УДК 517.956

Турганбаева Ж.Н., Токибетов Ж.А.
Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби, Алматы
e-mail: turganbaeva_zhan@mail.ru

О представлениях решений эллиптических систем первого порядка через гармонические функции[1]

Найдены представления решений различных систем уравнений первого порядка, от четырех независимых переменных, обобщающих известную систему Коши-Римана, через производные двух гармонических функций и задача Римана-Гильберта сведена к задаче о наклонной производной для гармонических функций.

Ключевые слова: система Коши-Римана, задача Римана-Гильберта.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка четырех независимых переменных x, y, z и t, являющейся четырехмерным обобщением известной систем Коши-Римана:

$$\begin{aligned} &s_t - u_x - v_y - w_z = 0, \quad u_t + s_x + w_y - v_z = 0, \\ &v_t - w_x + s_y + u_z = 0, \quad w_t + v_x - u_y + s_z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где s, u, v, w – искомые функции и эта система называется Мойсила-Теодореску [1].

Эту систему можно записать одним дифференциальным уравнением, если в рассмотрение ввести кватернионнозначную функцию [2]

$$U = s + iu + jv + kw \tag{2}$$

и кватернионное дифференцирование

$$\partial_\varsigma = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

с кватернионными единицами i, j, k с обычными правилами умножения:

$$ij = -ji = k, \quad i^2 = j^2 = -1, \tag{4}$$

тогда эллиптическая система (1) эквивалентно одному дифференциальному уравнению

$$\partial_\varsigma U = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(s + iu + jv + kw) = 0, \tag{5}$$

здесь $\varsigma = t + ix + jy + kz, \quad \overline{\varsigma} = t - ix - jy - kz.$

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0683/ГФ, 2012г.-2014г.

Кватернионнозначную функцию можно представить в виде:

$$U = (s + iu) + (v + iw)j \quad \text{или;} \quad U = (s + iu) + j(v - iw),$$

а кватернионнозначное дифференцирование запишем в следующей форме:

$$\partial_\varsigma U = 2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}} + j\frac{\partial}{\partial\eta}\right)(p + qj) = 2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}} + j\frac{\partial}{\partial\eta}\right)(p + j\overline{q}), \tag{6}$$

где

$$p = s + iu, \quad q = v + iw, \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать такие операции:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\eta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{8}$$

или

$$\partial_{\overline{\varsigma}} = \partial_t - i\partial_x - j\partial_y - k\partial_z.$$

Из уравнений (6) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{\xi}} + j\frac{\partial}{\partial\eta}j\overline{q} = 0. \tag{9}$$

Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{\xi}} + \frac{1}{2}j\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z}\right)j\overline{q} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{\xi}} - \frac{\partial p}{\partial\overline{\eta}}\overline{q} = 0. \tag{10}$$

Из уравнений (6) кроме соотношения (9) имеем еще одно соотношение

$$j\frac{\partial P}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}j\overline{q} = 0$$

и преобразуя его следующим образом

$$j\frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{1}{2}j\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{\partial\overline{q}}{\partial\xi} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, для определения функций $p = s + iu$, $\overline{q} = v - iw$, получим систему уравнений (10) и (11):

$$\frac{\partial p}{\partial\overline{\xi}} - \frac{\partial\overline{q}}{\partial\overline{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{\partial\overline{q}}{\partial\xi} = 0. \tag{12}$$

Если введем в рассмотрение аналитическую функцию $\varphi = \varphi(\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta})$ всех своих аргументов $\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}$, то общее решение первого уравнения системы (12) дается формулами

$$p = \varphi_{\overline{\eta}}, \quad \overline{q} = \varphi_{\overline{\xi}}, \tag{13}$$

Подставляя (13) во второе уравнение системы (12), для функции φ получим, что она должна удовлетворить уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \overline{\xi}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \overline{\eta}} = 0.$$

Следовательно, для того чтобы формулы (13) представляли общее решение системы (12), аналитическая функция φ должна иметь (через две произвольные действительные функции σ и τ) следующий вид

$$\varphi(t, x, y, z) = \delta(t, x, y, z) + i\tau(t, x, y, z),$$

а тогда из формулы (13) имеем

$$p + j\overline{q} = \varphi_{\overline{\eta}} + j\varphi_{\overline{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta + i\tau) + \frac{1}{2}j\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta + i\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_y + i\tau_y + i\delta_z - \tau_z + j\delta_t - k\tau_t - k\delta_x - j\tau_x).$$

