УДК 510.6

Нуртазин А.Т.
*Национальный государственный университет им. аль - Фараби,
Алматы, Казахстан
e-mail: abyznurtazin@mail.ru*

# Полная индуктивная теория с одной счётной экзистенциально замкнутой моделью [1]

В этой статье строится и подробно изучается полная индуктивная теория со счётным числом попарно неизоморфных счётных моделей, среди которых лишь простая является экзистенциально замкнутой. Также доказано, что в ней все главные типы определяются атомами, которые являются экзистенциальными формулами, а в классе её моделей все изоморфные вложения простой модели являются элементарными.

*Ключевые слова*: полная индуктивная теория, замкнутая модель, теория $T$.

**Исторические замечания.** Понятие экзистенциальной замкнутости вначале возникло в алгебре при решении чисто алгебраических вопросов, подобных тем, которые возникают при расширении множества натуральных чисел до группы целых чисел со сложением, расширении кольца целых чисел до поля рациональных и, наконец, при пополнении этого поля до алгебраически замкнутого. Первым обратил внимание на важность этих понятий Абрахам Робинсон. Ему же принадлежат основные рабочие понятия и первые важнейшие результаты в этой области. Отметим, что период возникновения, осмысления, развития этого направления и получения наиболее важных и классических результатов, относящихся к теории полей занял небольшой отрезок времени с 1950 по 1957 годы. Но ещё более замечательным явился тот факт, что сам основатель этой теории в 1969 году вновь оживил интерес к ней, заметив, что для конструирования экзистенциально замкнутых моделей можно применять недавно возникший в то время новый метод "вынуждения"Коэна, разработанный последним для решения наиболее трудных проблем "независимости"в теории множеств. С помощью этого метода были построены и изучены экзистенциально замкнутые модели во многих конкретных сложных классах алгебр. Регулярные исследования экзистенциально замкнутых групп предпринял А.Макинтайр, который показал их исключительную сложность и получил ряд ошеломляющих результатов в этом направлении.

Напомним, что модель $\Phi$ называется экзистенциально замкнутой в некотором классе моделей $\Omega$, если она экзистенциально замкнута в любом своём расширении $\Psi$ из этого класса. Из приведённого определения видно, что понятие экзистенциальной замкнутости изначально является в большей мере алгебраическим чем теоретико модельным. С самого начала при построении экзистенциально замкнутых моделей использовались объединения возрастающих цепей. Поэтому в теории моделей стали рассматривать

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0726/ГФ, 2012г.-2014г.

экзистенциально замкнутые модели в аксиоматизируемых классах, содержащих объединения возрастающих цепей. Такие классы полностью описаны следующей важной и красивой теоремой Лося — Сушко и в точности являются $\forall\exists$ – аксиоматизируемыми классами моделей.

**Теорема 1** *Произвольный аксиоматизируемый класс моделей замкнут относительно объединений возрастающий цепей, если и только если он* $\forall\exists$ – *аксиоматизируем.*

Отметим, что ввиду своей важности и естественности как описанные выше аксиоматизируемые классы так и их элементарные теории благодаря их основному свойству стали называться **индуктивными**.

Наряду с экзистенциальной замкнутостью другой и ещё более современной и развитой считается теория категоричности. Напомним, что первые работы в этой теории появились в середине пятидесятых годов двадцатого столетия и были посвящены описанию полных теорий, имеющих с точностью до изоморфизма единственную счётную модель. Именно изучение таких теорий и поиски синтаксических критериев счётной категоричности привели к осознанию исключительной важности в теории моделей роли понятий "атомов"и "ультрафильтров"из булевой алгебры. Следует признать, что в настоящее время все эти понятия и вопросы стали классическими в теории моделей.

