

УДК 519.62/.64

ДАИРБАЕВА Г.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
e-mail: Lazzat.Dairbaeva@kaznu.kz

## Метод конечных элементов для решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца<sup>1</sup>

В данной работе предложен метод продолжения решения уравнения Гельмгольца в зону недоступности методом, основанном на решении специальным образом сформулированной обратной задачи. В результате решения задачи удается восстановить значение решения уравнения Гельмгольца в зоне недоступности. Решение задачи осуществляется путем замены этой задачи на некоторую специальную обратную задачу, которая решается на основе сочетания методов конечных элементов и оптимизации.

*Ключевые слова:* уравнение Гельмгольца, прямая задача, обратная задача, метод конечных элементов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим волновое уравнение в области  $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ , где  $\Omega \subset R^2 = \{(x, y)\}$ :

$$\varepsilon v_{tt} = \Delta v - j^c,$$

где  $\varepsilon > 0$ . Пусть функции  $v, j^c$  допускают разделение переменных:

$$v(x, y, t) = u(x, y)T(t), \quad j^c(x, y, t) = f_1(x, y)T(t),$$

и положим  $T(t) = e^{i\omega t}$ .

Сделав преобразование  $v = ue^{i\omega t}$ , получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1.$$

где  $\omega_1 = \varepsilon\omega^2$ .

В центре Области  $\bar{\Omega} = [-b, b] \times [-b, b]$  расположен источник  $f_1(x, y) = \theta(a - |x|)\theta(a - |y|)$  при  $|x| \leq a, |y| \leq a$ .

В области  $\Omega = (-b, b) \times (-b, b)$  рассмотрим начально-краевую задачу

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(-b, y) = f(y), \quad y \in (-b, b), \tag{2}$$

$$u_x(-b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \tag{3}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0730/ГФ, 2012г.-2014г.

$$u(x, -b) = u(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b). \quad (4)$$

Задача (1)-(4) является некорректной, например, при  $\omega_1 = 0$  хорошо известен пример Адамара.

Введем обозначения для подобластей области  $\bar{\Omega}$

$$G_1 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : -b \leq x \leq -d, \quad -b \leq y \leq b\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : -d \leq x \leq d, \quad -b \leq y \leq b\},$$

$$G_3^+ = \{(x, y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad a \leq y \leq c\},$$

$$G_3^- = \{(x, y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad -c \leq y \leq -a\},$$

$$G_3 = G_3^+ \cup G_3^-,$$

$$G_4 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : d \leq x \leq b, \quad -b \leq y \leq b\}.$$

Здесь  $G_3^+$ ,  $G_3^-$  являются антеннами.

Диэлектрическая проницаемость в антеннах принимает следующие значения

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } (x, y) \in G_3, \\ \varepsilon_2, & \text{если } (x, y) \in G_2 \setminus G_3, \\ \varepsilon_3, & \text{если } (x, y) \in G_1 \cup G_4. \end{cases}$$

На решение задачи (1)-(4) наложим условия склейки

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 u_x(a-0, y) &= \varepsilon_2 u_x(a+0, y), \quad y \in [a, c] \cup [-c, a], \\ \varepsilon_2 u_x(-a-0, y) &= \varepsilon_1 u_x(-a+0, y), \quad y \in [a, c] \cup [-c, a], \\ \varepsilon_1 u_x(x, c-0) &= \varepsilon_2 u_x(x, c+0), \quad x \in [-a, a], \\ \varepsilon_2 u_x(x, -c-0) &= \varepsilon_1 u_x(x, -c+0), \quad x \in [-a, a], \\ \varepsilon_3 u_x(-d-0, y) &= \varepsilon_2 u_x(-d+0, y), \quad y \in [-b, b], \\ \varepsilon_2 u_x(d-0, y) &= \varepsilon_3 u_x(d+0, y), \quad y \in [-b, b], \end{aligned} \quad (5)$$

**Сведение исходной задачи к обратной задаче.** Покажем, что решение исследуемой задачи (1)-(4) можно свести к решению обратной задачи по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

В качестве прямой задачи будем рассматривать следующую

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

$$u_x(-b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (7)$$

$$u(b, y) = q(y), \quad y \in (-b, b), \quad (8)$$

$$u(x, -b) = u(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b). \quad (9)$$

В задаче (6)-(9) по заданной функции  $q$  надо определить функцию  $u$  в  $\Omega$ .

