УДК 517.956

Султангазиева Ж.Б., Токибетов Ж.А.
Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби,Алматы
e-mail: zhanat_87@mail.ru

Приведение задачи Римана-Гильберта для одной эллиптической системы к системе уравнений Фредгольма[1]

В трехмерном полупространстве задачу Римана-Гильберта для эллиптической системы, обобщающей систему, рассмотренную А.В. Бицадзе к системе уравнений Фредгольма методом Булигана-Жиро.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта

В евклидовом полупространстве $E : \{\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z > 0\}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \neq 0)$ рассмотрим эллиптическую систему первого порядка неизвестных функций s, u, v, w :

$$\begin{aligned}
&u_x + v_y + w_z = 0,\\
&s_x - v_x + w_y + av_x - bv_y - cw_x - bw_z = 0,\\
&s_y + u_z - w_x - au_x + bu_y - cw_y - aw_z = 0,\\
&s_z - u_y + v_x + cu_x + bu_z + cv_y + av_z = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, c – произвольные действительные постоянные.

Общее решение этой системы выражается через две произвольные регулярные гармонические функции σ и ω в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&s = -\sigma_x - c\sigma_y - a\sigma_z,\\
&u = -\omega_x - c\omega_y - a\omega_z,\\
&v = \sigma_z + c\omega_x - \omega_y + b\omega_z,\\
&w = -\sigma_y + a\omega_x - b\omega_y - \omega_z.
\end{aligned} \tag{2}$$

При $a = b = c = 0$ мы из системы (1) получаем известную систему Мойсила-Теодореску, являющейся трехмерным обобщенным аналогом системы Коши-Римана [1].

В этой работе мы будем заниматься сведением задачи Римана-Гильберта для системы (1) в трехмерной области к системе интегральных уравнений Фредгольма при помощи метода Булигана - Жиро [2].

Как известно, задача Римана-Гильберта для системы (1) ставится так: требуется найти регулярное в области D с гладкой границей Γ решение s, u, v, w системы (1), удовлетворяющее на границе Γ условиям [1]:

$$\alpha_i s + \beta_i u + \gamma_i v + \delta_i w = f_i, \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0683/ГФ, 2012г.-2014г.

где α_i, β_i, γ_i, δ_i, f_i – заданные на границе Γ непрерывные по Гельдеру функции. Мы рассмотрим эту задачу (3) для системы (1), когда все коэффициенты постоянные, а область D является полупространством $E : \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z > 0\}$, граница Γ – плоскость $\{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0\}$.

При помощи представления решений (2) системы (1) задача (3) сводится к задаче о наклонной производной для двух гармонических функций σ и ω :

$$\begin{aligned} &-\alpha_i\sigma_x - (\alpha_i c + \delta_i)\sigma_y - (a\alpha_i - \gamma_i)\sigma_z + (-\beta_i + c\gamma_i + a\delta_i)\omega_x + \\ &+(-c\beta_i - \gamma_i - b\delta_i)\omega_y + (-a\beta_i + b\gamma_i - \delta_i)\omega_z = f_i, (i = 1, 2), \end{aligned} \tag{4}$$

или, кратко,

$$(A_j, \nabla\omega) + (B_j, \nabla\sigma) = f_i, (i = 1, 2), \tag{4'}$$

где $A_j(a\delta_j + c\gamma_j - \beta_j, -b\delta_j - c\beta_j - \gamma_j, -a\beta_j + b\gamma_j - \delta_j)$, $B_j(-\alpha_j, -\alpha_j c - \delta_j, -a\alpha_j + \gamma_j)$.

Обозначим точку полупространства E через $X = (x, y, z)$, а точку границы $\Gamma \equiv \equiv \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z\}$ через $Y = (\xi, \eta, \zeta)$ и $r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}$ – расстояние между точками X и Y.