В тексте наряду с предикатной сигнатурой $\Sigma$ мы часто рассматриваем её произвольные конечные подсигнатуры. При этом обычно произвольную такую конечную подсигнатуру мы обозначаем символом $\sigma$. Тогда ограничением данной модели $\Phi =< A;\ \Sigma >$ на сигнатуру $\sigma$ мы называем модель $\Phi|\sigma$, основным множеством которой является множество $A$, сигнатурой – $\sigma$, а основными отношениями – $\sigma-$отношения из модели $\Phi$. Во многих рассуждениях и доказательствах используются конечные подмножества и кортежи элементов из рассматриваемых там моделей, которые мы часто для простоты обозначаем одинаково: $\bar{a}$, $\bar{b}$, и т.д.

# 1 Структура.

Основное множество структуры $\Phi$ разбито на два счётных непересекающихся подмножества: $E(\Phi)$ и $P(\Phi)$, в первом из которых содержатся просто элементы, а во втором – красящие элементы. В свою очередь множество $P(\Phi)$ в качестве подмножеств содержит бесконечное число бесконечных попарно непересекающихся подмножеств: $P_0(\Phi), P_1(\Phi), ..., P_n(\Phi), ...$ (коробки с красящими элементами), а разность $P \setminus \cup \{P_m(\Phi) : m \in \omega\}$ также бесконечна и состоит из бесцветных красящих элементов. Бинарное отношение $F$ является отображением множества $P(\Phi)$ на множество $E(\Phi)$ и определяет процедуру окрашивания элементов из $E(\Phi)$ красящими элементами из $P(\Phi)$. При этом каждый элемент из множества $E(\Phi)$ окрашивается бесконечным числом бесцветных элементов из множества $P(\Phi)$ и бесконечным числом красящих элементов из одной из коробок $P_0(\Phi)$, $P_1(\Phi), ..., P_n(\Phi), ...$ , а для любого натурального $m$ во множестве $E(\Phi)$ имеется бесконечно много $E-$элементов, окрашенных элементами из $P_m(\Phi)$. Таким образом, нами описана некоторая счётная структура $\Phi$ сигнатуры $\Sigma = \langle F,\ E,\ P,\ P_0,\ ...,\ P_n, ..., = \rangle$. Далее нас будут интересовать свойства элементарной теории $T$ структуры $\Phi$ и строение и свойства её счётных моделей. Для начала выпишем

## 2 Аксиомы теории $T$ .

Основное множество любой модели $\Psi$ теории $T$ одноместными предикатами $E$ и $P$ разбито на два непересекающихся множества:

Акс. 1. $\forall x[[E(x) \vee P(x)]\ \&\ \neg[\neg E(x) \& \neg P(x)]]$.

Бинарное отношение $F(\Phi)$ определяет в $\Phi$ отображение из множества $P(\Phi)$ красящих элементов на множество $E-$элементов $E(\Phi)$.

Акс. 2. $\forall xy[F(x,y) \to P(x) \& E(y)]\ \&\ \forall xyz[F(x,y) \& F(x,z) \to y = z]\ \&$
$\&\ \forall x[P(x) \to \exists y F(x,y)]\ \&\ \forall y[E(y) \to \exists x F(x,y)]$.

В любой модели теории $T$ для каждого натурального числа $m \in \omega$ подмножество, выделяемое предикатом $P_m$, содержится в подмножестве, выделяемом предикатом $P$.

Акс. $3_m$. $\forall x[P_m(x) \to P(x)]$.

Все подмножества, выделяемые предикатами $P_m$, $m \in \omega$, бесконечны.

Акс. $4_{mn}$. $\exists x_0 x_1 ... x_{n-1}[[\underset{i<n}{\&} P_m(x_i)]\ \&\ [\underset{i<j<n}{\&} x_i \neq x_j]]$.

Любой $E-$элемент может быть окрашен лишь в один цвет.

Акс. $5_{m \neq n}$. $\forall xyzt[P_m(x) \& P_n(y) \& F(x,z) \& F(y,t) \to y \neq t]$

Для любого $m$ существует бесконечно много $E-$элементов, окрашенных цветными $P_m-$элементами.