Дадим определение обобщенного решения прямой задачи (6)-(9).

**Определение 1.** Функцию  $u \in W_2^1(\Omega)$  будем называть обобщенным решением прямой задачи (6)-(9), если для любых  $v \in W_2^1(\Omega)$ , таких что

$$v(b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (10)$$

$$v(x, -b) = v(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b) \quad (11)$$

имеет место равенство

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \omega_1 \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f_1 v \, d\Omega. \quad (12)$$

Здесь

$$J_1 = K_1 \int_{-a}^a u_y(x, a-0)v(x, a)dx - K_1 \int_{-a}^a u_y(x, -a+0)v(x, -a)dx, \quad (13)$$

$$J_2 = K_2 \int_a^c u_x(a-0, y)v(a, y)dy - K_2 \int_a^c u_x(-a+0, y)v(-a, y)dy + \\ + K_2 \int_{-a}^a u_y(x, c-0)v(x, c)dx, \quad (14)$$

$$J_3 = K_2 \int_{-c}^{-a} u_x(a-0, y)v(a, y)dy - K_2 \int_{-c}^{-a} u_x(-a+0, y)v(-a, y)dy - \\ - K_2 \int_{-a}^a u_y(x, -c+0)v(x, -c)dx, \quad (15)$$

$$J_4 = K_3 \int_{-b}^b u_x(-d-0, y)v(-d, y)dx - K_3 \int_{-b}^b u_x(d+0, y)v(d, y)dy, \quad (16)$$

где

$$K_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad K_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad K_3 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2}.$$

**Обратная задача к задаче (6)-(9).** Обратная задача к задаче (6)-(9) заключается в определении функции  $q$  по дополнительной информации

$$u(-b, y) = f(y), \quad y \in (-b, b). \quad (17)$$

Введем оператор

$$A: q(y) \mapsto u(-b, y), \quad (18)$$

где  $u(x, y)$  - решение прямой задачи (6)-(9), тогда обратную задачу (6)-(10) можно записать в операторной форме

$$Aq = f. \quad (19)$$

Для решения обратной задачи (19) рассмотрим сопряженную задачу к прямой задаче (6)-(9)

$$\Delta\psi + \omega_1\psi = f_1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (20)$$

$$\psi_x(-b, y) = \mu(y), \quad y \in (-b, b), \quad (21)$$

$$\psi(b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (22)$$

$$\psi(x, -b) = \psi(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b). \quad (23)$$

**Определение 2.** Функцию  $\psi \in W_2^1(\Omega)$  будем называть обобщенным решением сопряженной задачи (20)-(23), если для любых  $v \in W_2^1(\Omega)$ , таких что

$$v(b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (24)$$

$$v(x, -b) = v(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b) \quad (25)$$

имеет место равенство

$$-\int_{\Omega} \nabla\psi \nabla v \, d\Omega - \int_{-b}^b \mu(y)v(-b, y)dy + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \omega_1 \int_{\Omega} \psi v \, d\Omega = \int_{\Omega} f_1 v \, d\Omega. \quad (26)$$

Здесь  $I_1, I_2, I_3, I_4$  имеют такой же вид, как  $J_1, J_2, J_3, J_4$  в (13)-(15) соответственно, только вместо функции  $u$  надо взять  $\psi$ .

Для численного решения обратной задачи (19) рассмотрим метод Ландвебера.

**Метод Ландвебера.** Для обратной задачи (19)

$$Aq = f,$$

где оператор  $A$  определен в (18), рассмотрим целевой функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(-b, b)}^2. \quad (27)$$

Применим метод Ландвебера для решения уравнения (19)

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n, \quad (28)$$

$$q_0 \in L_2(-b, b), \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}).$$

Здесь

$$J'q = 2A^*(Aq - f) \quad (29)$$

- градиент функционала  $J(q)$ , который определяется по формуле

$$J'q = \psi_x(b, y), \quad (30)$$

где  $\psi(x, y)$  – решение сопряженной задачи (20)-(23) с граничным условием

$$\mu(y) = 2[Aq - f](y) = 2[u(-b, y) - f(y)].$$

Из алгоритма метода Ландвебера видно, что для вычисления приближенного решения  $q_n$  для каждого  $n$  приходится решать прямую задачу (6)-(9) и сопряженную (20)-(23). Для решения последних задач применим метод конечных элементов. Покажем применение метода конечных элементов на примере прямой задачи.