Для исследования задачи (4') применяем метод Булигана-Жиро, приводящий задачу к системе уравнений Фредгольма. В случае постоянного коэффициента левой части граничного условия (4'), решение этой задачи будем искать в виде

$$\omega(X) = \int_\Gamma [G_1(X,Y)\mu_1(Y) + G_2(X,Y)\mu_2(Y)]d_Y\Gamma, \tag{5}$$

$$\sigma(X) = \int_\Gamma [H_1(X,Y)\mu_1(Y) + H_2(X,Y)\mu_2(Y)]d_Y\Gamma \tag{6}$$

Здесь, $X = (x, y, z)$ – точка полупространства $E, Y = (\xi, \eta, \zeta)$ – произвольная точка границы Γ, μ_1 и μ_2 функции, относительно которых получим ниже систему интегральных уравнений Фредгольма, а G_1, G_2, H_1, H_2 – регулярные в полупространстве гармонические решения системы

$$\begin{aligned} &(a\delta_1 + c\gamma_1 - \beta_1)G_{1x} - (b\delta_1 + c\beta_1 + \gamma_1)G_{1y} - (a\beta_1 - b\gamma_1 + \delta_1)G_{1z} - \\ &-\alpha_1 H_{1x} - (\alpha_1 c + \delta_1)H_{1y} - (a\alpha_1 - \gamma_1)H_{1z} = \frac{\partial}{\partial n}(r^{-1}), \\ &(a\delta_2 + c\gamma_2 - \beta_2)G_{1x} - (b\delta_2 + c\beta_2 + \gamma_2)G_{1y} - (a\beta_2 - b\gamma_2 + \delta_2)G_{1z} - \\ &-\alpha_2 H_{1x} - (\alpha_2 c + \delta_2)H_{1y} - (a\alpha_2 - \gamma_2)H_{1z} = 0, \\ &(a\delta_1 + c\gamma_1 - \beta_1)G_{2x} - (b\delta_1 + c\beta_1 + \gamma_1)G_{2y} - (a\beta_1 - b\gamma_1 + \delta_1)G_{2z} - \\ &-\alpha_1 H_{2x} - (\alpha_1 c + \delta_1)H_{2y} - (a\alpha_1 - \gamma_1)H_{2z} = 0, \\ &(a\delta_2 + c\gamma_2 - \beta_2)G_{2x} - (b\delta_2 + c\beta_2 + \gamma_2)G_{2y} - (a\beta_2 - b\gamma_2 + \delta_2)G_{2z} - \\ &-\alpha_2 H_{2x} - (\alpha_2 c + \delta_2)H_{2y} - (a\alpha_2 - \gamma_2)H_{2z} = \frac{\partial}{\partial n}(r^{-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем эту систему для удобства запишем в виде

$$(A_j, \nabla G_i) + (B_j, \nabla H_i) = \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n}(r^{-1}), \quad (i, j = 1, 2), \tag{8}$$

где ∇ – оператор градиента по переменным X, скобки означают скалярное произведение, а δ_{ij} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$. В этих уравнениях X меняется во всем полупространстве E, а Y меняется на границе Γ и нормальная производная к Γ берется относительно координат точки Y.

Из уравнений (8) при $j = 2, i = 1$ следует

$$G_1(X,Y) = (B_2, \nabla\Omega), \quad H_1(X,Y) = -(A_2, \nabla\Omega), \tag{9}$$

аналогично из (8) при $j = 1, i = 2$ находим

$$G_2(X,Y) = -(B_1, \nabla\Omega), \quad H_2(X,Y) = -(A_1, \nabla\Omega). \tag{10}$$

Сначала выражения G_1 и H_1 подставим в уравнение (8) при $i = 1, j = 1$ и в результате получим для Ω следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$(A_1, \nabla T) + (B_1, \nabla R) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{11}$$

где

$$T = -\alpha_2\Omega_x - (c\alpha_2 + \delta_2)\Omega_y + (\gamma_2 - a\alpha_2)\Omega_z,$$

$$R = (\beta_2 - c\gamma_2 - a\delta_2)\Omega_x + (b\delta_2 + c\beta_2 + \gamma_2)\Omega_y + (-a\beta_2 + b\gamma_2 - \delta_2)\Omega_z.$$

Если существует гармоническое в области E решение уравнения (11), то можно построить ядра для представлений (5) и (6). Подставив (5) и (6) в (4') и устремив точку X к границе области в силу (8), получим

$$\mu_i(X) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mu_i(Y)dY\Gamma = \frac{1}{2\pi}f(X), \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

т.е. для функций имеем распадающуюся систему двух уравнений Фредгольма.