Так как левая часть последнего равенства

$$p + j\overline{q} = s + iu + jv + kw,$$

а в правой части $\frac{1}{2}\delta$ и $\frac{1}{2}\tau$ – гармонические функции, то их обратно обозначив теми же буквами δ и τ, получим представление решений системы (1) в виде:

$$s = \delta_y - \tau_z, \quad u = \tau_y + \delta_z, \quad v = \delta_t - \tau_x, \quad w = -\tau_t - \delta_x. \tag{14}$$

Соотношения (14) выражают решение системы (5) через производных двух произвольных гармонических функции δ и τ. С помощью этих представлений задачу Римана – Гильберта для системы (5) приведем к известной задаче о наклонной производной для двух гармонических функций.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) ставится следующим образом: требуется найти регулярное в области решение системы (1) (s, u, v, w), удовлетворяющие на границе Γ области D условиям [3]

$$a_i s + b_i u + c_i v + d_i w = f_i, i = 1, 2. \tag{15}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – заданные на Γ функции.

Теперь подставляя представления (14) решений системы (5) в (15) получаем

$$c_i\delta_i - d_i\delta_x + a_i\delta_y + b_i\delta_z - d_i\tau_t - c_i\tau_x + b_i\tau_y - a_i\tau_z = f_i, i = 1, 2. \tag{16}$$

Мы пришли к задаче о наклонной производной для гармонических функций: требуется найти регулярные гармонические в области функции δ и τ, непрерывно дифференцируемые в замкнутой области $D \cup \Gamma$, удовлетворяющие на границе Γ области D условию

$$(P, \nabla\delta) + (Q, \nabla\tau) = F, \tag{17}$$

где вектор $P = (c_i, -d_i, a_i, b_i)$, вектор $Q = (-d_i, -c_i, b_i, -a_i)$, $F = (f_1, f_2)$, ∇ – операция градиента.

Представляя гармонических функций δ и $\overline{\omega}$ в виде потенциалов простого слоя, задачу (12) можем свести к системе сингулярных интегральных уравнений. В силу того, что нет аналога аппарата теории функций комплексного переменного [3], задача (12) мало исследована, но отдельные частные случаи этой задачи (12) можно изучить различными методами [1].

Обозначим через $\Re$ множество однородных эллиптических систем p уравнений порядка s с n независимыми переменными и постоянными комплексными коэффициентами, то при $p = 2, s = 1$ и $n = 4$ в [4] доказано, что множество $\Re$ комплексных эллиптических систем имеет две компоненты связности, представителями которых служат операторы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Теперь представим решения системы эллиптических уравнений

$$\begin{aligned} &s_{x_1} - u_{x_2} + v_{x_3} - w_{x_4} = 0, \quad u_{x_1} + s_{x_2} + w_{x_3} + v_{x_4} = 0, \\ &v_{x_1} + w_{x_2} - s_{x_3} - u_{x_4} = 0, \quad w_{x_1} - v_{x_2} - u_{x_3} + s_{x_4} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} &s_{x_1} + u_{x_2} + v_{x_3} - w_{x_4} = 0, \quad u_{x_1} - s_{x_2} + w_{x_3} + v_{x_4} = 0, \\ &v_{x_1} - w_{x_2} - s_{x_3} - u_{x_4} = 0, \quad w_{x_1} + v_{x_2} - u_{x_3} + s_{x_4} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

через две гармонические функции.