**Метод конечных элементов (МКЭ) для прямой задачи (6)-(9).** Рассмотрим МКЭ в случае линейного восполнения на треугольниках.

Приведем пример триангуляции нашей области  $\Omega$ . Разобьем область  $\Omega$  на 36 прямоугольников  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{36} \Omega_k$ , каждый прямоугольник разобьем на 8 одинаковых прямоугольных треугольников. Пусть  $\tau_i$  – произвольный такой треугольник, тогда  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{288} \tau_i$ . Полученная триангуляция области  $\Omega$  показана на рис.1.

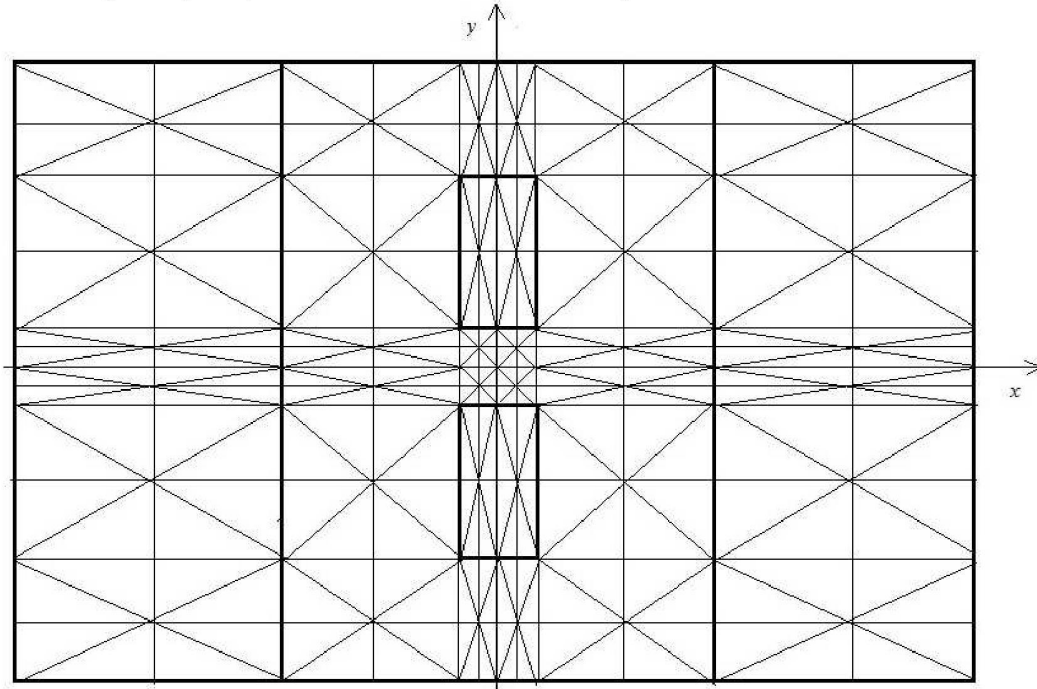


Рисунок 1. Триангуляция области  $\Omega$

Рассмотрим произвольный треугольник  $\tau$  с вершинами  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$\tau = \{(x, y) = P_0\lambda_0 + P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 : \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\},$$

$$\lambda_i = \lambda_i(x, y), \quad i = 0, 1, 2.$$

Если выразим  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , то уравнение треугольника можно записать иначе

$$\tau = \{(x, y) = P_0 + \lambda_1(P_1 - P_0) + \lambda_2(P_2 - P_0) : \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}, \quad (31)$$

$$\lambda_i = \lambda_i(x, y), \quad i = 1, 2.$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  или  $\lambda_1, \lambda_2$  называются барицентрическими координатами.

Из (31) находим

$$\lambda_1(x, y) = \frac{(x - x_0)(y_2 - y_0) - (y - y_0)(x_2 - x_0)}{\Delta},$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{(y - y_0)(x_1 - x_0) - (x - x_0)(y_1 - y_0)}{\Delta}$$

где  $\Delta = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)$ .