Таким образом, для выяснения возможности сведения задачи (4') к уравнениям Фредгольма необходимо построить гармоническое в полупространстве E решение уравнения (11). Для выяснения этого вопроса мы рассмотрим некоторую упрощенную систему с простыми граничными условиями.

В общем случае задача (4) мало изучена, так как при рассмотрении этой задачи появляются такие трудности, как в задаче наклонной производной для гармонических функций, а также в многомерном случае не имеется аналога теории функций комплексного переменного [2]. Теперь мы приведем отдельные частные случаи задачи (4), когда она разрешима в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций и имеет единственное решение. Для этого в системе (1) положим $a = c = 0$, и считаем, что $b \neq 0$ произвольное действительное число, то она переходит к системе

$$\begin{aligned}
&u_x + v_y + w_z = 0,\\
&s_x - v_x + w_y - bv_y - bw_z = 0,\\
&s_y + u_z - w_x + bu_z = 0,\\
&s_z - u_y + v_x + bu_z = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

и общее решение этой системы через две гармонические функции σ и ω выражается в виде:

$$\begin{aligned} &s = -\sigma_x, \\ &u = -\omega_x, \\ &v = \sigma_z - \omega_y + b\omega_z, \\ &w = -\sigma_y - b\omega_y - \omega_z. \end{aligned} \tag{14}$$

В (3) предположим, что $\alpha_1 = -1, \beta_2 = -1$, а все остальные коэффициенты равны нулю, граничные условия (4) примет особенно простой вид

$$\sigma_x = f_1, \ \ \omega_x = f_2 \ \text{ на } \ \Gamma \tag{15}$$

т.е. задача (4) распадается на две задачи о наклонной производной для гармонических функций σ и ω. При этих предположениях вектора

$$A_1 = (0,0,0), A_2 = (1,0,0), \ \ B_1 = (1,0,0), B_2 = (0,0,0)$$

Для определения Ω полученное уравнение второго порядка с частными производными (11) имеет вид

$$\Omega_{xx} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{16}$$

откуда следует, что можно положить [1]:

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial n}\{(x-\xi)ln(x-\xi) \pm [(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \mp [(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}\}$$

Знак плюс или минус выбирается так, чтобы особенности логарифма лежали вне полупространства $E : \{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z > 0\}$ в которой рассматривается функция Ω, производная берется по нормали относительно координат точки (ξ, η, ζ) и нужно требовать выпуклость области относительно направления оси Ox.

Если область E полупространство: $x > 0$, то в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций решение σ и ω выписываются явно в предположении, что функции f_1 и f_2 также стремятся к нулю на бесконечности [3]

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{x^2+(y-\xi)^2+(z-\eta)^2}},$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{x^2+(y-\xi)^2+(z-\eta)^2}}.$$

Таким образом, в этом простом случае задача (15) всегда разрешима в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций и имеет единственное решение, поэтому при $\alpha_1 = \beta_2 = 1, \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 0$ в полупространстве $x > 0$ задача (3) для системы (1) всегда разрешима и имеет единственное решение.

Список литературы

[1] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.

[2] *Янушаускас А.И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. – Новосибирск: Наука, 1986. – 261 с.

[3] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

Sultangazyeva Zh.B., Tokibetov Zh.A. Reduction Rimana-Hilbert's task for one elliptic system to system of the Fredgolm equations.

In three-dimensional semi-space Rimana-Hilbert's task for the elliptic system generalizing system, the considered A.V.Bitsadze to system of the Fredgolm equations by method Buligana-Zhiro.

Сұлтанғазиева Ж.Б., Тоқыбетов Ж.Ә. Бір эллиптикалық жүйе үшін Риман-Гильберт есебін Фредгольм теңдеулер жүйесіне келтіру.

Жалпыланған жүйеде және үш өлшемді жарты кеңістікте эллиптикалық жүйе үшін Риман-Гильберт есебін, А.В. Бицадзе қарастырған Булигано-Жиро әдісі арқылы Фредгольм теңдеулер жүйесіне келтірілген.