УДК 517.968.7

Искандаров С., Жапарова З.А.
ИТПМ НАН Кыргызской Республики, КНУ им. Ж. Баласагына,
Бишкек, Кыргызстан,
e-mail: mrmacintosh@list.ru, meku83@mail.ru

Оценки и специфическая асимптотическая устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка

Устанавливаются достаточные условия, гарантирующие оценки, асимптотическую и экспоненциальную устойчивость решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка типа Вольтерра в случае асимптотической и экспоненциальной неустойчивости ненулевых решений соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения пятого порядка.

Ключевые слова: линейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, асимптотическая устойчивость.

Все фигурирующие ниже функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, \quad t \geq \tau \geq t_0; \quad J = [t_0, \infty)$; ИДУ-интегро-дифференциальное уравнение; ДУ-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного однородного ИДУ пятого порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их производных до четвертого порядка включительно.

Задача 1 *Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ типа Вольтерра пятого порядка вида:*

$$x^{(5)}(t) - a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)+\right. \tag{1}$$
$$\left.+ Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)\right] d\tau = 0, \quad t \geq t_0$$

в случае выполнения условия:

$$a_4(t) \geq 0, \tag{a_4}$$

т.е. в случае асимптотической неустойчивости ненулевых решений соответствующего линейного однородного ДУ пятого порядка:

$$x^{(5)}(t) - a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + + a_0(t)x(t) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{1_0}$$

что подтверждается формулой Остроградского-Лиувилля.

Речь идет о решениях $x(t) \in C^5(J, R)$ ИДУ (1) с любыми начальными данными Коши $x^{(k)}(t_0) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$. Каждое такое решение существует и единственно.

Отметим, что такая задача ранее, насколько нам известно, никем не решена. Заметим, что для ИДУ (1) в [1] установлены достаточные специфические условия ограниченности на J решений и их производных до четвертого порядка включительно, т. е. устойчивости решений ИДУ (1) в случае выполнения условия:

$$a_4(t) \geq 0, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} a_4(s)ds = \infty,$$

т. е. в случае неустойчивости решений соответствующего ДУ (1_0).

В настоящей статье для решения поставленной задачи сначала устанав-ливаются асимптотические оценки для любых решений и их производных до четвертого порядка включительно, и из этих оценок при дополнительных допустимых условиях следует асимптотическая устойчивость реше-ний ИДУ (1). При этом применяются идеи нестандартных методов сведения к системе [2, 3], метод весовых функций [4, с. 27-28], метод преобразования уравнений [4, с. 25-27], метод срезывающих функций с применением преобразований по схеме $A) \to B) \to C)$ [4, с. 114-117] аналогично [1].

В ИДУ (1) следуя статьям [2, 3], сделаем следующие замены:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W_1(t)y(t), \quad x'(t) = -\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = W_2(t)u(t), \quad y''(t) = -\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t), \tag{3}$$

где λ, μ - некоторые вспомогательные параметры, $\lambda, \ \mu \neq 0$; $0 < W_r(t) \quad (r = 1, 2)$ - некоторые весовые функции; $y(t)$, $u(t)$ - новые неизвестные функции.

Идея замены (2) взята из [2], замены (3) – из [3].

Из (2), (3) дифференцированием получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} x''(t) = -\lambda^2 x'(t) + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) = -\lambda^2[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)]+ \\ +W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) = \lambda^4 x(t) + M_1(t)y(t) + W_1(t)y'(t), \end{gathered} \tag{4}$$

где $M_1(t) \equiv W_1'(t) - \lambda^2 W_1(t)$,

$$\begin{gathered} x'''(t) = \lambda^4 x'(t) + M_1'(t)y(t) + M_1(t)y'(t) + W_1'(t)y'(t) + W_1(t)y''(t) = \\ = \lambda^4[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + M_1'(t)y(t) + [M_1(t) + W_1'(t)]y'(t)+ \\ +W_1(t)[-\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t)] = -\lambda^6 x(t) + M_2(t)y(t) + M_3(t)y'(t)+ \\ +W_1(t)W_2(t)u(t), \end{gathered} \tag{5}$$