Акс. $6_{mn}$. $\exists x_0 x_1 ... x_{n-1} y_0 ... y_{n-1}[[\underset{i<n}{\&} P_m(x_i)]\ \&\ [\underset{i<n}{\&} E(y_i)]\ \&\ [\underset{i<j<n}{\&} y_i \neq y_j]\ \&\ [\underset{i<n}{\&} F(x_i, y_i)]]$.

Если на некоторый $E-$элемент нанесён хотя бы один красящий $P_m-$элемент, то таких элементов бесконечно много.

Акс. $7_{mn}$. $\forall x_0 y[P_m(x_0) \& F(x_0, y) \to \exists x_1 ... x_{n-1}[[\underset{i<n}{\&} P_m(x_i)]\ \&\ [\underset{i<j<n}{\&} x_i \neq x_j]\ \&\ [\underset{i<n}{\&} F(x_i, y)]]]$

Если на некоторый $E-$элемент нанесены красящие элементы из множества $P_m$, $m \in \omega$, то на него также наносится бесконечно много бесцветных элементов из $P$.

Акс. $8_{mn}$. $\forall yz\ [P_m(y) \& F(y,z) \to \exists x_0 x_1 ... x_{n-1}[[\underset{i<j<n}{\&} x_i \neq x_j] \& [\underset{i<n}{\&} \neg P_m(x_i)] \& [\underset{i<n}{\&} F(x_i, z)]]$.

## 3 Свойства теории $T$ и её моделей.

Теперь изучим некоторые свойства и теории $T$, заданной аксиомами Акс. 1 – Акс. 8., и её счётных моделей. Во первых непосредственно из записи видно, что все её аксиомы приводятся к пренексной форме с кванторной приставкой вида $\forall\exists$. Следовательно

$1^o$. *Теория $T$ индуктивна.*

Пусть $\Psi$ произвольная счётная модель теории $T$. Из теоремы компактности следует, что во множестве $E(\Psi)$ могут быть элементы, покрашенные лишь бесцветной краской. Непосредственная проверка показывает, что таких элементов может оказаться любое конечное число или бесконечно много. Пусть $\Psi_n$ — модель теории $T$, содержащая в точности $n$ $E-$элементов, окрашенных бесцветной краской, а в $\Psi_\omega$ таких $E-$элементов — счётное число. Тогда очевидно $\Psi_0 = \Phi$. С другой стороны методом конечных изоморфизмов Фраиссе легко показывается элементарная эквивалентность всех этих моделей и элементарность цепочки: $\Psi_0 \prec \Psi_1 \prec ... \prec \Psi_n \prec ... \prec \Psi_\omega$. Таким образом нами получено следующее свойство теории $T$

$2^o$. *Индуктивная теория $T$ полна и имеет счётное число типов изоморфизмов счётных моделей. При этом любая её модель изоморфна одной из моделей элементарной цепочки $\Phi \prec \Psi_1 \prec ... \prec \Psi_n \prec ... \prec \Psi_\omega$, в которой для любого натурального $n$ в модели $\Psi_n$ содержится в точности $n$ $E-$элементов, окрашенных лишь бесцветной краской.*

Для любых двух $E-$элементов $e_1$ и $e_2$ из счётной модели $\Psi_n$, $n > 1$, окрашенных лишь бесцветной краской, имеется автоморфизм этой модели, переводящий $e_1$ в $e_2$. Следовательно элементарные и экзистенциальные типы этих элементов совпадают. С другой стороны, изоморфный, элементарный и экзистенциальный типы любого $E-$элемента из этой модели, окрашенного некоторой цветной краской $P_m$, изолируются формулой $E_m(\bar{x}) \equiv \exists y[P_m(y)\&F(y,x)]$. Кроме того экзистенциальный тип $t_m(x)$ этого окрашенного элемента оказывается больше экзистенциального типа бесцветного и, очевидно, максимален. Хорошо известно, что индуктивная теория $T$ имеет экзистенциально замкнутые модели. Так как все модели $\Psi_n$, $n > 0$, содержат элементы, окрашенные бесцветными красками, экзистенциальные типы которых не являются максимальными, то по третьему критерию экзистенциальной замкнутости единственной экзистенциально замкнутой моделью рассматриваемой теории $T$ оказываются наша стартовая модель $\Phi = \Psi_0$. Таким образом нами доказано, что

