Обобщенная матричная резольвента для алгебраической системы при правых частях из подпространств[1]

О.А. Қайырбек, Ж.К. Кудашов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: olzhas.mm@gmail.com

Аннотация

В этой работе рассмотрена задачи математической физики. Задачи математической физики формулируются в виде основного дифференциального уравнения и дополнительных условий. Дифференциальная задача сведется к системе линейных алгебраических уравнений путем замены дифференциального оператора разностной схемой. Были вычислены формулы резольвент.

1. Постановка задачи.

В области $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рассматривается уравнения эллиптического типа

$$\Delta u(x,y) + q(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

с краевым условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

где $q(x,y)$ непрерывная функция, $\overrightarrow{n}$ внешняя нормаль. Для такой задачи явное аналитическое решение найти невозможно. Удобно численном методом с заданной точностью найти приближенные решение в определенных точках. Введем разносную сетку

$$\omega_{hh} = \{x_i = ih, y_j = jh, i,j = \overline{0,N}; h = \frac{1}{N}\}$$

Теперь задачу $(1),(2)$ заменяя на разностное уравнение получаем следующую систему алгераических уравнений

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + q_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}; i,j = \overline{1,N-1} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{u_{0,j} - u_{0,j-1}}{h} = 0; \frac{u_{n,j} - u_{n,j-1}}{h} = 0; j = \overline{1,N} \\ \frac{u_{i,0} - u_{i-1,0}}{h} = 0; \frac{u_{i,n} - u_{i-1,n}}{h} = 0; i = \overline{1,N}\end{gathered} \tag{4}$$

Это задача расматрима в квадратичном области, поэтому у нас всего $(N+1)^2$ неизвестных. Из (3) системы получаем $(N-1)^2$ уравнений,потому что число внешных точек

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК,грант 0732/ГФ, 2012г.-2014г.

равно $(N-1)^2$. Из (4) системы получаем $4N$ уравнения . Таким оброзом, мы получили матричную систему из $(N+1)^2$ уравнений и $(N+1)^2$ неизвестных.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Если $y_k = u_{ij}$ то k номер соответственно i,j

Если $i+j \leq n$ то $k = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$

Если $i+j > n$ то $k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} + \dfrac{(3n-i-j+2)(i+j-n-1)}{2} + n - j$

Каждому внутренному точку соответствует один уравнения. Номируем уравнению по следующим закономерносьтям.

1) Начинаем номирацию от u_{11}

2) Каждую уравнению номируем по диагонали снизу на вверх

3) $i, j = \overline{1, N-1}$

Лемма 2 . q номер уравнения.

Если $i+j \leq n$ то $q = \dfrac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + i$

Если $i+j > n$ то $q = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(3n-i-j+2)(i+j-n-1)}{2} + n - j$

Лемма 3 . Пусть c и d принимает значения от i, j, то q номер уравнения а k место элемента. Элементы матрицы A соответственно номеру уравнения будет таким.

$$A[q,k] = -\frac{4}{h^2} \text{ если } c = i, d = j$$
$$A[q,k] = \frac{1}{h^2} \text{ если } c = i+1, d = j$$
$$A[q,k] = \frac{1}{h^2} \text{ если } c = i-1, d = j$$
$$A[q,k] = \frac{1}{h^2} \text{ если } c = i, d = j+1$$
$$A[q,k] = \frac{1}{h^2} \text{ если } c = i, d = j-1$$
$$A[q,k] = 0 \text{ в остальных случаях}$$

Используя эти леммы мы можем вести новые номираций
$colon(u_{00}, u_{01}, u_{10}, ..., u_{nn}) = colon(y_0, y_1, y_2, ..., y_{(n+1)^2-1}) = \overrightarrow{Y}$,
$\overrightarrow{b} = h^2 colon(f_{11}, f_{12}, f_{21}, ..., f_{(n-1)(n-1)})$.

Тогда алгебраическую систему можем записать в таком виде

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{0} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1(n+1)^2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2(n+1)^2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{(n-1)^2 1} & a_{(n-1)^2 2} & a_{(n-1)^2 3} & ... & a_{(n-1)^2 (n+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1(n+1)^2} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2(n+1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{4n1} & c_{4n2} & c_{4n3} & \dots & c_{4n(n+1)^2} \end{bmatrix},$$

Матрица A порождается дифференциальным уравнением, а матрица C вытекает из краевых условий.

3. Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств.

Теорема 1. *Решение задачи* (5) *задается формулой*

$$\overrightarrow{Y}_0 = L_0^{-1}\overrightarrow{b} \tag{6}$$

где через L_0^{-1} *обозначим первых* $(n-1)^2$ *столбцов матрицы* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}$, *при* $det \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \neq 0$

Доказательство:(6) формула получена матричным методом и легко проверяется подставлением решения в систему.

Теперь рассмотрим тот случай, когда второе уравнение также является неоднородным.

Теорема 2. *Для любых векторов* $\overrightarrow{p}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *система*

$$\begin{cases} A\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{b} \\ C\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{p} \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$\overrightarrow{Y} = L_0^{-1}\overrightarrow{b}_0 + L_0^{-1}\overrightarrow{p}_0$$

где $\overrightarrow{b}_0 = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{p}_0 = \begin{pmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix}$

Доказательство теоремы 2 осуществляется непосредственной проверкой.
Пусьт вектор $\overrightarrow{p}$ непрерывным образом зависит от $\overrightarrow{b}$, то есть $\overrightarrow{p} = F(\overrightarrow{b})$.

Таким оброзом,мы можем сформулировать утверждение

Теорема 3. *Пусть* F *любая непрерывная функция,отображающая векторное пространство* $R^{(n-1)^2}$ *в векторное пространство* R^{4n}. *Система*

$$\begin{cases} A\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{b}, \\ C\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{p}, \end{cases}$$

имеет единственное решение при всех правых частях $\overrightarrow{b}$. *Причем решение системы непрерывно зависит от* $\overrightarrow{b}$ *и для него верно представление*

$$\overrightarrow{Y} = L_0^{-1}\begin{pmatrix} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} + L_0^{-1}\begin{pmatrix} \overrightarrow{0} \\ F(\overrightarrow{b}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Таким образом,в теореме 3 указаны дополнительные условия $C\overrightarrow{Y} - F(A\overrightarrow{Y}) = 0$ которые сохраняют единственность решения.

Отображение F должно задаваться произвольной матрицей D.Матрица D имеет размерность $4n \times (n-1)^2$.

Лемма 4 .*Определитель матрицы* $\begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix}$, *не зависит от матрицы* D, *т.е*

$$det \begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

Теорема 4.*Решение задачи*

$$\begin{bmatrix} A \\ C - DA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{0} \end{bmatrix} \tag{8}$$

задается формулой

$$\overrightarrow{Y}_D = \overrightarrow{Y_0} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \overrightarrow{b}$$

Доказательство: Если систему напишем в удобном виде для доказательства

$$\begin{cases} A\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{b} \\ C\overrightarrow{Y} = D\overrightarrow{b} \end{cases}$$

преобразуем,то получаем решение системы (8)

$$\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{b} \\ D\overrightarrow{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{0} \\ D\overrightarrow{b} \end{pmatrix} = \overrightarrow{Y_0} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \overrightarrow{b}$$

Теорема доказана.

4. Основной результат .

Теперь исследуем разрешимость системы

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{b} \\ \\ (C - DA)\overrightarrow{Y} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

где $I_{(n-1)^2 \times (n+1)^2} = (E|0)$; $E_{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ единичный матрица. Решения $\overrightarrow{Y}_D^{\lambda}$ системы (9) зависит от матрицы D. Поэтому удобно ввести матрицу $(L_D - \lambda I)^{-1}$ размерности $(n+1)^2 \times (n-1)^2$ и решение системы (9) записывать в виде

$$\overrightarrow{Y}_D^{\lambda} = (L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{b}$$

Матрицу $(L_D-\lambda I)^{-1}$ будем называть обобщенной матричной резольвентой. Если $D=0$,то обобщенная матричная резольвента $(L_0-\lambda I)^{-1}$ соответствует задаче

$$\begin{cases} (A-\lambda I)\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}=\overrightarrow{b} \\ C\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}=0 \end{cases} \tag{10}$$

