УДК 510.6

Таласбаева Ж.Т.
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: Zhuldyz.Talasbaeva@kaznu.kz

О главных нумерациях класса Σ_n^{-1} [1]

В статье рассмотрены некоторые семейства конструктивных объектов из иерархии Ершова, обладающие главными нумерациями.

Ключевые слова: иерархия Ершова, перечислимые множества, нумерации.

Понятия и стандартные обозначения из теории вычислимости можно найти в [1, 2]. Неопределенные понятия теории нумерации можно найти [3, 4]. Основные понятия и факты иерархии Ершова можно найти в [5].

Определение Σ_n^{-1}-множества было введено Ю.Л. Ершовым в 1968 году в [5]. В 1965 году Х. Патнем (H. Putnam) в [6] ввела определение n-вычислимо перечислимых множеств. Надо заметить, что понятия n-вычислимо перечислимых множеств и Σ_n^{-1}- множеств являются эквивалентными. Класс вычислимо перечислимых множеств образует уровень 1 в арифметической и Ершовской иерархиях. Вычислимость Σ_n^{-1}-множеств отличается от вычислимости вычислимо перечислимых множеств. В вычислимо перечис-ли-мом множестве каждый элемент перечисляется в множество по какой-то опреде-лён-ной процедуре и в дальнейшем никогда не покидает множество. В отличие от классического случая вычислимо перечислимых множеств в иерархии Ершова элемент множества может перечисляться в нем и покидать его несколько раз. В случае иерархии Ершова количество "входов-выходов"зависит от уровня иерархии, в котором рассматрива-ет-ся множество.

Главные нумерации исследуются наряду с минимальными нумерациями, ввиду того, что они также порождают экстремальные элементы в полурешетках Роджерса и являются наиболее естественными нумерациями для многих семейств вычислимо перечислимых множеств. У семейства вычислимо перечислимых множеств может сущес-тво-вать не более одной (с точностью до эквивалентности) главной нумерации. В то же время минимальных (не эквивалентных) нумераций может существовать бесконечно много.

Приведем несколько фактов, связанных с существованием главной нумерации у семейств вычислимо перечислимых множеств.

Предложение 1 *[3] Семейства всех одноместных частично вычислимых функций и всех вычислимо перечислимых множеств обладают главными вычислимыми нумерациями.*

Предложение 2 *[3] Всякое непустое ωn-подмножество семейства вычислимо перечислимых множеств является главным.*

[1] Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0726/ГФ, 2012г.-2014г.

Предложение 3 *[3] Всякое конечное семейство вычислимо перечислимых множеств является ωn-подмножеством семейства всех вычислимо перечислимых множеств.*

Предложение 4 *[3] Если вычислимое семейство одноместных вычислимых функций содержит предельную точку, семейство не имеет главной вычислимой нумерации.*

Несмотря на то, что понятие вычислимости разности перечислимых множеств было введено Ершовым Ю.Л. в 60-ые годы прошлого столетия, интенсивные исследования в этой области были начаты в конце 90-ых Гончаровым С.С., Сорби А. Следующее обобщенное определение вычислимости приведено в [7]:

Определение 1 *Нумерация $\alpha : \omega \mapsto \mathcal{A}$ семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^{-1}_n$ называется Σ^{-1}_n–вычислимой, если $\{\langle x, m\rangle : x \in \alpha(m)\} \in \Sigma^{-1}_n$.*

Мы часто используем технические критерии вычислимости в терминах функций, которые реализуют процедуры вычислений в Ершовской иерархии. Пусть $h : \omega^3 \to \{0, 1\}$ произвольная вычислимая функция. Будем говорить, что функция $\lambda th(m, x, t)$ *произвела одно колебание* на шаге $t_0 + 1$ в точке x, если $h(m, x, t_0) \neq h(m, x, t_0 + 1)$.

Предложение 5 *Пусть $\mathcal{S} \subseteq \Sigma^{-1}_n$ и $n \geq 1$. Тогда нумерация $\alpha : \omega \to \mathcal{S}$ является Σ^{-1}_n−вычислимой тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(m, x, t)$ с $\mathrm{range}(h) \subseteq \{0, 1\}$, и такая что*

(i) $h(m, y, 0) = 0$ для всех $m, y \in \omega$,

(ii) $\lim_t h(m, x, t) = \chi_m(x)$,

(iii) число колебаний $\lambda th(m, x, t)$ не превышает n,

где $\chi_m(x)$ является характеристической функцией множества αm.

Доказательство следует из определения Σ^{-1}_n–вычислимой нумерации.

Хорошо известно, что в классическом случае класса всех вычислимо перечислимых множеств, W является главной нумерацией этого класса. Более того, [3], нумерация α семейства $\mathcal{S}$ вычислимо перечислимых множеств является вычислимой тогда и только тогда, когда $\alpha \leq W$. В ершовской иерархии также получены некоторые результаты, связанные с главной нумерацией семейства множеств иерархии Ершова.