На треугольнике  $\tau$  (31) рассмотрим линейную функцию

$$v(x, y) = v_0 + \lambda_1(x, y)(v_1 - v_0) + \lambda_2(x, y)(v_2 - v_0), \text{ для любых } (x, y) \in \tau, \quad (32)$$

которая однозначно определяется своими значениями  $v_0 = v(P_0)$ ,  $v_1 = v(P_1)$ ,  $v_2 = v(P_2)$  и удовлетворяет условию:  $v(x, y)|_{\substack{x=\pm b \\ y=\pm b}} = 0$ .

Ячейками нашей триангулярной координатной сетки являются прямоугольные треугольники. Рассмотрим произвольный прямоугольный треугольник (рис. 2)

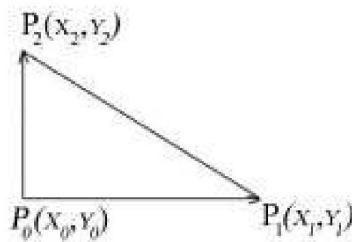


Рисунок 2. Треугольник  $\tau$ .

Из рисунка 2 видно, что  $x_0 = x_2$ ,  $y_0 = y_1$ , тогда  $\Delta = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)$ ,

$$\lambda_1(x, y) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{y - y_0}{y_2 - y_0}$$

А функция  $v(x, y)$  в этом случае запишется в виде следующего линейного восполнения

$$v(x, y) = v_0 + \frac{(v_1 - v_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{(v_2 - v_0)(y - y_0)}{y_2 - y_0} \text{ для любых } (x, y) \in \tau. \quad (33)$$

Рассмотрим  $\{P_j\}_{j=1}^N$  - множество вершин треугольников  $\tau_i$ , лежащих внутри области  $\Omega$ . Зададим на каждом  $\tau_i$  линейные функции  $v$  по формуле (33), равные нулю на внешней границе  $\Omega : x = \pm b, y = \pm b$ , однозначно определимые вектором своих значений в точках  $\{P_j\}_{j=1}^N$ .

Множество таких функций  $v$  обозначим  $V_N \subset \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Тогда имеет место следующее взаимно однозначное соответствие

$$v \in V_N \subset W_2^1(\Omega) \xleftrightarrow{\text{B.O.C.}} (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{n,m}) \in R^{n \times m} = R^N,$$

где  $N = n \times m$  – размерность пространства  $V_N$ , здесь  $v_{ij} = v(P_j)$ . В нашем случае  $N = 121$  или  $N = 11 \times 11 = n \times m$ ,  $n = 11, m = 11$ .

Так как  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{36} \Omega_k$ , то из равенства (12) имеем

$$-\sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} \nabla u \nabla v d\Omega + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \omega_1 \sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} uv d\Omega = \sum_{k=1}^{36} \int_{\Omega_k} f_1 v d\Omega, \quad (34)$$

для любого  $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Далее для вычисления интегралов в равенстве (34) по  $\Omega_k$  надо вычислить интегралы во всех ячейках триангулярной сетки, которые вошли в  $\Omega_k$ .

**Численное решение обратной задачи (19).** Численные расчеты проведены для данных:  $a = 0,02$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0,4$ ,  $d = 1,5$ .

Приведем результаты при следующих случаях:

