УДК 517.951

Кудашов Ж.К., Қайырбек О.А.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: zhandos kudashov@mail.ru

О биортогональном свойстве систем корневых функций задачи Неймана при интегральном возмущении краевого условия[1]

В данной работе в функциональном пространстве рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка соответствующей задаче Неймана при интегральном возмущении краевого условия. Строится в явном виде система корневых функций оператора в исходных терминах внутренне краевого условия. Разработан метод построение биортогональных систем корневых функций оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор второго порядка, задача Неймана, корневые функции, резольвента.

Пусть $\sigma(.)$ произвольная функция из функционального пространства $L_2[0,1]$. Введем целую от λ функцию

$$\Delta(\lambda) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \lambda\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x\overline{\sigma(x)}dx \tag{1.1}$$

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ...,\}$ последовательность нулей целой функции $\Delta(\lambda)$. Каждый нуль λ_n функции $\Delta(\lambda)$ имеет некоторую кратность m_n. В данной работе для наглядности все результаты иллюстрируются при $m_n = 2$. В этом случае $\Delta(\lambda_n) = 0, \Delta^{'}(\lambda_n) = 0, \Delta^{(2)}(\lambda_n) \neq 0$.
Введем цепочку функций

$$E_n = \{\cos\sqrt{\lambda_n}x, -\frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}}\}$$

Объединение всевозможных таких цепочек

$$E = \{E_n : \lambda_n \text{ - } \textit{нули функции } \Delta(\lambda)\}$$

называются системой функций.

Основная цель работы: : Конструктивно построить сопряженную систему функций к системе функций E в функциональном пространстве $L_2(0,1)$ (Теорема 4.1). Отметим, что система функций E представляет систему корневых функции оператора L_σ,в

---

[1] Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012г.-2014г

которой функция $\sigma(.)$ играет роль граничной функций. Подробности описаны ниже в пункте 2. В случае оператора дифференцирования в качестве корневой системы возникает система экспонент, которая детально исследована в работе [1].

2. Краевая задача и вспомогательные утверждения.

В работе [2] доказано следующее утверждение

Теорема (М. Отелбаев) а) При любом выборе функций $\sigma_\nu(x), \nu = 1, 2$ из пространства $L_2(0, 1)$ нелокальной краевой задаче

$$l(y) = -y^{''}(x) = f(x), 0 < x < 1 \tag{2.1}$$

$$y^{'}(0) - \int_0^1 (-y^{''}(x))\overline{\sigma_1(x)}dx = 0 \tag{2.2}$$

$$y^{'}(1) - \int_0^1 (-y^{''}(x))\overline{\sigma_2(x)}dx = 0 \tag{2.3}$$

в пространстве $L_2(0, 1)$ соответствует оператор L,который имеем вполне непрерывный обратный оператор L^{-1}.
в) Пусть неоднородное уравнение (2.1) с некоторыми дополнительными условиями при любой правой части $f(x) \in L_2(0, 1)$ имеет единственное решение $y(x)$ в пространстве $W_2^2[0, 1]$,для которого выполняется априорная оценка

$$\| y \|_{L_2(0,1)} \leq c \| f \|_{L_2(0,1)}$$

Тогда найдется единственный набор функций $\{\sigma_\nu(x)\}, \nu = 1, 2$ из пространства $L_2(0, 1)$, что дополнительные условия эквивалентны условиям (2.2), (2.3).
Из теоремы (М. Отелбаев) следует, что нелокальные краевые условия (2.2), (2.3) при всевозможных $\sigma_\nu(x), \nu = 1, 2$ из пространства $L_2(0, 1)$ описывают все корректно разрешимые краевые задачи соответствующие выражению $l(.)$.

Пусть в задаче (2.1), (2.2), (2.3) функция $\sigma(.) \equiv 0$. Таким образом, в функциональном пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор L_σ соответствующий следующей нелокальной краевой задаче

$$l(y) = -y^{''}(x) = f(x), 0 < x < 1 \tag{2.1}$$

$$y^{'}(0) = 0 \tag{2.4}$$

$$y^{'}(1) - \int_0^1 (-y^{''}(x))\overline{\sigma_2(x)}dx = 0 \tag{2.5}$$

где $\sigma(x) \in L_2(0, 1)$.

3. Резольвента оператора L_σ .

В данном пункте в явном виде вычислим решение следующей дифференциальной уравнений

$$-y^{''}(x) = \lambda y(x) + f(x), 0 < x < 1 \tag{3.1}$$

и с нелокальными краевыми (2.4), (2.5). Решение задачи (3.1), (2.4), (2.5) называется резольвентой оператора L_σ. Явный вид резольвенты имеет существенный смысл при исследования биортогональных свойств систем корневых функций оператора L_σ.