$3^o$. *Полная индуктивная теория $T$ имеет с точностью до изоморфизма одну счётную экзистенциально замкнутую модель $\Phi$, которая является простой моделью этой теории.*

В простой модели $\Phi$ элементарный тип любого $n-$элементного кортежа $\bar{a}$ главный и определяется некоторым $n-$атомом $\varphi(\bar{x})$. Завершая изучение свойств теории $T$, методом математической индукции мы хотим показать, что в ней любой $n-$атом эквивалентен некоторой экзистенциальной формуле от $n$ переменных — $\varphi(\bar{x})$. По отображению $F$ на множестве $P(\Phi)$ $\exists-$формулой $\exists z[F(x,z)\&F(y,z)]$ определяется эквивалентность $\Theta(x,y)$, а формулой $\exists zt[z \neq t\&F(x,z)\&F(y,t)]$ — её отрицание $\neg\Theta(x,y)$. При этом в модели $\Phi$ каждый смежный класс по эквивалентности $\Theta$ содержит бесконечное подмножество из цветных красящих элементов из одного из подмножеств $P_m(\Phi)$ и бесконечное число бесцветных элементов из $P(\Phi)$, выделяемых в ней $\exists-$формулой $Q_m(x) \equiv [P(x) \ \& \ \neg P_m(x) \ \& \ \exists y \ [E_m(y) \ \& \ F(x,y)]]$.

Символом $\Delta$ обозначим объединение множества всех атомарных формул исходной теории $T$ (все они с точностью до переменных имеют вид:

$$E(x),\ P(x),\ P_0(x),\ ...,\ P_m(x),\ R(x,y),\ ...$$

с множеством всех введённых выше $\exists-$формул

$$\{\Theta(x,y),\ \neg\Theta(x,y),\ E_0(x),\ ...,\ E_m(x),\ ...,\ Q_0(x),\ ...,\ Q_m(x),\ ...\}$$

Напомним, что $\Delta-$типом кортежа $\bar{a} = \langle a_0, ..., a_{n-1}\rangle$ из модели $\Phi$ называется множество всех $\Delta-$формул или отрицаний $\Delta-$формул от переменных $x_0, ..., x_{n-1}$, истинных в этой модели на кортеже $\bar{a}$ .

*На самом деле при изучении $\Delta-$типов кортежей существенным обычно оказывается случай, когда в рассматриваемом кортеже все координаты различны. Очевидно что, если для произвольного множества формул $\Delta$, включающего равенство, $\Delta-$типы двух данных кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают, то для подкортежа $\bar{a}^0$, включающего все различные координаты кортежа $\bar{a}$, кортеж $\bar{b}^0$, составленный из соответствующих координат кортежа $\bar{b}$, имеет тот же $\Delta-$тип, что и $\bar{a}^0$. Наоборот, если для $\Delta^0 = \{=\}$ совпадают $\Delta^0-$типы кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и подкортеж $\bar{a}^0$ кортежа $\bar{a}$, состоящий из всех его различных координат, имеет тот же $\Delta-$тип, что и подкортеж $\bar{b}^0$ кортежа $\bar{b}$, составленный из тех же координат, что и $\bar{a}^0$, то $\Delta-$типы самих кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ также совпадают. Поэтому всюду в дальнейшем без специальных оговорок предполагается, что рассматриваемые кортежи состоят из разных элементов.*