1.  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega = 1$

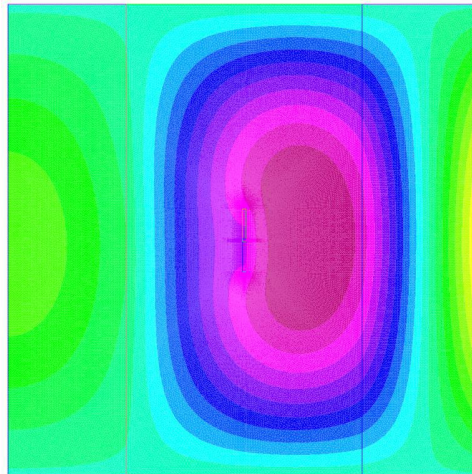


Рисунок 3. Точное решение прямой задачи

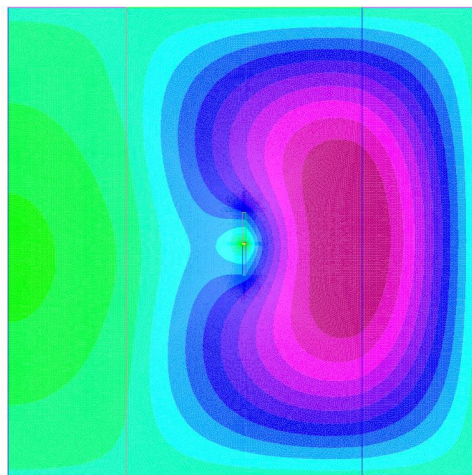


Рисунок 4. Начальное приближение решения прямой задачи при  $q = q_0$

неузкая=0.0114155

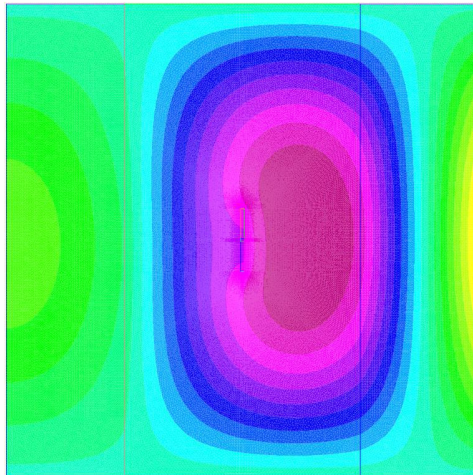


Рисунок 5. Приближенное решение прямой задачи

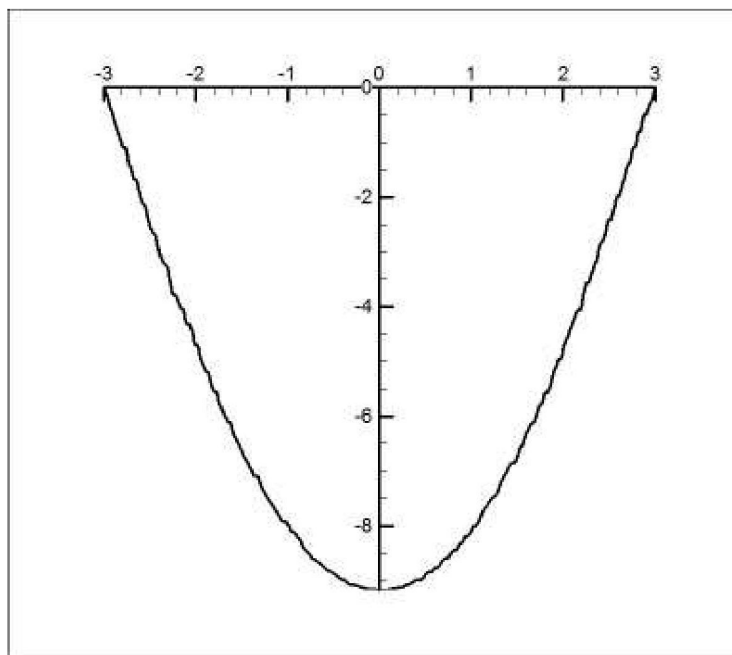


Рисунок 6. Приближенное решение обратной задачи