где $M_2(t) \equiv M_1'(t) + (\lambda^4 - \mu^2)W_1(t), \quad M_3(t) \equiv M_1(t) + W_1'(t),$

$$x^{(4)}(t) = -\lambda^6 x'(t) + M_2'(t)y(t) + M_2(t)y'(t) + M_3'(t)y'(t) + M_3(t)y''(t) +$$
$$+(W_1(t)W_2(t))'u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) = -\lambda^6[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] +$$
$$+M_2'(t)y(t) + [M_2(t) + M_3'(t)]y'(t) + M_3(t)[-\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t)] + \tag{6}$$
$$+(W_1(t)W_2(t))'u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) = \lambda^8 x(t) + M_4(t)y(t) + M_5(t)y'(t) +$$
$$+M_6(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t),$$

где $M_4(t) \equiv M_2'(t) - \lambda^6 W_1(t) - \mu^2 M_3(t)$, $M_5(t) \equiv M_2(t) + M_3'(t)$, $M_6(t) \equiv M_3(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'$,

$$x^{(5)}(t) = \lambda^8 x'(t) + M_4'(t)y(t) + M_4(t)y'(t) + M_5'(t)y'(t) + M_5(t)y''(t) +$$
$$+M_6'(t)u(t) + M_6(t)u'(t) + (W_1(t)W_2(t))'\,u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t) =$$
$$= \lambda^8\left[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)\right] + M_4'(t)y(t) + \left[M_4(t) + M_5'(t)\right]y'(t) +$$
$$+M_5(t)\left[-\mu^2 y(t) + W_2(t)u(t)\right] + M_6'(t)u(t) + \left[M_6(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]u'(t) + \tag{7}$$
$$+W_1(t)W_2(t)u''(t) = -\lambda^{10}x(t) + \left[\lambda^8 W_1(t) + M_4'(t) - \mu^2 M_5(t)\right]y(t) +$$
$$+\left[M_4(t) + M_5'(t)\right]y'(t) + \left[M_5(t)W_2(t) + M_6'(t)\right]u(t) +$$
$$+\left[M_6(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t).$$

Подставляя (2) - (7) в ИДУ (1), получаем

$$-\lambda^{10}x(t) + \left[\lambda^8 W_1(t) + M_4'(t) - \mu^2 M_5(t)\right]y(t) + \left[M_4(t) + M_5'(t)\right]y'(t) +$$
$$+\left[M_5(t)W_2(t) + M_6'(t)\right]u(t) + \left[M_6(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]u'(t) +$$
$$+W_1(t)W_2(t)u''(t) - a_4(t)\left[\lambda^8 x(t) + M_4(t)y(t) + M_5(t)y'(t) +\right.$$
$$\left.+M_6(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t)\right] + a_3(t)\left[-\lambda^6\, x(t) + M_2(t)y(t) + M_3(t)y'(t) +\right.$$
$$\left.+W_1(t)W_2(t)u(t)\right] + a_2(t)\left[\lambda^4 x(t) + M_1(t)y(t) + W_1(t)y'(t)\right] + a_1(t)\left[-\lambda^2 x(t) +\right.$$
$$\left.+W_1(t)y(t)\right] + a_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}\left\{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)\left[-\lambda^2 x(\tau) + W_1(\tau)y(\tau)\right] +\right.$$

$$+Q_2(t,\tau)\left[\lambda^4 x(\tau)+M_1(\tau)y(\tau)+W_1(\tau)y'(\tau)\right]+Q_3(t,\tau)\left[-\lambda^6 x(\tau)+\right.$$
$$+M_2(\tau)y(\tau)+M_3(\tau)y'(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u(\tau)]+Q_4(t,\tau)\left[\lambda^8 x(\tau)+\right. \tag{8}$$
$$\left.+M_4(\tau)y(\tau)+M_5(\tau)y'(\tau)+M_6(\tau)u(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u'(\tau)]\right\}d\tau=0$$

