УДК 517.925

Тунгатаров А., Омарбаева Б. , Уаисов Б.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахская академия транспорта и коммуникаций имени М. Тынышпаева
E-mail: tun-mat@list.ru, mktugaziza@mail.ru

Задача типа Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами[1]

В работе найдено общее решение одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка и решены задачи типа Коши для этого класса.

Ключевые слова: задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения, третий порядок, переменные коэффициенты, общее решение.

Пусть $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ и $S[x_1,\, x_2]$- класс существенно ограниченных и измеримых в $[x_1,\, x_2]$ функций. Норма в $S[x_1,\, x_2]$ определяется по формуле

$$\|f\|_{S[x_1,\, x_2]} = \mathrm{supvrai}_{x\in[x_1,\, x_2]}|f(x)| = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p[x_1,\, x_2]}.$$

Рассмотрим в $[x_1, x_2]$ уравнение

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $p(x),\ f(x) \in S[x_1, x_2]$.

Решения уравнение (1) отыскиваются в пространстве

$$C^1[x_1,\, x_2] \bigcap W^1_\infty[x_1,\, x_2]. \tag{2}$$

Здесь $W^1_\infty[x_1,\, x_2]$ - класс функций $f(x)$, для которых

$$\frac{df}{dx} \in S[x_1,\, x_2].$$

Общеизвестно общее решение уравнения (1) из курса дифференциальных уравнений имеет вид

$$u(x) = c\cdot \exp(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\cdot \exp(\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau)dt, \tag{3}$$

где c -произвольное действительное число, а $x_0 \in [x_1, x_2)$.

Используя новый метод, в этой работе мы находим общее решение уравнения (1) и покажем, что оно совпадает с формулой (3). Далее, построим общее решение одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами и решим задачу типа Коши для этого класса уравнений.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0683/ГФ, 2012г.-2014г.

1 Построение общего решения уравнения (1)

Интегрируя уравнение (1), получим

$$u(x) = (Bu)(x) + g(x) + c, \tag{4}$$

где

$$(Bu)(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t)u(t)dt,\ g(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Действуя оператором B к уравнению (4), имеем

$$(Bu)(x) = (B^2u)(x) + (Bg)(x) + ca_1(x), \tag{5}$$

где

$$(B^2u)(x) = (B(Bu)(x))(x),\ \ a_1(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

Из (4) и (5) следует

$$u(x) = (B^2u) + c(1 + a_1(x)) + g(x) + (Bg)(x).$$

Продолжая эту процедуру n раз, получим интегральное представление решений уравнения (1):

$$u(x) = (B^n u)(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(B^k g)(x) + c\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x), \tag{6}$$

где

$$(B^n u)(x) = (B(B^{n-1}u)(x))(x),\ \ (B^1u)(x) = (Bu)(x), (n = \overline{2,\infty}),$$

$$a^0(x) = 1,\ \ (B^0g)(x) = g(x),\ \ a_k(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t)a_{k-1}(t)dt,\ \ (k = \overline{2,\infty})$$

Имеют место следующие, легко проверяемые неравенства

$$|(B^n u)(x)| \leq |p|_0^n |u|_0 \cdot \frac{(|x-x_0|)^n}{n!},\ |(B^k g)(x)| \leq |p|_0^k |g|_0| \cdot \frac{(|x-x_0|)^k}{k!},$$

$$|a_k(x)| \leq |p|_0^k \cdot \frac{|x-x_0|^k}{(k)!}, \tag{7}$$

где

$$|f|_0 = \sup_{x\in[x_1,\,x_2)}|f(x)|$$

Если переходим к пределу при $n \to \infty$ в (6), то с учетом (7), получим

$$u(x) = cI(x) + F(x), \tag{8}$$

где

$$I(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \;\; F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(B^k g)(x) \tag{9}$$

Покажем что, формулы (8) и (3) совпадают, то есть справедливы равенства

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\cdot \exp(\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau)dt, \;\; I(x) = \exp(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt) \tag{10}$$

Для этого интеграл, определяющий функцию $a_n(x)$, интегрируя по частям n раз, получим

$$a_n(x) = \frac{1}{n!}a_1^n(x) \tag{11}$$

Из формулы (11) и вида функций $I(x)$, следует

$$I(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^k(x)}{k!} = \exp(a_1(x)) = \exp(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt), \tag{12}$$

Докажем теперь первое равенство формул (10), то есть следующее равенство

$$\exp(a_1(x))\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(B^k g)(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\cdot \exp(-a_1(t))dt \tag{13}$$

Для этого, интегрируя по частям n раз интеграл в правой части последнего равенства, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\cdot \exp(-a_1(t))dt = \exp a_1(x)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(B^k g)(x)) - \int\limits_{x_0}^{x} p(t)(B^n g)(t)\cdot \exp(-a_1(t))dt$$

Если переходим к пределу при $n \to \infty$ в правой части этого равенства, то с учетом (7), имеем (13).

Таким образом, доказаны равенства (10).