Теперь более подробно опишем $\Delta-$тип произвольного кортежа $\bar{a} = \langle e_0, ..., e_{i-1}, b_0, ..., b_{j-1}, c_0, ..., c_{k-1}\rangle$, где $e_0, ..., e_{i-1}$ — $E-$элементы, окрашенные цветными элементами из множеств $P_{m_0}(\Phi), ..., P_{m_{i-1}}(\Phi)$, $b_0, ..., b_{j-1}$ — цветные элементы из множеств $P_{n_0}(\Phi), ..., P_{n_{j-1}}(\Phi)$ и $c_0, ..., c_{k-1}$ — бесцветные элементы из множеств $Q_{s_0}(\Phi), ..., Q_{s_{k-1}}(\Phi)$. Так как множество $\Delta$ состоит только из формул от одной и двух переменных, то $\Delta-$тип этого кортежа оказывается равным теоретико-множественному объединению $\Delta-$типов его элементов и содержащихся в нём упорядоченных пар. Всё основное множество модели $\Phi$ состоит из $E-$элементов и $P-$элементов. При этом любой $E-$элемент $a$ в модели $\Phi$ удовлетворяет некоторой формуле $E_m(x)$. Но в этом случае на нём не выполняются остальные $\Delta-$формулы от одной переменной: $E_n(x),\ n \neq m,\ P_n(x),\ Q_n(x)\ n \in \omega$. С другой стороны на любом $P-$элементе $a$ в модели $\Phi$ для некоторого $m$ выполняется одна из формул $P_m(x)$ или $Q_m(x)$. Если имеет место $\Phi \models P_m(a)$, то на элементе $a$ не выполняются формулы: $E_n(x)$, $Q_n(x)$, $n \in \omega$ и $P_n(x)$, $n \neq m$. Аналогично, в случае $\Phi \models Q_m(a)$ на элементе $a$ не выполняются формулы: $E_n(x)$, $P_n(x)$, $n \in \omega$ и $Q_n(x)$, $n \neq m$. Таким образом, нами доказано, что $\Delta-$тип любого элемента модели $\Phi$ полностью определяется в точности одной истинной на нём позитивной $\Delta-$формулой, которая является $\exists-$формулой исходной сигнатуры. Теперь рассмотрим $\Delta-$типы упорядоченных пар $\langle a, b\rangle$ различных элементов модели $\Phi$. Заметим, что $\Delta-$тип любой упорядоченной пары полностью определяется $\Delta-$типами пары её координат и всеми двухместными и отрицаниями двухместных формул из множества $\Delta$, выполняющимися на паре $\langle a, b\rangle$. Если $a$ и $b$ являются $E-$элементами и удовлетворяют различным формулам $E_m(x)$ и $E_n(y)$ , то на паре $\langle a, b\rangle$ не выполняются $\Delta-$формулы $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$. То есть в этом случае конъюнкция $E_m(x)\&E_n(y)$ этих формул, которая является $\exists-$формулой исходной сигнатуры, полностью определяет $\Delta-$тип упорядоченной пары $\langle a, b\rangle$. Если же элементы $a$ и $b$ удовлетворяют одной и той же $\Delta-$формуле $E_m(x)$, то упорядоченная пара $\langle a, b\rangle$ не удовлетворяет тем же $\Delta-$формулам $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$, и $\Delta-$тип упорядоченной пары $\langle a, b\rangle$ определяется формулой $E_m(x)$ & $E_n(y)$ & $x \neq y$, которая опять оказывается эквивалентной экзистенциальной формуле исходной сигнатуры. Теперь рассмотрим $\Delta-$тип упорядоченной пары $\langle a, b\rangle$, где $a$ является $P-$элементом , а $b$ — $E-$элементом. В этом случае в модели $\Phi$ для некоторых $m$ и $n$ выполняется $\Phi \models [P_m(a) \vee Q_m(a)]\&E_n(b)$. Если при этом $m \neq n$, то на упорядоченной паре $\langle a, b\rangle$ очевидным образом не выполняются $\Delta-$формулы $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$. Если же $m = n$, то $\Delta-$тип пары $\langle a, b\rangle$ полностью определяется одной из формул $F(x, y)$ или $\neg F(x, y)$, выполняющейся на ней, которая является бескванторной и, следовательно, $\exists-$формулой исходной сигнатуры. Теперь нам остаётся рассмотреть последний представляющий интерес случай, когда обе координаты пары $\langle a, b\rangle$ являются $P-$элементами. В этом случае, ввиду симметрии, можно ограничиться рассмотрением подслучаев, когда элементы $a$ и $b$ для некоторых различных натуральных $m$ и $n$ удовлетворяют формулам $P_m(x)$ и $P_n(y)$ и подслучаем, когда для одного и того же натурального $m$ выполняется $\Phi \models P_m(a)\&Q_m(b)$. Пусть $\Phi \models P_m(a)\&P_n(b)$ и $m \neq n$. Тогда на паре $\langle a, b\rangle$ выполняется формула $\neg\Theta(x, y)$ и не выполняются $\Delta-$формулы $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$. То есть $\Delta-$тип пары определяется именно формулой $P_m(x)\&P_n(y)$. Если же $\Phi \models P_m(a)\&Q_m(b)$, то на паре $\langle a, b\rangle$ выполняется одна из $\Delta-$формул $\Theta(x, y)$ или $\neg\Theta(x, y)$. Но тогда $\Delta-$тип пары $\langle a, b\rangle$ определяется одной из формул: $P_m(x)\&Q_m(y)\&\Theta(x, y)$ или $P_m(x)\&Q_m(y)\&\Theta(x, y)$, которые являются конъюнкциями $\Delta-$формул и, следовательно, эквивалентны $\exists-$формулам исходной сигнатуры. (Заметим, что в симметричных рассмотренным подслучаях: $\Phi \models P_m(a)\&Q_n(b)$, $\Phi \models Q_m(a)\&Q_n(b)$, $m \neq n$ и $\Phi \models P_m(a)\&P_m(b)$, $\Phi \models Q_m(a)\&Q_m(b)$ $\Delta-$типы пары $\langle a, b\rangle$ также определяются $\exists-$формулами исходной сигнатуры.)