Теорема 1 *[8] Для каждого $n \geq 2$, существует Σ^{-1}_n-вычислимая главная нумерация семейства всех Σ^{-1}_n-множеств.*

Одной из важных проблем в теории нумераций является описание семейств конструктивных объектов, обладающих главными нумерациями ([3]). Для решения этой проблемы обычно используются специальные типы главных объектов, введенные Ю.Л. Ершовым в [3].

Определение 2 *Семейство $\mathcal{S} \subseteq \Sigma^{-1}_n$ называется wn-подмножеством класса Σ^{-1}_n, если существует частично вычислимая функция g такая, что выполнены следующие условия:*

1. если $x \in dom(g)$*, то* $W_{g(x)}^{-n} \in \mathcal{S}$;
2. если $W_x^{-n} \in \mathcal{S}$*, то* $x \in dom(g)$ *и* $W_x^{-n} = W_{g(x)}^{-n}$.

Нижеприведенный результат был ранее доказан для случая $n = 2$ и представлен в статье [8].

Теорема 2 *Любое конечное семейство конечных* Σ_n^{-1}*-множеств является* wn*–подмножеством класса* Σ_n^{-1}*, для каждого* $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$. По теореме 1, существует Σ_n^{-1}-вычислимая главная нумерация W^{-n} семейства всех Σ_n^{-1}-вычислимых множеств для каждого $n \geq 2$. Пусть $\{W_x^{-n,t}\}_{x,t\in\omega}$ равномерно вычислимая аппроксимация нумерации W^{-n}. Построим нумерацию V семейства $\mathcal{S}\bigcup\{\emptyset\}$ по шагам конструкции. Пусть m произвольное натуральное число.

Конструкция

Шаг 0. Пусть $V_m^0 = \emptyset$. Переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$. Рассмотрим следующие два взаимноисключающих случая.

Случай 1. Если существует $j \leq k$ такое, что $W_m^{-n,t+1} = A_j$ тогда полагаем $V_m^{t+1} = A_j$. Переходим к следующему шагу.

Случай 2. Если $W_m^{-n,t+1} \neq A_j$ для всех $j \leq k$, то полагаем $V_m^{t+1} = V_m^t$. Переходим к следующему шагу.

Свойства конструкции

1. Существует вычислимая функция f такая, что $V_m = W_{f(m)}^{-n}$ для всех $m \in dom(f)$.

Это очевидным образом следует из следствия 2 и равномерности построения.

2. Если $W_m^{-n} \in \mathcal{S}$ для некоторого m, то $m \in dom(f)$ и $W_m^{-n} = W_{f(m)}^{-n}$.

Пусть существуют $j \leq k$ и s такие, что $W_m^{-n,t} = A_j$ для всех $t \geq s$. Тогда по случаю 1 конструкции $V_m^t = A_j$. Поэтому, $W_m^{-n} = V_m = W_{f(m)}^{-n}$.

3. Для каждого m, $V_m = \emptyset$ или $V_m \in \mathcal{S}$.

Доказательство очевидно.

4. Семейство $\mathcal{S}$ является wn-подмножеством класса Σ_n^{-1}.

Если $\emptyset \in \mathcal{S}$, то полагаем $g = f$. Если $\emptyset \notin \mathcal{S}$, то через g обозначаем ограничение функции f на множестве $\{m|\exists t(V_m^t \neq \emptyset)\}$. Из свойств 3,4 следует, что функция g удовлетворяет определению 5.

Список литературы

[1] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир, 1972.

[2] *Соар Р.И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. – Казань: Казанское математическое общество, 2000.

[3] *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. - 416 с.

[4] *Badaev S.A., Goncharov S.S.* Theory of Numberings.Open Problems, P.A.Cholak (ed), Computability theory and applications. Current trends and open problems // Contemporary Mathematics. – 2000. - Vol. 257. - P. 23 – 38.

[5] *Ершов Ю.Л.* Об одной иерархии множеств I // Алгебра и логика. – 1968. - Т. 7, № 1. - С. 65–71.

[6] *Putnam H.* Trial and error predicates and the solutiuon to a problem of Mostovski // J. Symb. Logic. – 1965. - Vol. 30. - P. 49 – 57.

[7] *Гончаров С.С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. – 1997. - Т. 36, № 6. - С. 621 – 641.

[8] *Таласбаева Ж.Т.* О вычислимости семейств множеств иерархии Ершова // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика. – 2005. - № 4 (47). - С. 3-8.

Talasbaeva Zh. T. On principal numberings of Σ_n^{-1}.
In article considered some families of constructive objects from Ershov hierarchies, which have principal numberings.

Таласбаева Ж.Т. Σ_n^{-1} классының бас нөмрлеурі туралы.
Мақалада бас нөмрлеурі бар Ершов иерархиясының конструктивті объектілерінің кейбір үйірлері қарастырылған.