УДК 523.24:521.1

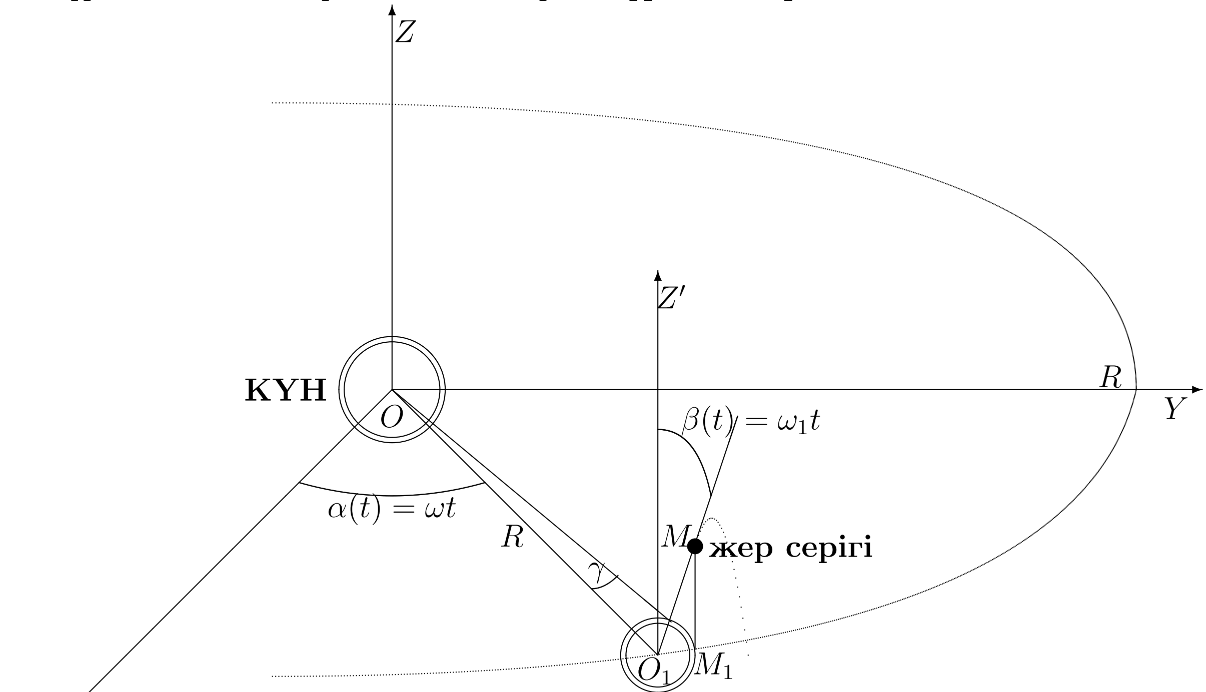
Катеков Е.
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Кеңістіктегі қисықтың тағы бір түрі және оның математикасы

Мақалада кеңістіктегі қисық, жер серігінің жерді, жермен бірге күнді айналғандағы жолының бір түрі, зерттеледі. Сол қисықтың теңдеуі жазылып, жүрген жолының ұзындығының формуласы көрсетіледі.

Кілті сөздер: Жер спутнигінің траекториясы, қисық теңдеуі.

Алдыңғы [1, 2] мақалада кеңістіктегі дәл бұрынғы орнына болмаса да сол маңға қайта бұралып келіп отыратын қисықтарды **бұралқылар** деп атағанбыз.



Айналу осі түзу болмай қисық болып келетін бұралқыларды **бұралқы торлар** деп атаймыз. Сол мақалада жер күнді, жер серігінің жерді айналуынан шығатын, әр қашанда күн, жер, жер серігі бір жазықтықта жататын жағдайдағы бұралқы тордың математикалық теңдеулерін жазған болатынмын. Бұл жер серігінің ең тұрақты траекториясы (жолы) еді.

Енді алдыңғы траекторияға қарағанда тұрақсыздау, бірақ одан басқа жер серігінің траекторияларына қарағанда тұрақтырақ болатын екінші жағдайды қарастырайық.

Бұл жағдайда әр қашанда жер және жер серігі айналу осі OZ, радиусы R-ге тең болатын цилиндрлік бетте қозғалады. Жер серігінің қозғалысы (траекториясы) дөңгелек бұралқы тор болады. Оның бір ерекшелігі бұралу осі және бұралымдары жоғарыда көрсетілген цилиндрлік бетте жатады. Алыстауы 0, ауытқуы тұрақты шама. Енді осы бұралқының теңдеуін іздеуге кіріселік.

Алдымен O_1 нүктесінің (жердің) координаттарын жазып алайық.

$$\left\{\begin{array}{l} X_{O_1} = R\cos\alpha \\ \\ Y_{O_1} = R\sin\alpha \\ \\ Z_{O_1} = 0 \end{array}\right\}$$

Төмендегі суретті пайдалана отырып,

Жер серігінің, M нүктесінің, координаттарын табайық.