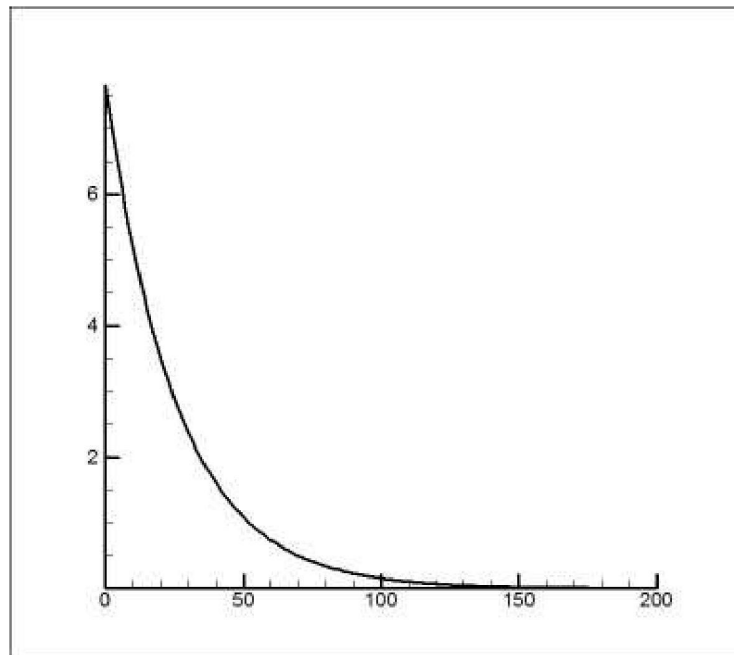


Рисунок 7. Невязка обратной задачи

2.  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega = 2$

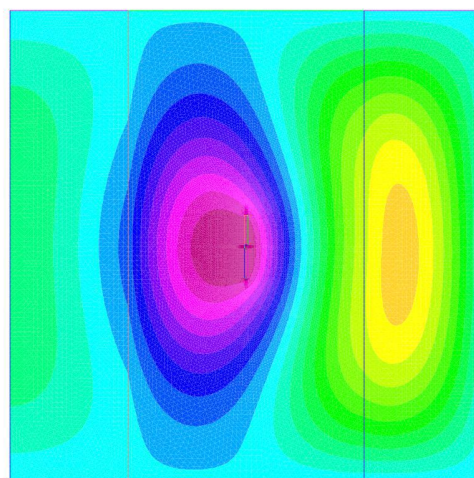


Рисунок 8. Точное решение прямой задачи

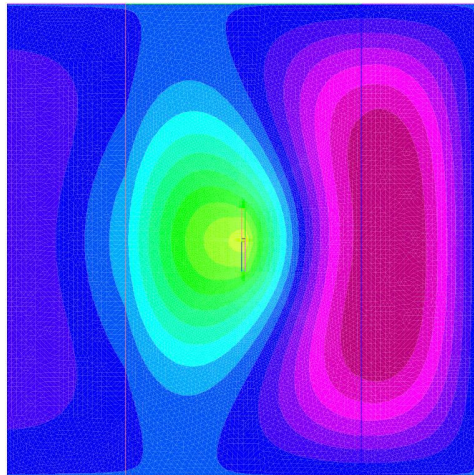


Рисунок 9. Начальное приближение решения прямой задачи при  $q = q_0$

неуязка=0.00412993

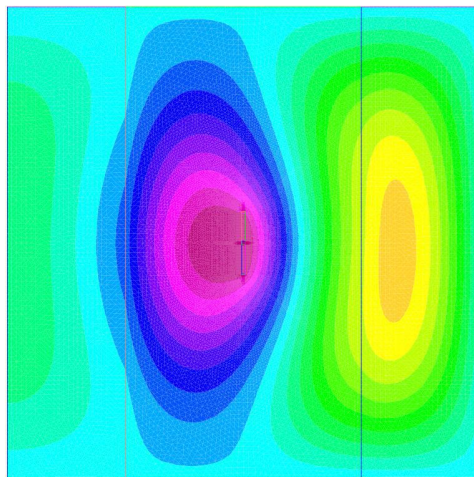


Рисунок 10. Приближенное решение прямой задачи