Введем обозначения:

$b_4(t)\equiv a_4(t)-\left[M_6(t)+(W_1(t)W_2(t))'\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $u'(t)$),

$b_3(t)\equiv a_3(t)+\left[M_5(t)W_2(t)+M_6'(t)-a_4(t)M_6(t)\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $u(t)$),

$b_2(t)\equiv a_2(t)\left(W_2(t)\right)^{-1}+\left[a_3(t)M_3(t)-a_4(t)M_5(t)+M_4(t)+M_5'(t)\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $y'(t)$),

$b_1(t)\equiv a_1(t)\left(W_2(t)\right)^{-1}+\left[a_2(t)M_1(t)+a_3(t)M_2(t)-a_4(t)M_4(t)+\lambda^8 W_1(t)+M_4'(t)-\right.$ $\left.-\mu^2 M_5(t)\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $y(t)$),

$b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-\lambda^2 a_1(t)+\lambda^4 a_2(t)-\lambda^6 a_3(t)-\lambda^8 a_4(t)-\lambda^{10}\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)+\lambda^4 Q_2(t,\tau)-\lambda^6 Q_3(t,\tau)+\lambda^8 Q_4(t,\tau)\right]$ (коэффициент $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)W_1(\tau)+Q_2(t,\tau)M_1(\tau)+Q_3(t,\tau)M_2(\tau)+Q_4(t,\tau)M_4(\tau)]$ (коэффициент $y(\tau)$),

$P_2(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\left[Q_2(t,\tau)W_1(\tau)+Q_3(t,\tau)M_3(\tau)+Q_4(t,\tau)M_5(\tau)\right]$ (коэффициент $y'(\tau)$),

$P_3(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\left[Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_4(t,\tau)M_6(\tau)\right]$ (коэффициент $u(\tau)$),

$K(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}Q_4(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)$ (коэффициент $u'(\tau)$).

После простейших выкладок, деля обе части на $W_1(t)W_2(t)$, учитывая введенные обозначения, и объединяя с заменами (2), (3), из (8) имеем следующую систему, эквивалентную исходному ИДУ пятого порядка (1):

$$\left\{\begin{array}{l}x'(t)+\lambda^2 x(t)=W_1(t)y(t),\\ y''(t)+\mu^2 y(t)=W_2(t)u(t),\\ u''(t)-b_4(t)u'(t)+b_3(t)u(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+P_2(t,\tau)y'(\tau)+P_3(t,\tau)u(\tau)+\right.\\ \left.+K(t,\tau)u'(\tau)\right]d\tau=0.\end{array}\right. \tag{9}$$

Пусть [4]: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция, $\Delta(t)\equiv 2\lambda^2\varphi(t)-\varphi'(t)$; $\psi(t)$ - некоторая срезывающая функция, $R(t,\tau)\equiv K(t,\tau)\left(\psi(t)\psi(\tau)\right)^{-1}$, $U(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\psi(s)u(s)ds$.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),\quad y(t),\quad u(t))$ системы (9) ее первое уравнение умножаем на $\varphi(t)x(t)$, второе - на $y'(t)$, третье - на $u'(t)$, сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим функции $\psi(t),\quad R(t,\tau)$, применяем лемму 1.1 [4, с. 44]. Тогда получаем следующее тождество:

$$
\begin{gathered}
\varphi(t)\,(x(t))^2+\int\limits_{t_0}^{t}\Delta(s)\,(x(s))^2\,ds+(y'(t))^2+\mu^2\,(y(t))^2+(u'(t))^2-\\
-2\int\limits_{t_0}^{t}b_4(s)\,(u'(s))^2\,ds+b_3(t)\,(u(t))^2-\int\limits_{t_0}^{t}b_3'(s)\,(u(s))^2\,ds+R(t,t_0)\,(U(t,t_0))^2-\\
-\int\limits_{t_0}^{t}R_s'(s,t_0)\,(U(s,t_0))^2\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}R_\tau'(t,\tau)\,(U(t,\tau))^2\,d\tau-\\
-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}R_{s\tau}''(s,\tau)\,(U(s,\tau))^2\,d\tau ds\equiv c_*+2\int\limits_{t_0}^{t}[\varphi(s)W_1(s)y(s)x(s)+\\
+W_2(s)u(s)y'(s)]\,ds-2\int\limits_{t_0}^{t}u'(s)\,\{b_2(s)y'(s)+b_1(s)y(s)+b_0(s)x(s)+\\
+\int\limits_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)+P_2(s,\tau)y'(\tau)+P_3(s,\tau)u(\tau)]\,d\tau\}\,ds
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $c_*=\varphi(t_0)\,(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+\mu^2\,(y(t_0))^2+(u'(t_0))^2+b_3(t_0)\,(u(t_0))^2$.

Пусть

$$W_1'(t)\le 0,\quad (W_1(t)W_2(t))'\le 0. \tag{11}$$

Тогда из обозначения следует, что

$$b_4(t)\ge 0. \tag{b_4}$$

Значит, в левой части тождества (10) имеется неположительный ("плохой") интегральный член:

$$I(t)\equiv -2\int\limits_{t_0}^{t}b_4(s)\,(u'(s))^2\,ds. \tag{12}$$

Для преобразования интеграла (12) можно применить преобразования, аналогично преобразованиям (3.108) – (3.113) из [4, с. 149-151] или преобразо-ваниям (9)-(12) из [5].

Введем обозначения:

$$\alpha(t)\equiv b_4(t)\,(\psi(t))^{-1}\,,\quad \beta(t)\equiv[\alpha'(t)+b_4(t)\alpha(t)]\,(\psi(t))^{-1}\,.$$

После преобразований, аналогичных преобразованиям (9)-(12) из [4], приходим к следующему соотношению:

$$
\begin{gathered}
I(t)=-2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0)+\beta(t)\,(U(t,t_0))^2-\int\limits_{t_0}^{t}[\beta'(s)+\\
+2b_4(s)R(s,s)]]\,(U(s,t_0))^2\,ds+b_4(t)R_\tau'(t,t_0)\,(Z(t,t_0))^2-\\
-\int\limits_{t_0}^{t}(b_4(s)R_\tau'(s,t_0))_s'\,(Z(s,t_0))^2\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}b_4(t)R_{\tau\tau}''(t,\tau)\,(Z(t,\tau))^2\,d\tau-\\
-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}(b_4(s)R_\tau'(s,\tau))_{s\tau}''\,(Z(s,\tau))^2\,d\tau ds-2\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(s)U(s,t_0)\,\{b_3(s)u(s)+\\
+b_2(s)y'(s)+b_1(s)y(s)+b_0(s)x(s)+\int\limits_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)+\\
+P_2(s,\tau)y'(\tau)+P_3(s,\tau)u(\tau)]\,d\tau\}\,ds,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где

$$Z(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} U(s,t_0)ds.$$

Подставляя (13) в (10), получаем следующее окончательное тождество:

$$\begin{gathered}\varphi(t)\left(x(t)\right)^2 + \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s)\left(x(s)\right)^2 ds + \left(y'(t)\right)^2 + \mu^2\left(y(t)\right)^2 + \left(u'(t)\right)^2 - \\ -2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0) + A(t)\left(U(t,t_0)\right)^2 - \int\limits_{t_0}^{t} B(s)\left(U(s,t_0)\right)^2 ds + b_3(t)\left(u(t)\right)^2 - \\ -\int\limits_{t_0}^{t} b_3'(s)\left(u(s)\right)^2 ds + \int\limits_{t_0}^{t} R'_\tau(t,\tau)\left(U(t,\tau)\right)^2 d\tau - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} R''_{s\tau}(s,\tau)\left(U(s,\tau)\right)^2 d\tau ds + \\ +b_4(t)R'_\tau(t,t_0)\left(Z(t,t_0)\right)^2 - \int\limits_{t_0}^{t}\left(b_4(s)R'_\tau(s,t_0)\right)'_s\left(Z(s,t_0)\right)^2 ds + \\ +\int\limits_{t_0}^{t} b_4(t)R''_{\tau\tau}(t,\tau)\left(Z(t,\tau)\right)^2 d\tau - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}\left(b_4(s)R'_\tau(s,\tau)\right)''_{s\tau}\left(Z(s,\tau)\right)^2 d\tau ds - \\ -2\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(s)U(s,t_0)\left\{b_3(s)u(s) + b_2(s)y'(s) + b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) + \right. \\ \left. +\int\limits_{t_0}^{s}\left[P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)y(\tau) + P_2(s,\tau)y'(\tau) + P_3(s,\tau)u(\tau)\right]d\tau\right\} ds \equiv \\ \equiv c_* + 2\int\limits_{t_0}^{t}\left[\varphi(s)W_1(s)y(s)x(s) + W_2(s)u(s)y'(s)\right]ds - 2\int\limits_{t_0}^{t} u'(s)\left\{b_2(s)y'(s) + \right. \\ +b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) + \int\limits_{t_0}^{s}\left[P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)y(\tau) + P_2(s,\tau)y'(\tau) + \right. \\ \left.\left. +\ P_3(s,\tau)u(\tau)\right]d\tau\right\} ds,\end{gathered} \tag{14}$$

где $A(t) \equiv R(t,t_0) + \beta(t)$, $\quad B(t) \equiv R'_t(t,t_0) + \beta'(t) + 2b_4(t)R(t,t)$. Переходом от тождества (14) к интегральному неравенству, аналогично теореме 3.16 [4, с. 151-153] доказывается

Теорема 1 *Пусть*
1) выполняются условия (a_4), (11), (b_4)*;* $0 \neq \lambda,\ \mu \in R,\ W_k(t) > 0 \ \ (k = 1,2),\ \varphi(t) > 0$*;*
2) $\Delta(t) \geq 0$*;*
3) $A(t) = A_1(t) + A_2(t),\ A_1(t) > 0,\ A_2(t) \geq 0$*, существует число* $\varepsilon \in (0,1)$ *такое, что* $\left(\alpha(t)\right)^2 \leq (1-\varepsilon)A_2(t)$*;*
4) существует функция $B^*(t) \in L^1(J,R_+)$ *такая, что* $B(t) \leq B^*(t)A_1(t)$*;*
5) $b_3(t) \geq b_{30} > 0$*, существует функция* $b_3^*(t) \in L^1(J,R_+)$ *такая, что* $b_3'(t) \leq b_3^*(t)b_3(t)$*;*
6) $R'_\tau(t,\tau) \geq 0,\ R''_{t\tau}(t,\tau) \leq 0,\ \left(b_4(t)R'_\tau(t,t_0)\right)'_t \leq 0,\ R''_{\tau\tau}(t,\tau) \geq 0$*;* $\left(b_4(t)R'_\tau(t,\tau)\right)''_{t\tau} \leq 0$*;*
7) $\left(\varphi(t)\right)^{\frac{1}{2}} W_1(t) + W_2(t) + |\alpha(t)|\left(A_1(t)\right)^{-\frac{1}{2}} b_3(t) + \left[1 + |\alpha(t)|\left(A_1(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\{|b_2(t)| + |b_1(t)| + \right.$

$\left. +|b_0(t)|\left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}} + \int\limits_{t_0}^{t}\left[|P_0(t,\tau)|\left(\varphi(\tau)\right)^{-\frac{1}{2}} + |P_1(t,\tau)| + |P_2(t,\tau)| + |P_3(t,\tau)|\right]d\tau\right\} \in L^1\left(J, R_+ \setminus \{0\}\right)$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t))$ *справедливы утверждения:*