2 Построение общего решения одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим в $[x_1, x_2]$ уравнение

$$\frac{d^3u}{dx^3} + p(x)u = f(x), \tag{14}$$

где $p(x),\ f(x) \in S[x_1,\ x_2]$.

Решения уравнения (14) отыскиваем из класса

$$C^3[x_1,\ x_2] \bigcap W^3_\infty[x_1,\ x_2.] \tag{15}$$

Здесь $W^3_\infty[x_1,\ x_2]$ - класс функций $f(x)$, для которых

$$\frac{d^3f}{dx^3} \in C[x_1,\ x_2]$$

.

Если $p(x),\ f(x) \in C[x_1,\ x_2]$, то найденные в настоящей статье общее решение и решения задач типа Коши принадлежат классу $C^3[x_1,\ x_2]$.

В работах [1-3] в явном виде найдено общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами в области $[0, x_2]$. Теперь изложенный во втором пункте метод используем для построения общего решения уравнения (14).

Трижды интегрируя уравнение (14), получим

$$u(x) = -(Bu)(x) + g(x) + c_1 + c_2(x - x_0) + c_3(x - x_0)^2, \tag{16}$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3$ - произвольные действительные числа, а $x_0 \in [x_1, x_2)$,

$$(Bu)(x) = -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2} p(t)u(t)dtdy_2dy_1,\ \ g(x) = -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2} f(t)dtdy_2dy_1$$

Действуя оператором $(B^nf)(x)$ к уравнению (16), имеем

$$(Bu)(x) = -(B^2u)(x) + (Bg)(x) + c_1a_1(x) + c_2b_1(x) + c_3d_1(x), \tag{17}$$

где

$$(B^2u)(x) = (B(Bu)(x))(x),\ \ a_1(x) = -\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2} p(t)dtdy_2dy_1,$$

$$b_1(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}(x-x_0)p(t)dtdy_2dy_1,\ \ d_1(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}(x-x_0)^2p(t)dtdy_2dy_1,$$

Из (16) и (17) следует

$$u(x)=(B^2u)(x)+c_1((x-x_0)^2+d_1(x))+c_2(x-x_0+b_1(x))+c_3(1+a_1(x))+g(x)+(Bg)(x) \quad (18)$$

Продолжая эту процедуру n раз, получим интегральное представление решений уравнения (14):

$$u(x)=(B^nu)(x)+c_1(1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(x))+c_2(x-x_0+\sum_{k=1}^{n-1}b_k(x))+$$

$$+c_3((x-x_0)^2+\sum_{k=1}^{n-1}d_k(x))+\sum_{k=0}^{n-1}(B^kg)(x), \quad (19)$$

где

$$(B^nu)(x)=(B(B^{n-1}u)(x))(x),\ \ (B^1u)(x)=(Bu)(x),(n=\overline{2,\infty}),$$

$$a_k(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}p(t)a_{k-1}(x)dtdy_2dy_1,$$

$$b_k(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}p(t)b_{k-1}(x)dtdy_2dy_1,\ d_k(x)=-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{y_2}p(t)d_{k-1}(x)dtdy_2dy_1 \quad (20)$$

Из вида функций $(B^kf)(x),\ a_k(x),\ b_k(x),\ d_k(x)$ следует

$$|(B^nu)(x)|\le|u|_0\cdot\frac{(\sqrt[3]{|p|_0}|x-x_0|)^{3n}}{3n!},\ \ |(B^kg)(x)|\le|g|_0|\cdot\frac{(\sqrt[3]{|p|_0}|x-x_0|)^{3k}}{3k!},$$

$(n=\overline{2,\infty})$

$$|a_k(x)|\le|p|_0^k\cdot\frac{|x-x_0|^{3k}}{(3k)!},\ \ |b_k(x)|\le|p|_0^k\cdot\frac{|x-x_0|^{3k+1}}{(3k+1)!},\ \ |d_k(x)|\le2|p|_0^k\cdot\frac{|x-x_0|^{3k+2}}{(3k+2)!},\ (21)$$

$(k=\overline{2,\infty})$

Если переходим к пределу при $n\to\infty$ в (19), то с учетом (21), получим общее решение уравнения (14):

$$u(x)=c_1I_1(x)+c_2I_2(x)+c_3I_3(x)+F(x), \quad (22)$$

где

$$I_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),\ I_2(x) = x - x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x),\ I_3(x) = (x - x_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x),$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (B^k g)(x).$$

Из неравенства (21)получим оценки

$$|I_1(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{(\sqrt[3]{|p|_0}|x - x_0|)^{3k}}{(3k)!},\ |I_2(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{|p|_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{(\sqrt[3]{|p|_0}|x - x_0|)^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

$$|I_3(x)| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{|p|_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{(\sqrt[3]{|p|_0}|x - x_0|)^{3k+2}}{(3k+2)!}$$