Теорема 3.1 Резольвента оператора L_σ определяется по формуле

$$y(x) = (L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x) = \frac{< f(t), M_{\overline{\lambda}}(t) >}{\Delta(\lambda)} \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \tag{3.2}$$

где

$$M_{\overline{\lambda}}(t) = \cos\sqrt{\overline{\lambda}}(t-1) + \sigma(t) + \overline{\lambda}\int_t^1 \frac{\sin\sqrt{\overline{\lambda}}(t-x)}{\sqrt{\overline{\lambda}}}\sigma(x)dx \tag{3.3}$$

Доказательство. Общая решение дифференциальной уравнений (3.1) есть функция

$$y(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \tag{3.4}$$

где $\{\cos\sqrt{\lambda}x, \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\}$ фундаментальная система решение однородного дифференциального уравнение (3.1). Подставляя уравнение (3.4) и ее производные первого и второго порядка соответственно на краевые условия (2.4), (2.5) получим, что $c_2 = 0, c_1 = \frac{<f(t), M_{\overline{\lambda}}(t)>}{\Delta(\lambda)}$.
Используя значение c_1, c_2 в уравнение (3.4), получим (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Целая функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией оператора L_σ. Сформулируем в виде леммы некоторые основные свойства функций $\Delta(\lambda)$.

Лемма 3.1 Для любых собственных значение λ_n кратности $m_n = 2$ оператора L_σ справе- дливы следующие свойства

$$1) \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda_n}x\overline{\sigma(x)}dx = -\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}$$

$$2) \int_0^1 \frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}}\overline{\sigma(x)}dx = -\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n^3}} + \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n}$$

Эти соотношения непосредственно получаются из формулы (1.1) для $\Delta(\lambda)$ с учетом кратности собственных значений.

4. Система корневых функций оператора L_σ и соответствующая сопряженная система.

В монографии [3, с. 445] приведена теорема о разложении, из которой следует, что проектор $P_n : L_2(0,1) \to Ker(L_\sigma - \lambda_n I)^{m_n}$ представляет вычет резольвенты в особой точке λ_n

$$(P_n f)(x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_n|=\delta}(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x)d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_n|=\delta}(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x)d\lambda = -res_{\lambda_n}(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x)$$

при некотором $\delta > 0$. Вспоминая представление резольвенты (3.1) из теоремы (3.1) и заметим, что $\int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$ представляет целую функцию от λ,поэтому вычет от этой функций равен нулю. Основные свойства теории вычетов вид проектора P_n можно уточнить

$$(P_n f)(x) =< f(t), -\lim_{\overline{\lambda}\to\overline{\lambda}_n} \frac{d}{d\overline{\lambda}} \frac{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_n})^2 M_{\overline{\lambda}}(t)}{\overline{\Delta(\lambda)}} > \cos\sqrt{\lambda_n}x +$$

$$+ < f(t), -\lim_{\overline{\lambda}\to\overline{\lambda}_n} \frac{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_n})^2 M_{\overline{\lambda}}(t)}{\overline{\Delta(\lambda)}} > (-\frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}}) \tag{4.1}$$

Приведем некоторые свойства систем функций E в виде леммы.

Лемма 4.1 Элементы цепочки E_n удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$-y^{''}_{n,1}(x) = \lambda_n y_{n,1}(x) + y_{n,0}(x) \tag{4.2}$$

$$-y^{''}_{n,0}(x) = \lambda_n y_{n,0}(x) \tag{4.3}$$

и нелокальным краевым условиям (2.4), (2.5).

Доказательство. Проверим, что функции $y_{n,0}, y_{n,1}$ удовлетворяют условиям леммы. Для этого найдем производные первого и второго порядка из этих функции. Имеем,

$$y_{n,0}(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$y^{'}_{n,0}(x) = -\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$y^{''}_{n,0}(x) = -\lambda_n\cos\sqrt{\lambda_n}x$$

$$y_{n,1}(x) = -\frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}},$$

$$y^{'}_{n,1}(x) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}} - \frac{x\cos\sqrt{\lambda_n}x}{2},$$

$$y^{''}_{n,1}(x) = -\cos\sqrt{\lambda_n}x + \frac{\sqrt{\lambda_n}x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2}$$

Вычислим линейную комбинацию

$$\lambda_n y_{n,1}(x) + y_{n,0}(x) = \lambda_n(-\frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}}) + \cos\sqrt{\lambda_n}x = -y^{''}_{n,1}(x)$$