$$x(t) = \left(\varphi(t)\right)^{-\frac{1}{2}} O(1), \tag{15}$$

$$\Delta(t)\,(x(t))^2 \in L^1(J,R_+), \tag{16}$$

$$y^{(k)}(t) = O(1) \quad (k=0,\ 1), \tag{17}$$

$$u^{(k)}(t) = O(1) \quad (k=0,\ 1), \tag{18}$$

и из соотношений (2) – (6) для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) вытекают оценки:

$$x'(t) = \Big[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + W_1(t)\Big]\, O(1), \tag{19}$$

$$x''(t) = \Big[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + |M_1(t)| + W_1(t)\Big]\, O(1), \tag{20}$$

$$x'''(t) = \Big[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + |M_2(t)| + |M_3(t)| + W_1(t)W_2(t)\Big]\, O(1), \tag{21}$$

$$x^{(4)}(t) = \Big[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + |M_4(t)| + |M_5(t)| + |M_6(t)| + W_1(t)W_2(t)\Big]\, O(1). \tag{22}$$

Следовательно, для любого решения $x(t)$ ИДУ пятого порядка (1) справедливы оценки (15), (19) – (22).

Введем обозначения:

$$\Phi_0(t) \equiv (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Phi_1(t) \equiv \Phi_0(t) + W_1(t),$$

$$\Phi_2(t) \equiv \Phi_0(t) + |M_1(t)| + W_1(t),$$

$$\Phi_3(t) \equiv \Phi_0(t) + |M_2(t)| + |M_3(t)| + W_1(t)W_2(t),$$

$$\Phi_4(t) \equiv \Phi_0(t) + |M_4(t)| + |M_5(t)| + |M_6(t)| + W_1(t)W_2(t).$$

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы оценки:

$$x^{(k)}(t) = \Phi_k(t)O(1) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{23}$$

что равносильно оценкам (15), (19) – (22).

Из (23) аналогично следствиям 3.1, 3.2 [4, с. 117] получаем следующие 2 предложения.

Следствие 1 *Если выполняются все условия теоремы и $\Phi_k(t) \to 0$, $t \to \infty$ $(k = 0,1,2,3,4)$, то все решения и их производные до четвертого порядка включительно ИДУ (1) стремятся к нулю при $t \to \infty$, т.е. любое решение ИДУ (1) асимптотически устойчиво.*

Следствие 2 *Если выполняются все условия теоремы и существуют числа $\lambda_k > 0$ такие, что $\Phi_k(t) = e^{-\lambda_k t}O(1)$ $(k = 0,1,2,3,4)$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы оценки:*

$$x^{(k)}(t) = e^{-\lambda_k t}O(1) \quad (k = 0,1,2,3,4),$$

т.е. любое решение ИДУ (1) стремятся к нулю при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону, а именно любое решение ИДУ (1) экспоненциально устойчиво.

Отметим, что следствие 2 является специальным частным случаем следствия 1.