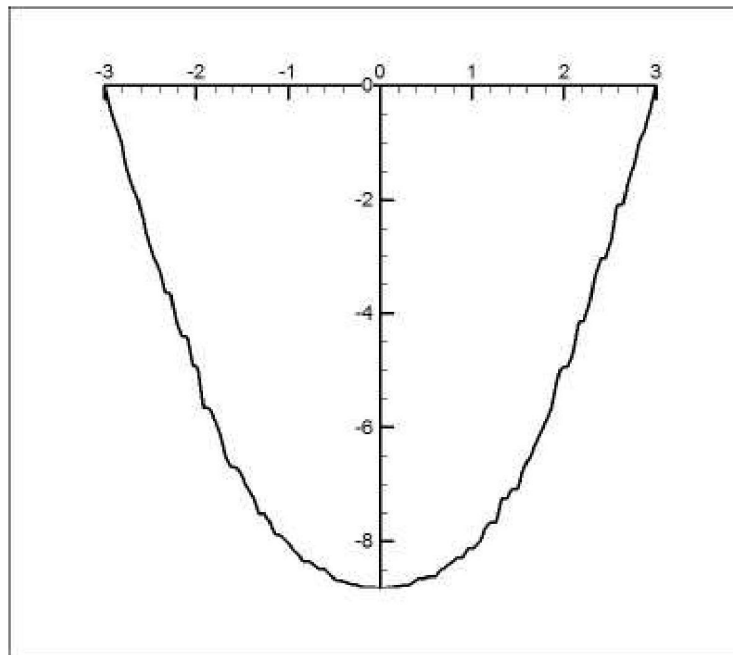


Рисунок 11. Приближенное решение обратной задачи

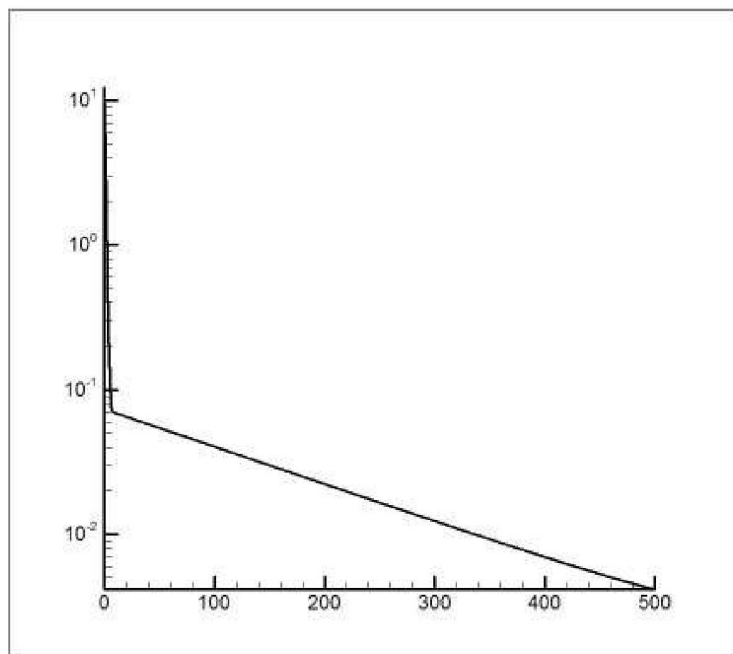


Рисунок 12. Невязка обратной задачи

3.  $\alpha = 0.1$ ,  $\omega = 1$

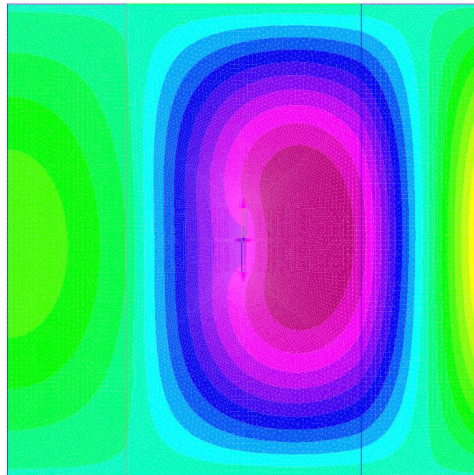


Рисунок 13. Точное решение прямой задачи

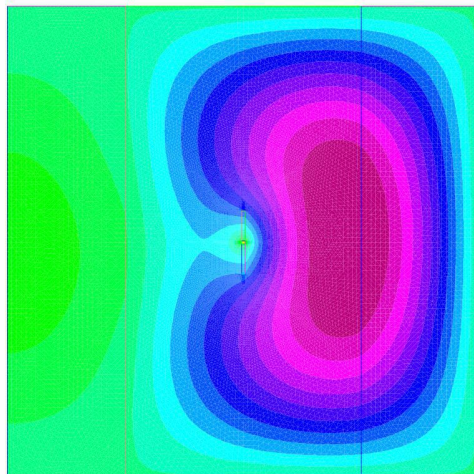


Рисунок 14. Начальное приближение решения прямой задачи при  $q = q_0$   
неуязка=0.000176257