Напомним, что нашей конечной целью является доказательство того, что в модели $\Phi$ элементарный тип любого $n-$элементного кортежа $\bar{a}$ определяется некоторым $n-$атомом $\varphi(\bar{x})$, который является $\exists-$формулой. Очевидно цель будет достигнута, если мы докажем, что в модели $\Phi$ для любого натурального $n$ покоординатное соответствие между $n-$элементными кортежами $\bar{a}$ и $\bar{a}'$, сохраняющее все $\Delta-$формулы, может быть продолжено до автоморфизма самой модели. Нетрудно видеть, что искомый автоморфизм может быть выстроен с помощью обычной перекидки, если будет доказано, что двух любых покоординатно $\Delta-$изоморфных кортежей $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ призвольной одинаковой длины $n$ и произвольного элемента $a$ в модели $\Phi$ можно найти элемент $a'$ такой, что $\Delta-$изоморфизмом оказывается покоординатное соответствие между расширенными кортежами $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$.

Пусть элемент $a$ не принадлежит кортежу $\bar{a}$, $\Delta-$тип которого совпадает с $\Delta-$типом другого кортежа $\bar{a}'$. Если $a$ является $E-$элементом, то для некоторого натурального $m$ выполняется $\Phi \models E_m(a)$ и $\Delta-$тип расширенного кортежа $\bar{a}a$ определяется $\Delta-$типом его подкортежа $\bar{a}$, формулой $E_m(x)$, истинной на $a$, и множеством формул
$\{F(x_i, x):\ a_i \in |\bar{a}| \cap [P_m(\Phi) \cup Q_m(\Phi)]\}$. В этом случае все элементы из множества
$\{a_i \in |\bar{a}| : F(a_i, a)\}$ $\Theta-$эквивалентны между собой. И, следовательно, соответствующие им элементы из кортежа $\bar{a}'$ также оказывается $\Theta-$эквивалентными. Но тогда с помощью $F$ все они отображаются в некоторый элемент $a'$, для которого выполняется $\Phi \models E_m(a')$ и $\Phi \models F(a_i', a')$, если и только если $\Phi \models F(a_i, a)$. Поэтому $\Delta-$типы расширений $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$ совпадают и элемент $a'$ является искомым.