Из вида функций $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$, $F(x)$ также следует следующие полезные для решения краевых задач равенства

$$I_1'(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} p(t) I_1(t) dt dt_1,\ I_2'(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} p(t) I_2(t) dt dt_1,$$

$$I_3'(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} p(t) I_3(t) dt dt_1 \tag{23}$$

$$I_1''(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t) I_1(t) dt,\ \ I_2''(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t) I_2(t) dt,\ \ I_3''(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t) I_3(t) dt, \tag{24}$$

$$I_1'''(x) = -p(x) I_1(x),\ \ I_2'''(x) = -p(x) I_2(x),\ \ I_3'''(x) = -p(x) I_3(x), \tag{25}$$

$$F(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} f(t) dt dt_1 - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} p(t) F(t) dt dt_1,\ \ F''(x) = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} p(t) I_2(t) dt dt_1,$$

$$F'''(x) = f(x) - p(x) F(x), \tag{26}$$

$$I_2(x_0) = I_3(x_0) = I_1'(x_0) = I_3'(x_0) = I_1''(x_0) = I_2''(x_0) = I_2'''(x_0) = I_3'''(x_0) = 0,$$

$$F'(x_0) = F''(x_0) = 0,\ \ I_1(x_0) = I_2'(x_0) = 1,\ \ I_3''(x_0) = 2,\ \ I_3'''(x_0) = F''(x_0) = f(x_0). \tag{27}$$

Из (25) и (26) следует, что функции $I_1(x),\ \ I_2(x),\ \ I_3(x)$ являются частными решениями из класса (15) однородного уравнения а функция $F(x)$ - неоднородного уравнения (14). Из (27) и вида функций $I_1(x),\ \ I_2(x),\ \ I_3(x)$ следует, что вронскиан функций $I_1(x),\ \ I_2(x),\ \ I_3(x)$ отличен от нуля в точке $x = x_0$. Поэтому функций $I_1(x),\ \ I_2(x),\ \ I_3(x)$ линейно независимы в $[x_1, x_2]$ и следовательно, формула (22) определяет общее решение уравнения (14) из класса (15). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (14) из класса (15) находится по формуле (22).*

3 Задача Коши для уравнения (14)

Задача K. Требуется найти решение уравнения (14) из класса (15), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{gathered}\alpha_{11}u(x_0) + \alpha_{12}u'(x_0) + \alpha_{13}u''(x_0) = \beta_1,\\ \alpha_{21}u(x_0) + \alpha_{22}u''(x_0) + \alpha_{23}u''(x_0) = \beta_1,\\ \alpha_{31}u(x_0) + \alpha_{32}u'(x_0) + \alpha_{33}u''(x_0) = \beta_1,\end{gathered} \tag{28}$$

где $\alpha_{i,j}, \beta_i, (i, j = \overline{1, 3})$ - заданные действительные числа, $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Для решения задачи используем общее решение уравнения (14), заданное по формуле (22). Подставив функцию, заданную по формуле (10), в начальные условия (28), с учетом (27) имеем

$$\begin{gathered}c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + 2c_3\alpha_{13} = \beta_1,\\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + 2c_3\alpha_{23} = \beta_1,\\ c_1\alpha_{31} + c_2\alpha_{32} + 2c_3\alpha_{33} = \beta_1,\end{gathered} \tag{29}$$

Пусть Δ-матрица системы (29):

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

При $\Delta \neq 0$ из (29) следует

$$c_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|},\ c_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|},\ c_3 = \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|}, \tag{30}$$

где Δ_i - матрица, полученная из Δ заменой i - го столбца столбцом из свободных членов, $|\Delta|$ - определитель матрицы Δ. Если $|\Delta| = 0$, то для разрешимости системы (29) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta_3| = 0 \tag{31}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При $\Delta \neq 0$ задача К имеет единственное решение, которое находится по формулам (22) и (30). При $\Delta = 0$ для разрешимости задачи К необходимо и достаточно выполнение равенств (31). В этом случае задача К имеет бесконечное множество решений, которые находится по формуле (22), где c_1, c_2, c_3 - определяются из системы (29).*

Список литературы

[1] *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Cauchy problem for on class of ordinary differential equations // Int. Journal of Math. Analysis. – Болгария, 2012. - Vol. 6, №14. - P. 695-699.

[2] *Кашкинбаев О., Тунгатаров А.* Об одном решении уравнения Матье / Тез.докладов междунар. конф. "Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики. – Алматы, 2011. – С. 78-79.

[3] *Тунгатаров А., Ахмед-Заки Д.* Задача Коши для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия математика, информатика и механика. – 1911. – №3(70). - С. 31-35.

Tungatarov A., Omarbaeva B., Uaysov B., Cauchy problem for one class of third order ordinary differential equations.
In this article the general solution of one class of third order ordinary differential equation is received and the Cauchy problem for this class is solved.

Түнғатаров Ә., Омарбаева Б., Уаисов Б. Үшінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің бір классы үшін Коши есебі.
Мақалада үшінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің бір классының жалпы шешімі табылған және осы класс үшін Коши түріндегі есептер шешілген.