – Бишкек, 2003. – 34 с.

S. Iskandarov, M.A. Temirov, Estimations and asymptotical properties of solutions of weakly nonlinear Volterra intergro-differential equation of the fourth order with delays. The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 39 – 47.

We establish sufficient conditions for estimations, boundedness, a power absolutely integrable on the half-line, tends to zero, including the exponential and power law, all solutions and their first, second, third derivatives of the fourth-order weakly nonlinear Volterra intergo-differential equation.

С. Искандаров, М.А. Темиров, Әлсіз бейсызықты вольтеррлік төртінші ретті кешігулері бар интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің бағалаулары және асимптотикалық қасиеттері ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2012, №1(72), 39 – 47.

Әлсіз бейсызықты Вольтерр типті төртінші ретті интегралды дифференциалдық теңдеудің барлық шешімдерінің және олардың бірінші, екінші, үшінші ретті туындыларының бағалауларын, шенелуін, жарты осьте дәрежелі абсолютті интегралдануын, экспоненциалды және дәрежелік заңдылықтар бойынша нөлге ұмтылуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар алынған.