Лемма 5. $\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}$ является решением системы

$$\begin{cases} (A-\lambda I)\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}=\overrightarrow{b} \\ C\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}=0 \end{cases}$$

Доказательство: Если на соотношение

$$\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}=(L_0-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{b}$$

подействовать оператором $(L_0-\lambda I)$,то вектор $\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}$ удовлетворяет (10).
Лемма 6.Вектор $\overrightarrow{y}=\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}L_0(L_0-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{b}$ является решением системы

$$\begin{cases} A\overrightarrow{y}=0 \\ C\overrightarrow{y}=DL_0(L_0-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{b} \end{cases}$$

Доказательство: Следует из соотношения (8).
Лемма 7. Решение системы

$$\begin{cases} (A-\lambda I)\overrightarrow{u}=\overrightarrow{y} \\ (C-DA)\overrightarrow{u}=0, \end{cases}$$

записывается следующим образом $\overrightarrow{u}=(L_D-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{y}$

Доказательство: Легко проверяется подставлением вектора $\overrightarrow{u}$ в данную систему.
Теорема 5.*Обобщенная матричная резольвента имеет представление*

$$(L_D-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{b}=(L_0-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{b}+L_D(L_D-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{y}$$

т.е. решение системы (9).

Доказательство: Перепишем представление в удобном виде

$$\overrightarrow{Y}_D^{\lambda}=\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}+L_D(L_D-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{y} \tag{11}$$

Если на соотношение (11) подействовать слева матрицей A, то получим

$$A\overrightarrow{Y}_D^{\lambda}=A\overrightarrow{Y}_0^{\lambda}+AL_D(L_D-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{y}$$

если учесть,что

$$L_D(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y} = (L_D - \lambda I + \lambda I)(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y} = I\overrightarrow{y} + \lambda I(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y} \quad (12)$$

тогда

$$A\overrightarrow{Y}_D^{\lambda} = \overrightarrow{b} + \lambda(\overrightarrow{Y}_0^{\lambda} + L_D(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{Y}_D^{\lambda}$$

Теперь подействуем слева на соотношение (11)матрицей $(C - DA)$, тогда

$$(C - DA)\overrightarrow{Y}_D^{\lambda} = (C - DA)\overrightarrow{Y}_0^{\lambda} + (C - DA)L_D(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y}$$

учитывая предыдущие леммы и соотношение (12) получим

$$(C - DA)\overrightarrow{Y}_D^{\lambda} = (C - DA)\overrightarrow{Y}_0^{\lambda} + (C - DA)L_D(L_D - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{y} =$$

$$= -DA(L_0 - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{b} + DL_0(L_0 - \lambda I)^{-1}\overrightarrow{b} = 0$$

Теорема полностью доказана.

Авторы выражает глубоку благодарность своему научному руководителю профессору Б.Е. Кангужину за постоянное внимание и поддержку в работе.

Список литературы

[1] *П. Ланкастер* Теория матриц. -М.: Наука, 1982.- 269 с.

[2] *И.С. Березин, Н.П. Жидков* Методы вычислений. - М.: Москва, 1960. -620с.

[3] *Ф.Р. Гантмахер* Теория матриц, 4-е изд-м.: Наука, Гл ред. Физ.-мат. лит., 1988. -522 с.

Zh. Kudashov, O. Kaiyrbek, Generalized matrix resolvent for algebraic systems at right site of subspace. The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2012, №1(72), 48 – 53.

In this work was presented problems of mathematical physic. This problems of mathematical physic are introduced by differential equations with additional conditions. The differential problem came to system of linear algebraic equations by changing differential operator to finite-difference scheme. Have been found resolvent's formulas.

Ж.К. Кудашов, О.А. Қайырбек, Оң жағы ішкеңітіктен алынған алгебралық жүйелер үшін жалпыланған матрицалық резольвента. ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2012, №1(72), 48 – 53.

Бұл мақалада математикалық физиканың есептері қарастырылды. Математикалық физиканың есептері негізгі дифференциалдық теңдеуден және қосымша шарттардан тұрады. Дифференциалдық оператор айырымдылық схемамен алмастырылып, алгебралық теңдеулар жүйесіне келтірілді. Резольвентасы айқын түрде есептелінді..