Пример 1 *ИДУ пятого порядка:*

$$x^{(5)}(t)-\frac{1}{t+1}x^{(4)}(t)-\left[\frac{5}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}\right]x'''(t)+\left[5-\frac{10}{t+1}-\frac{3}{t^2+1}+2\sin e^{-2t}\right]x''(t)+$$
$$+\left[14-\frac{10}{t+1}-\frac{4}{t^2+1}+4\sin e^{-2t}\right]x'(t)+\left[10-\frac{4}{t+1}-\frac{2}{t^2+1}+2\sin e^{-2t}+e^{-3t}\right]x(t)+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{1000e^{-2t+52\tau}}{3t-\tau+1}\left[4x(\tau)+10x'(\tau)+10x''(\tau)+5x'''(\tau)+x^{(4)}(\tau)\right]d\tau=0,\quad t\geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствий 1, 2 при $\lambda=1$, $\mu=1$, $W_1(t)\equiv e^{-t}$, $W_2(t)\equiv e^{-t}$, $\varphi(t)\equiv e^t$, здесь $b_4(t)\equiv 7+\frac{1}{t+1}$, $b_3(t)\equiv 15-\frac{1}{t^2+1}$, $b_2(t)\equiv 2e^t\sin e^{-2t}$, $b_1(t)\equiv 0$, $b_0(t)\equiv e^{-t}$, $P_k(t,\tau)\equiv 0\quad(k=0,1,2,3)$, $K(t,\tau)\equiv\frac{1000e^{50\tau}}{3t-\tau+1}$, $\psi(t)\equiv e^{50t}$, $R(t,\tau)\equiv\frac{1000e^{-50t}}{3t-\tau+1}$, $\alpha(t)\equiv\left(7+\frac{1}{t+1}\right)e^{-50t}$, $\beta(t)\equiv-\left(301+\frac{36}{t+1}\right)e^{-100t}$, $A(t)\equiv\frac{1000e^{-50t}}{3t+1}-\left(301+\frac{36}{t+1}\right)e^{-100t}$, $A_1(t)\equiv\frac{100e^{-50t}}{3t+1}$, $A_2(t)\equiv\frac{900e^{-50t}}{3t+1}-\left(301+\frac{36}{t+1}\right)e^{-100t}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $B(t)\equiv-\frac{50000e^{-50t}}{3t+1}-\frac{3000e^{-50t}}{(3t+1)^2}+100\left(301+\frac{36}{t+1}\right)e^{-100t}+\frac{36}{(t+1)^2}e^{-100t}+\left(7+\frac{1}{t+1}\right)\frac{2000e^{-50t}}{2t+1}\leq 4\left(7525+\frac{900}{t+1}+\frac{9}{(t+1)^2}\right)e^{-100t}$, $B^*(t)\equiv 346(3t+1)e^{-50t}$.

Значит, для любого его решения $x(t)$ справедливы оценки:

$$x(t)=e^{-\frac{t}{2}}O(1),\quad x'(t)=\left[e^{-\frac{t}{2}}+e^{-t}\right]O(1),\quad x''(t)=\left[e^{-\frac{t}{2}}+e^{-t}\right]O(1),$$
$$x'''(t)=\left[e^{-\frac{t}{2}}+e^{-t}+e^{-2t}\right]O(1),\quad x^{(4)}(t)=\left[e^{-\frac{t}{2}}+e^{-t}+e^{-2t}\right]O(1),$$

т.е.

$$x^{(k)}(t)=e^{-\frac{t}{2}}O(1)\qquad(k=0,1,2,3,4);$$

любое решение данного ИДУ пятого порядка экспоненциально устойчиво.

Таким образом, установлены специфические достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости любого решения линейного однородного ИДУ пятого порядка типа Вольтерра (1).

Список литературы

[1] *Иманалиев М.И., Искандаров С., Жапарова З.А.* Специфическая теорема об устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядк // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2009. - Вып.40. - С. 8–13.

[2] *Искандаров С.* О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып.35. - С. 31–35.

[3] *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып.35. - С. 36-40.

[4] *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

[5] *Иманалиев М.И., Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Докл. РАН. - 2009. - Т.425, №4. – С. 447 – 451.

Iskandarov S., Japarova Z.A. Estimations and specific asymptotic stability of solutions of linear homogeneous Volterra integro-differential equation of fifth-order.
We establish sufficient conditions that guarantee the estimates, the asymptotical and exponential stability of solutions of linear homogeneous Volterra integro-differential equation of fifth order in the case, than all nontrivial solutions of the corresponding linear homogeneous differential equation of fifth order are asymptotical and exponential instability.

Искандаров С., Жапарова З.А. Бесінші ретті сызықты біртекті вольтеррлік интегралды дифференциалдық теңдеу шешімдерінің бағалаулары және арнайы асимптотикалық орнықтылығы.
Сызықты біртекті Вольтерр типті бесінші ретті интегралды дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің бағалауларына, асимптотикалың және экспоненциалдық орнықтылығына сәйкес сызықты біртекті бесінші ретті дифференциалдық теңдеудің нөлдік емес шешімдерінің асимптотикалық және экспоненциалдық орнықсыздығы жағдайында кепілдеме беретін жеткілікті шарттар алынған.