Если же элемент $a$ из $\Phi$ удовлетворяет формуле $P(x)$, то он принадлежит одному из попарно непересекающихся множеств $P_m(\Phi) \cup Q_m(\Phi)$, $m \in \omega$. Если при этом для некоторого $a_i$ из $\bar{a}$ выполняется $\Phi \models F(a_i, a)$, то в качестве элемента $a'$ мы выбираем произольный элемент из разности $P(\Phi) \diagdown |\bar{a}'|$, удовлетворяющий условиям: $\Phi \models F(a', a_i')$ и $\Phi \models P_m(a) \leftrightarrow P_m(a')$. Тогда по второму из этих условий $\Delta-$типы элементов $a$ и $a'$ совпадают. Для единственного элемента $a_i$ из $\bar{a}$ с условием $\Phi \models F(a, a_i)$ в кортеже $\bar{a}'$ соответствующий ему элемент $a_i'$ также удовлетворяет условию $\Phi \models F(a', a_i')$. Так как все $P-$элементы из $\bar{a}$, $\Theta-$эквивалентные $a$, отображением $F$ наносятся на элемент $a_i$, то именно соответствующие им элементы из $\bar{a}'$ отображаются на элемент $a_i'$ и оказываются $\Theta-$эквивалентными элементу $a'$. Следовательно $\Delta-$типы кортежей $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$ одинаковы. Если же в кортеже $\bar{a}$ нет элемента $a_i$ с условием $\Phi \models F(a, a_i)$, но имеется некоторый $P-$элемент $a_j$, $\Theta-$эквивалентный элементу $a$, то в качестве $a'$ подойдёт любой $P-$элемент из $P(\Phi) \diagdown |\bar{a}'|$; с условиями $\Theta(a, a_j)$ и $P_m(a) \leftrightarrow P_m(a')$. В этом подслучае при проверке $\Delta-$изоморфизма кортежей $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$ сохранение формулы $\Theta(x, y)$ следует непосредственно из выбора элемента $a'$, а другая двухместная формула $F(x, y)$ в модели $\Phi$ одновременно не выполняется ни на парах вида $\langle a, a_i \rangle$ ни на парах вида $\langle a', a_i' \rangle$ . Проведённое рассуждение показывает, что и в этом случае $\Delta-$типы кортежей $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$ совпадают. В последнем не рассмотренном подслучае элемент $a$ двухместными формулами $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$ не связан ни с одним элементом из кортежа $\bar{a}$. Тогда непосредственно из определения модели $\Phi$ следует существование в ней $P-$элемента $a'$ с условием $P_m(a') \leftrightarrow P_m(a)$, не связанного формулами $F(x, y)$ и $\Theta(x, y)$ ни с одним элементом из $\bar{a}'$. Очевидно, что тогда $\Delta-$типы кортежей $\bar{a}a$ и $\bar{a}'a'$ совпадают. Этим заканчивается доказательство следующего интересующего нас свойства теории $T$.

$4^o$. *Все атомы теории $T$ являются экзистенциальными формулами.*

В заключение мы хотели бы отметить ещё одно свойство модели $\Phi$, непосредственно вытекающее из только что доказанного.

$5^o$. *Модель* $\Phi$ *элементарно замкнута в своей теории* $T$ *в том смысле, что все её обычные расширения, элементарно эквивалентные ей, на самом деле являются элементарными.*

