УДК 517.925/.926

Алдажарова М.М.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы
e-mail: a_maira77@mail.ru

Об оценке и устойчивости решений систем дифференциальных уравнений

В работе определен класс линейных систем дифференциальных уравнений с конечными показателями первого и второго порядков, который является шире, чем класс вполне правильных линейных систем дифференциальных уравнений. Методом первого приближения установлено достаточное условие асимптотической устойчивости тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений в случае не положительных характеристических показателей Ляпунова.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, характеристические показатели Ляпунова, асимптоическая устойчивость.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \;\; (x \in R^n, 1 \le t_0 \le t < +\infty) \tag{1}$$

где

$$A(t) - n \times n \quad \text{матрица} \quad A(t) \in C[t_{0,} + \infty), \quad \sup_{t \ge 1} \|A(t)\| < +\infty.$$

Пусть α – характеристический показатель ненулевого решения $x(t)$ линейной системы (см. [1]).

Определение 1 . *Число (или символ $+\infty$ или $-\infty$)*

$$\beta = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln[\|x(t)\| e^{-\alpha t}] \tag{2}$$

называется показателем второго порядка решения $x(t)$.

Примечание 1. Для определенности характеристические показатели линейной системы называются показателями первого порядка.

Множество всех $n \times n$ непрерывных матриц $B(t)$, $t \ge 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\sqrt{t} B(t)\| \le c, \; (c > 0)$$

обозначим через PA.

Теорема 1 . *Если для линейной системы*

$$\frac{dx}{dt} = [A + B(t)]x \tag{3}$$

выполняются условия:

1) A – постоянная матрица с простыми характеристическими корнями,

2) $B(t) \in PA$

тогда линейная система (3) является правильной, имеет нормальный базис с конечными показателями первого и второго порядков.

Доказательство. Пусть$\beta_1, \ldots, \beta_n$–характеристические корни матрицы A.
В силу условия 2) существует предел

$$\|B(t)\| \to 0,\, t \to +\infty$$

Поэтому линейная система (3) имеет базис, который

$$x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$$

в пространстве решений удовлетворяет цепочку неравенств:

$$c_2 e^{(Re\beta_k)t - d_2 \int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\| ds} \le \|x^{(k)}(t)\| \le c_1 e^{(Re\beta_k)t + d_1 \int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\| ds} \tag{4}$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 – положительные постоянные.

Пусть

$$\lambda_k = Re\beta_k, k = 1, \ldots, n.$$

Из (4) применяя операцию

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} ln(\cdot)$$

и используя условие 2) получаем цепочку неравенств

$$\lambda_k \le \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x^{(k)}(t)\| \le \lambda_k, k = 1, \ldots, n.$$

следовательно, линейная система (3) имеет конечные показатели первого порядка, причем они являются точными показателями, т.е.,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x^{(k)}(t)\| = \lambda_k, k = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что выполняется равенство:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} ReSp[A + B(s)]ds = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

т.е., линейная система (3) правильная и $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$ – образует нормальный базис.

Для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ показатели второго порядка линейной системы (3) соответствующие нормальному базису $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$ вычисляются формулой

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left[\|x^{(k)}(t)\| e^{-\lambda_k t} \right]$$

Следовательно, используя формулу вычисления для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ из (4) находим

$$-2cd_2 \le \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left[\|x^{(k)}(t)\| e^{-\lambda_k t} \right] \le 2cd_2$$

отсюда вытекает, что линейная система (3) имеет конечные показатели второго порядка. Теорема 1 доказана.

Примечание 2. В работе [2] Б.П. Демидовичем введен класс вполне правильных линейных систем дифференциальных уравнений. Уравнение первого приближения (7) показывает, что класс PA является шире, чем класс вполне правильных линейных систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим возмущенную систему т.е., нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), (1 \le t_0 \le t < +\infty) \tag{5}$$

где

$$f(t,x) \in C^{(0,1)}_{t,x}(D),\ D = \{t_0 \le t < +\infty, x \in R^n\},$$

$$f(t,0) \equiv 0,\ \lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{\|x\|} = 0.$$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – характеристические показатели Ляпунова линейной системы, а $\beta_1, ..., \beta_n$ – отвечающие им показатели второго порядка, которые определяются по нормальному базису формулой:

$$\beta_k = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln[\|x^{(k)}(t)\| e^{-\lambda_k t}],\ \ (k = \overline{1,n}).$$

Определение 2 . *Линейная система называется правильной относительно показателей второго порядка, если она правильная и выполняется равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau - t\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right] = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