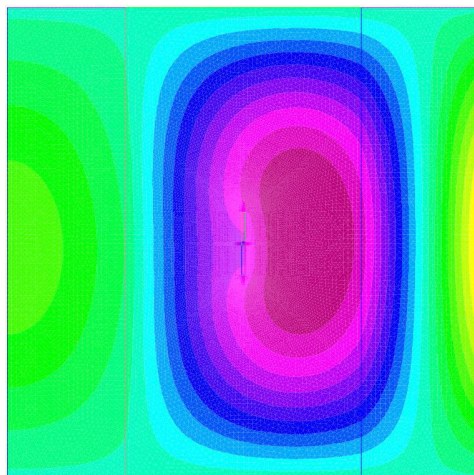


Рисунок 15. Приближенное решение прямой задачи

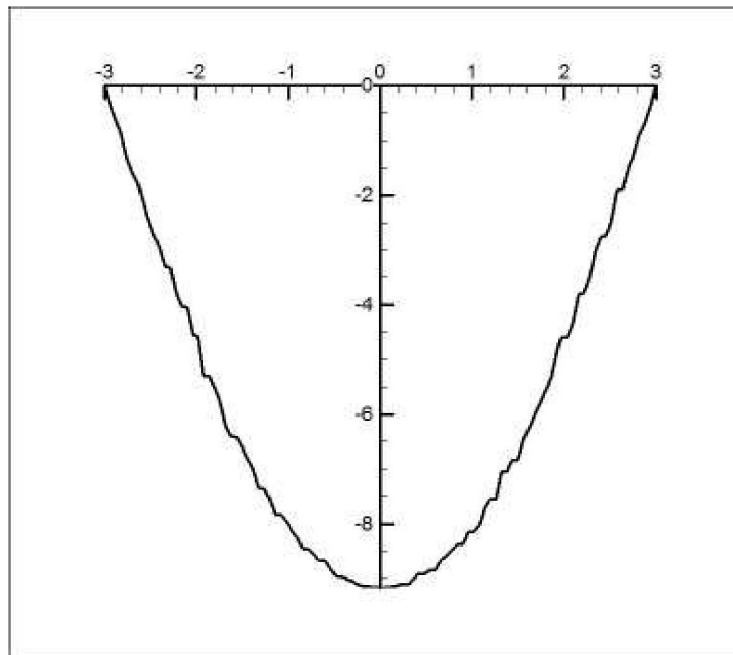


Рисунок 16. Приближенное решение обратной задачи

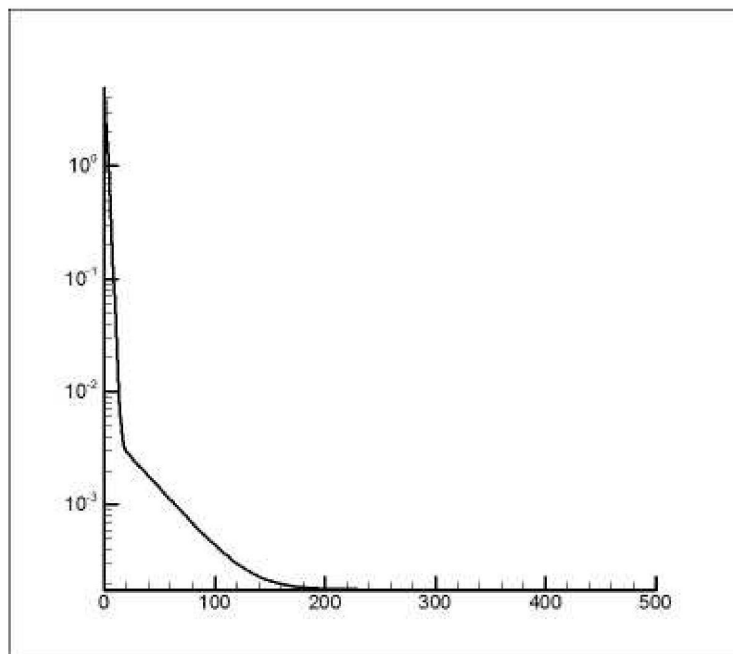


Рисунок 17. Невязка обратной задачи

### Список литературы

- [1] Segerlind Larry J., Applied finite element analysis. – New York, 1984.

- [2] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

*Dairbaeva G. Finite Element Method for solving inverse problem for Helmholtz's equation.*

In this work the method of continuation Helmholtz's equation in the zone of inaccessibility is given. It bases on the special inverse problem. As a result of solving of the problem it is succeeded to recover the value of the solution of Helmholtz's equation in the zone of inaccessibility. The inverse problem is solved on the basis of combination of methods of finite elements and optimization.

*Даирбаева Г. Гельмгольцаның теңдеуі үшін кері есептің шешімі шекті элементтер әдісі.*

Бұл жұмыста ұсыныс жасаған әдіспен сипатталған кері есептің арнайы түрімен шешім қызымет көресуден тыс аймаққа Гельмгольцтің теңдеуінің шешімі жалғастырылған. Есептер шешімнің нәтижесінде қызымет көресуден тыс аймаққа Гельмгольцтің теңдеуінің шешімінің мәнін қалпына келтіруге болады. Есептің шешімі шекті элементтер әдістерінің тіркесі және ықшамдауды негізде ұйғарылатын кейбір арнайы кері есепке бұл есептің алмастыруы жолымен іске асады