Остается проверить краевые условия (2.4), (2.5). Очевидно, что $y^{'}_{n,0}(0) = 0,\ y^{'}_{n,1}(0) = 0$. Соответственно,

$$y^{'}_{n,0}(1) - \int_0^1 (-y^{''}_{n,0}(x))\overline{\sigma(x)}dx = -\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n} - \lambda_n\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda_n}x\overline{\sigma(x)}dx = 0$$

, так как справедлива первая свойства 3.1. Также из леммы 3.1 следует, что

$$y^{'}_{n,1}(1) - \int_0^1 (-y^{''}_{n,1}(x))\overline{\sigma(x)}dx = -\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}} - \frac{x\cos\sqrt{\lambda_n}x}{2} -$$

$$-\int_0^1 (\lambda_n(-\frac{x\sin\sqrt{\lambda_n}x}{2\sqrt{\lambda_n}}) + \cos\sqrt{\lambda_n}x)\overline{\sigma(x)}dx = 0$$

Лемма 4.1 доказана.

Из леммы 4.1 следует, что система функций E представляет систему корневых функций оператора L_σ.

В дальнейшем будем исследовать биортогональных свойств систем функций E . При исследование этого вопроса понадобится следующая лемма.

Лемма 4.2Для произвольных комплексных чисел λ, μ справедливо тождество

$$< \cos\sqrt{\lambda}x, M_{\overline{\lambda}}(x) >\equiv -\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu} \tag{4.4}$$

Доказательство.Для произвольных λ, μ скалярное произведение $\lambda < \cos\sqrt{\lambda}x, M_{\overline{\mu}}(x) >$ c с учетом соотношений (3.3), (4.3), запишем в следующем виде

$$\lambda < \cos\sqrt{\lambda}x, M_{\overline{\mu}}(x) >= \lambda < \cos\sqrt{\lambda}x, \cos\sqrt{\mu}(x-1) + \lambda < \cos\sqrt{\lambda}x, \sigma(x) > -$$

$$-\mu\int_0^1 \frac{d^2}{dx^2}\cos\sqrt{\lambda}x(\int_x^1 \frac{\sin\sqrt{\mu}(x-t)}{\sqrt{\mu}}\overline{\sigma(t)}dt)dx$$

Два раза применив формулу интегрирования по частям к третьему слагаемому последнего соотношения, запишем его в следующем виде

$$\lambda < \cos\sqrt{\lambda}x, M_{\overline{\mu}}(x) >= -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda_n} - \Delta(\lambda) + \lambda\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x, \cos\sqrt{\mu}(x-1)dx + \Delta(\mu)+$$

$$+\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu} + \mu\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x(\overline{\sigma(x)} + \mu\int_x^1 \frac{\sin\sqrt{\mu}(x-t)}{\sqrt{\mu}}\overline{\sigma(t)}dt)dx$$

К последнему соотношению прибавим и отнимаем линейный ограниченный функционал $\mu\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\mu}(x-1)dx$. Тогда последнее соотношение преобразуется к виду

$$(\lambda-\mu) < \cos\sqrt{\lambda}x, M_{\overline{\mu}}(x) >= -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \Delta(\lambda) + \Delta(\mu) + \sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}+$$

$$+(\lambda-\mu)\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\mu}(x-1)dx$$

Из последнего соотношения следует требуемое тождество (4.4). Остается заметить, что в последнем соотношение

$$(\lambda-\mu)\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\mu}(x-1)dx = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}$$

Лемма 4.2 доказана.

Анализ формулы (4.1) приводит к следующим обозначениям

$$E_n^{'} = \{h_{n,0}(x),\ h_{n,1}(x)\}$$

где

$$h_{n,0}(x)=-\lim_{\overline{\lambda}\to\overline{\lambda}_n}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\frac{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_n})^2M_{\overline{\lambda}}(x)}{\overline{\Delta(\lambda)}},\ h_{n,1}(x)=-\lim_{\overline{\lambda}\to\overline{\lambda}_n}\frac{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda_n})^2M_{\overline{\lambda}}(x)}{\overline{\Delta(\lambda)}}$$

Введем также следующее семейство функции

$$E^{'}=\{E^{'}_n:\lambda_n\ \textit{произвольное собственное значение оператора}\ \ L_\sigma\}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4.1 Система функций $E^{'}$ является сопряженной к системе функций E , то есть

$$<y_{n,j}(x),h_{n,k}(x)>=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \text{(n,j)=(n,k)}\\ \\ 0, & \textit{если}\ \text{(n,j)}\neq\text{(n,k) j,k=0,1}\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $j=0,\ k=0$. Тогда

$$<y_{n,0}(x),h_{n,0}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}<\cos\sqrt{\lambda}x,M_{\overline{\lambda}}(x)>$$