Для доказательства предположим, что модель $\Psi$ теории $T$ является изоморфным расширением модели $\Phi$. Покажем, что на самом деле включение $\Phi \leq \Psi$ является элементарным — $\Phi \prec \Psi$. По определению для этого нам необходимо показать, что для любой формулы $\varphi(\bar{x})$, выполняющейся в модели $\Phi$ на некотором $n-$элементном кортеже $\bar{a}$, эта же формула выполняется на нём и в модели $\Psi$. Из предыдущего свойства следует, что найдётся некоторый $n-$атом $\varphi_n(\bar{x})$ теории $T$ такой что выполняется $\Phi \models \varphi_n(\bar{a})$. Тогда формулы $\varphi(\bar{x})$ и $\varphi_n(\bar{x})$ совместны в теории $T$ и по определению атомности выполняется $T \vdash \forall\bar{x}[\varphi_n(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})]$. Если экзистенциальная формула $\varphi(\bar{x})$ имеет вид: $\exists\bar{x}'\ \psi(\bar{x},\bar{x}')$, где подформула $\psi(\bar{x},\bar{x}')$ не содержит кванторов, то для некоторого $\bar{a}'$ из $\Phi$ выполняется $\Phi \models \psi(\bar{a},\bar{a}')$. Но тогда ввиду включения $\Phi \prec \Psi$ следует $\Psi \models \psi(\bar{a},\bar{a}')$, $\Psi \models \exists\bar{x}'\ \psi(\bar{a},\bar{x}')$ и $\Psi \models \varphi_n(\bar{a})$. Так как при этом модель $\Psi$ является моделью теории $T$ , то выполняется $\Psi \vdash \forall\bar{x}[\varphi_n(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})]$ и $\Psi \models \varphi(\bar{a})$. Этим доказано, что включение $\Phi \leq \Psi$ на самом деле является элементарным.

из предыдущего вытекает последнее свойство модели

**Замечание.** *По критерию элиминации кванторов из [7] множество* $\Delta$ *образует систему булевых порождающих теории* $T$. *Этот факт можно использовать для получения другого более короткого доказательства четвёртого свойства.*

## Список литературы


[1] *Robinson A., On the Metamathematics of Algebra. – Amsterdam: North – Holland, 1951.*

[2] *Robinson A., Infinite forcing in model theory // Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium. – Amsterdam: North – Holland, 1971. - P. 317 - 340.*

[3] *Macintyre A., Omitting quantifier-free types in generic structures // Journ. of Symbolic Logic. – 1972. N 37. - P. 512 – 520.*

[4] *Saracino D., Model companion for* $\aleph_0-$*categorical theories // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. - N 78. - P. 591 – 598.*

[5] *Simmons H. Existentially closed structures // The Journal of Symbolic Logic. – 1972. - Vol. 37, N 2.*

[6] *Ершов Ю.Л., Об элементарных теориях максимальных полей // ДАН СССР. – 1965, № 165. - С. 1390 - 1393.*

[7] *Нуртазин А.Т.,* Элиминация кванторов и проблемы разрешимости элементарных теорий // Известия АН КазССР, сер. физ.-мат. – 1986. - № 1. - С. 51-54.

[8] *Нуртазин А.Т.,* Базисные совокупности и два вопроса в теории булевых алгебр // Известия АН КазССР, сер. физ.-мат. – 1986. - № 3. - С. 33-36.

[9] *Справочная книга по математической логике: в 4 частях / под ред. Дж.Барвайса. – М.: Наука, 1982. - Ч.1. - С. 141 - 182.*

[10] *Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. - М.: Мир, 1977.*

*Nurtazin A.T.Complete inductive theory with one countable existentially closed model.*
This article is constructed and studied in detail a complete inductive theory with a countable number of pairwise nonisomorphic countable models, among which is a simple existentially closed. It is also proved that it determined all of the major types of atoms, which are existential formulas, and in a class all its models are isomorphic embedding a simple model are elementary.

*Нуртазин А.Т. Жалгыз саналымды экзистенциалды молельдің толық индуктивті теориясы*

Бұл мақалада қарапайым экзистенциалды тұйықталған изоморфты емес саналымды модельдері бар толық индуктивті теория құрылып, зерттелген. Сонымен қатар, экзистенциалды формула болатын басшы типтер атомдармен анықталады, ал модельдер класында барлық қарапайым модельдің изоморфты еңгізулері элементар еңгізулері болады.