Вводя в рассмотрение две комплексные функции $p = s + iu, q = v + iw$ и две комплексные переменные $\xi = x_1 + ix_2, \eta = x_3 + ix_4$, систему (19) запишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \overline{\eta}} = 0, -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \overline{\xi}} = 0. \tag{19$'$}$$

Общее решение этой системы дается через производные гармонической комплексной функции $\varphi(\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}) = \delta(x_1, x_2, x_3, x_4) + i\overline{\omega}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в виде

$$s + iu = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\xi}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(\delta + i\omega),$$

$$v + iw = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(\delta + i\omega).$$

Отсюда

$$s = \delta_{x_1} - \omega_{x_2}, \quad u = \omega_{x_1} + \delta_{x_2}, \quad v = \delta_{x_3} + \omega_{x_4}, \quad w = \omega_{x_3} - \delta_{x_4}. \tag{21}$$

Аналогично (20) записывается через комплексные функции p и q в следующей форме

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{\xi}} + \frac{\partial q}{\partial \overline{\eta}} = 0, -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \tag{20'}$$

и

$$s + iu = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(\delta + i\omega),$$
$$v + iw = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(\delta + i\omega).$$

Решение системы (20) представляется через две гармонические функции δ и $\overline{\omega}$ в виде:

$$s = \delta_{x_1} + \omega_{x_2}, \quad u = \omega_{x_1} - \delta_{x_2}, \quad v = \delta_{x_3} + \omega_{x_4}, \quad w = \omega_{x_3} - \delta_{x_4}. \tag{22}$$

Самым общим обобщением системы уравнений первого порядка от четырех переменных эллиптического типа является система

$$\begin{array}{l} s_{x_1} + u_{x_2} + b_1 v_{x_3} - b_2 w_{x_3} - b_2 v_{x_4} - b_1 w_{x_4} = 0, \\ u_{x_1} - s_{x_2} + b_2 v_{x_3} + b_1 w_{x_3} + b_1 v_{x_4} - b_2 w_{x_4} = 0, \\ v_{x_1} - w_{x_2} - kb_1 s_{x_3} - kb_2 u_{x_3} + kb_2 s_{x_4} - kb_1 u_{x_4} = 0, \\ w_{x_1} + v_{x_2} + kb_2 s_{x_3} - kb_1 u_{x_3} + kb_1 s_{x_4} + kb_2 u_{x_4} = 0. \end{array} \tag{23}$$

где $b = b_1 + ib_2$ – произвольная комплексная постоянная, $k = (b_1^2 + b_2^2)^{-1}$.

Вышеприведенным методом ее решение (s, u, v, w) представляется через две гармонические функции δ и $\overline{\omega}$ следующем виде:

$$\begin{array}{l} s = b_1(\omega_{x_4} - \delta_{x_3}) + b_2(\omega_{x_3} + \delta_{x_4}) \\ u = -b_1(\omega_{x_3} + \delta_{x_4}) + b_2(\omega_{x_4} - \delta_{x_4}) \\ v = \delta_{x_1} + \omega_{x_2}, \quad w = -\delta_{x_2} + \omega_{x_1}. \end{array} \tag{24}$$

С помощью представлений решений через две гармонические функций (14), (21),(22) и (24) можно исследовать задачу (15), приводя ее к задаче наклонной производной для двух гармонических функций для систем уравнений (1), (19),(20) и (23).

Список литературы

[1] *Янушаускас А.И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. - Новосибирск: Наука, 1985. - 261 с.

[2] *Виноградов В.С.* Об одной эллиптической системе, не имеющей нетеровых граничных задач // Докл. АН СССР. – 1971. - Т.199, №5. - С.1008-1010.

[3] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1981. - 204 с.

[4] *Шевченко В.И.* О гомотетической классификации многомерных эллиптических систем с комплексными коэффициентами // Докл. АН БССР. – 1987. - Т.XXII, №8. - С.681-683.

Turganbayeva Zh.N., Tokibetov Zh.A. About decision's representations of the first order elliptic systems through harmonious functions.

There are found representation decisions of the first order different equation systems, from four independent variables, generalizing system of Cauchy-Riemann, through derivatives of two harmonious functions and Riemann-Hilbert problem is reduced to the oblique derivative problem for harmonic functions.

Тұрғанбаева Ж.Н., Тоқыбетов Ж.Ә. Бірінші ретті эллиптикалық теңдеулер жүйесінің шешімдерін гармониялық функциялар арқылы өрнектеу.

Екі гармоникалық функциялар арқылы белгілі Коши-Риман жүйесін жалпылайтын, бірінші ретті төрт тәуелсіз айнымалыдан құралған әртүрлі теңдеулер жүйесінің шешімдерінің өрнектеуі табылған және Риман-Гильберт есебі гармониялық функция үшін көлбеу туынды есебіне келтірілген.