Учитывая соотношение (4.4) , имеем

$$<y_{n,0}(x),h_{n,0}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)}{\lambda_n-\lambda}$$

Так как $\Delta(\lambda_n)=0$ то последнее соотношение примет вид

$$<y_{n,0}(x),h_{n,0}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-\lambda_n)=1 \tag{4.5}$$

Пусть $j=0,\ k=1$ Тогда

$$<y_{n,0}(x),h_{n,1}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}<\cos\sqrt{\lambda}x,M_{\overline{\lambda}}(x)>$$

Учитывая соотношение (4.4) , имеем

$$<y_{n,0}(x),h_{n,1}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)}{\lambda_n-\lambda}$$

Так как $\Delta(\lambda_n)=0$ то последнее соотношение примет вид

$$<y_{n,0}(x),h_{n,1}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)=0 \tag{4.6}$$

Пусть $j=1,\ k=0$. Тогда

$$<y_{n,1}(x),h_{n,0}(x)>=-\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}<-\frac{x\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda_n}},M_{\overline{\lambda}}(x)>=$$

$$= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)} < \frac{\partial}{\partial\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x, M_{\overline{\lambda}}(x) >=$$

$$>= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)} < \cos\sqrt{\lambda_n}x, M_{\overline{\lambda}}(x) >$$

Учитывая соотношение (4.4) , имеем

$$< y_{n,1}(x), h_{n,0}(x) >= \lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

Так как $\Delta(\lambda_n) = 0$ то последнее соотношение примет вид

$$< y_{n,1}(x), h_{n,0}(x) >= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}(\lambda-\lambda_n) = 0 \tag{4.7}$$

Пусть $j = 1,\ k = 1$. Тогда

$$< y_{n,1}(x), h_{n,1}(x) >= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)} < -\frac{x\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda_n}}, M_{\overline{\lambda}}(x) >=$$

$$= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)} < \frac{\partial}{\partial\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x, M_{\overline{\lambda}}(x) >=$$

$$= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)} < \cos\sqrt{\lambda_n}x, M_{\overline{\lambda}}(x) >$$

Учитывая соотношение (4.4) , имеем

$$< y_{n,1}(x), h_{n,1}(x) >= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\frac{(\lambda-\lambda_n)^2}{\Delta(\lambda)}\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta\lambda}{\lambda_n-\lambda}$$

Так как $\Delta(\lambda_n) = 0$ то последнее соотношение примет вид

$$< y_{n,1}(x), h_{n,1}(x) >= -\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}(\lambda-\lambda_n) = 1 \tag{4.8}$$

Из (4.5), (4.6), (4.7) и (4.8) следуют требуемые утверждения.

Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 следует, что система функций E' есть биортогональная к системе E . Следовательно, система функций E является минимальной системой функций [4, с. 171]

Авторы выражает глубоку благодарность своему научному руководителю профессору Б.Е. Кангужину за постоянное внимание и поддержку в работе.

Список литературы

[1] *Седлецкий А.М.*, Биортогональные разложения функций в ряд экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи мат.наук. – 1982. - № 37:5(227). - С. 51-95.

[2] *Отелбаев М.О., Шыныбеков А.Н.*, О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // ДАН СССР. – 1982. - № 265(4). - С. 815-819.

[3] *Никольский Н.К.* Лекции об операторе сдвига. – М.: Наука, 1980.

Kudashov Zh., Kaiyrbek O. On biorthogonal property of systems of root functions of the Neumann problem for the perturbation of the integral boundary condition.

In this paper, we consider an ordinary second order differential operator corresponding to the Neumann problem with perturbation an integral boundary condition in the function space . We construct an explicit systems of root functions of . We develop a method the construction for biorthogonal systems of root functions of.

Кудашов Ж.К., Қайырбек О.А. Шекаралық шартында интегралдық ауытқуы бар Нейман есебінің түбірлес функциялар жүйесіне биортогоналдық жүйе құру.

Бұл жұмыста $L_2(0,1)$ функционалдық кеңістігінде шекаралық шартында интегралдық ауытқуы бар Нейман есебіне сәйкес екінші ретті L_σ дифференциалдық оператор қарастырамыз. L_σ операторыннының түбірлес функциялар жүйесін айқын түрде құрамыз. L_σ операторының түбірлес функциялар жүйесіне биортогоналдық жүйе құру әдісі құрастырылды.