Теорема 2 . *Пусть нелинейная система дифференциальных уравнений (5) удовлетворяют условиям:*

1) линейная однородная система первого приближения нелинейной системы дифференциальных уравнений (5) правильная относительно показателей второго порядка,

2) показатели линейной однородной системы неположительны т.е.,

$$\lambda_k \le 0,\ k = \overline{1,n}.$$

3) показатели второго порядка $\beta_1, ..., \beta_n$ линейной однородной системы отвечающие характеристическим показателям первого порядка линейной однородной системы отрицательные, причем удовлетворяют неравенствам

$$\beta_k < -\frac{1}{m-1}, (k \in \{1, ..., n\}, m \neq 1),$$

4) выполняется неравенство

$$\|f(t,x)\| \leq c\|x\|^m, (c > 0, m > 1),$$

Тогда нулевое решение $x = 0$, нелинейной системы (5) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Доказательство. Пусть

$$\beta \equiv \max_{1 \leq k \leq n} \beta_k$$

Возьмем $\overline{\beta}$ следующим образом

$$\beta < \overline{\beta} \leq -\frac{1}{m-1},$$

Положим

$$\gamma = \frac{1}{2}(\overline{\beta} - \beta)$$

Пологая

$$x = e^{-\gamma\sqrt{t}}y$$

Получаем из (5) систему

$$\frac{dy}{dt} = \left(A(t) + \frac{\gamma}{2\sqrt{t}}E\right)y + e^{\gamma\sqrt{t}}f(t, e^{-\gamma\sqrt{t}}y) \tag{6}$$

где линейная часть имеет показатели первого порядка

$$\lambda_1, ..., \lambda_n$$

и показатели второго порядка

$$\beta_1 + \gamma, \ldots, \beta_n + \gamma.$$

Причем в силу условия теоремы,легко установить, что для матрицы Коши выполняется неравенство

$$\|K(t,t_0)\| \leq c_1 e^{(\overline{\beta}+\gamma)\sqrt{t}} \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < +\infty, \ c_1 > 1$$

Из (6) переходя к интегральной системе

$$y(t) = K(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)e^{\gamma\sqrt{s}}f(s, e^{-\gamma\sqrt{s}}y(s))ds$$

и оценивая по норме, отсюда имеем

$$\|y(t)\|e^{-(\overline{\beta}+\gamma)\sqrt{t}} \leq c_1\|y(t_0)\| + c_3\int\limits_{t_0}^{t} e^{(-\overline{\beta}+\varepsilon-m\gamma)\sqrt{s}}e^{\gamma\sqrt{s}}\|y(s)\|^m ds$$

Применяя неравенство Бихари и возвращаясь к исходным переменным, получаем неравенство

$$\|x(t)\| \leq c(t_0)\|x(t_0)\|e^{\overline{\beta}\sqrt{t}}, \ \ (c(t_0) > 0)$$

Отсюда вытекает, что нулевое решение нелинейной системы (6) асимптотически устойчиво по Ляпунову при t$\to +\infty$.

Теорема2 доказана.

Пример 1 . *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{1}{4(e^t+5)\sqrt{t}}x^3, 1 \leq t_0 \leq t < +\infty \tag{7}$$

В силу теоремы 2 легко установить, что нулевое решение дифференциального уравнения асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$. Заметим, что этот результат не следует из [2]. В работе [3] рассматривается неограниченные системы дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. - 576 с.

[2] *Демидович Б.П.* Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем // Математический сборник. - 1965. - Т. 66, №3. - С. 344-353.

[3] *Алдибеков Т.М.* Обобщенные показатели Ляпунова. – Алматы, 2011. - 254 с.

Aldazharova M.M. Bounds and stability of solutions of the system of Differential equations.

In work is defined a class of linear systems of differential equations with final exponents of the first and second orders which are wider, than a class of quite regular linear systems of differential equations. By the method of the first approach was established a sufficient condition of asymptotic stability of the trivial solution of nonlinear system of differential equations in case of Lyapunov's not positive characteristic exponents.

Алдажарова М.М. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің бағасы мен орнықтылығы.

Жұмыста сызықты дифференциалдық теңдеулердің толық дұрыс жүйелер класына қарағанда кеңірек, ақырлы бірінші және екінші ретті көрсеткіштері бар сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің класы анықталған. Бірінші жуықтау тәсілі көмегімен Ляпунов сипаттауыш көрсеткіштерінің оң емес болған жағдайында сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі үшін асимптотикалық орнықтылықтың жеткілікті шарты орнатылған.