Жердің күнді айналу α бұрышына жер серігінің жерді айналуынан пайда болған γ бұрышы қосылып немесе алынып отырады. Енді сол γ бұрышын іздестірейік. Жер серігі R_1 болатын шеңбер бойымен қозғалып OZ осімен β бұрышын жасады делік. Онда O_1M кесіндісінің xOy жазықтығындағы проекциясы $R_1\sin\beta$ болады. M нүктесінің xOy жазықтығындағы проекциясы M_1, онда $|O_1M_1|^2 = R_1\sin\beta$. OO_1M үшбұрышынан косинустар теоремасы бойынша $|O_1M_1|^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\gamma$.

Бұдан $\gamma = \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R}\right)^2\sin^2\beta\right]$ болатынын білеміз. Онда іздеп отырған қисығымыздың (жер серігінің) траекториясының теңдеуі мынандай болады:

$$\left\{\begin{array}{l} X_m = R\cos\left\{\alpha + \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R}\right)^2\sin^2\beta\right]\right\} \\ \\ Y_m = R\sin\left\{\alpha + \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R}\right)^2\sin^2\beta\right]\right\} \\ \\ Z_m = R_1\cos\beta \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Бұл іздеп отырған траекториямыздың дәл теңдеуі, бірақ мұндағы $\gamma = \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\right.$ $\left.\cdot\left(\frac{R_1}{R}\right)^2\sin^2\beta\right]$ өте күрделі болып отыр. Енді оны ықшамдау жолын іздестірейік. OO_1M үшбұрышынан синустар теоремасы бойынша

$$\frac{\sin\gamma}{|O_1M_1|} = \frac{\sin\dfrac{180^o - \gamma}{2}}{R} \to \frac{\sin\gamma}{\cos\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{|O_1M_1|}{R} \to \frac{2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{R_1\sin\beta}{R} \to$$

Бұдан

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{R_1}{2R}\sin\beta.$$

Ал енді $\sin\dfrac{\gamma}{2}$-ны Тейлер қатарына жіктейік:

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5-\dots$$

Осы жіктеуді пайдалана отырып мынандай теңдік аламыз

$$\gamma-\frac{R_1}{R}\sin\beta=2\left[-\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5-\dots\right]$$

Мұндағы γ өте аз шама, оның үстіне егер γ-ны жуықтап $\dfrac{R_1}{R}\sin\beta$ға тең деп алсақ, біздің жіберетін қатеміз $\left(\dfrac{R_1}{R}\right)^3$ пен шамалас болады (мұндағы R күн мен жердің арақашықтығы, R_1 жер серігінің жерді айналу радиусы). Бұл өте аз шама. Оны ескермесек $\gamma=\dfrac{R_1}{R}\sin\beta$ деп алуға болады. Онда (*) теңдеуіміз мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} X_m=R\cos\left(\alpha+\dfrac{R_1}{R}\sin\beta\right)\\ Y_m=R\sin\left(\alpha+\dfrac{R_1}{R}\sin\beta\right)\\ Z_m=R_1\cos\beta\end{cases}\qquad(**)$$

(**) теңдеуі (*) теңдеуіне қарағанда зерттеуге әлде қайда ықшамды теңдеу болып шықты.

Енді осы теңдеуі жазылған қисықтың ұзындығын есептеу формуласын қарастырайық.

$$l=\int ds=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=$$

$$=\int\sqrt{\left[\left(R\cos\left(\alpha(t)+\frac{R_1}{R}\sin\beta(t)\right)\right)'dt\right]^2+\left[\left(R\sin\left(\alpha(t)+\frac{R_1}{R}\sin\beta(t)\right)\right)'dt\right]^2+\left[(R_1\cos\beta(t))'dt\right]^2}=$$

$$=\int\sqrt{(R\alpha'+R_1\beta')^2-2RR_1\alpha'\beta'(1-\cos\beta)'\,dt}$$

Бұдан R-ді түбірден шығарып, α мен βні жердің күнді және жер серігінің жерді айналу бұрыштық жылдамдықтары ω, ω_1 арқылы жазсақ (онда $\alpha(t)=\omega t$, $\beta(t)=\omega_1 t$), онда t_1-ден t_2-ге дейін жүрген жолдың мынандай формуласын аламыз:

$$\boxed{l=R\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\omega+\frac{R_1}{R_2}\omega_1\right)^2-2\frac{R_1}{R_2}\omega\omega_1(1-\cos\omega_1 t)dt}}$$

Әдебиетер тізімі

[1] *Катеков Е.* Бұралқылар және олардың математикасы // Зерттеу университеттері: өзге тілді оқытудың инновациясы. – 2011. - Б.123, 124, 125.

[2] *Катеков Е.* Жер серігінінің жерді айналу жолы туралы // ҚазҰУ хабаршысы, физика сериясы. – Алматы, 2011. - № 4 (39). - Б. 76, 77, 78.

Katekov E. One form of the curve in space and its mathematics.
In this paper we study the trajectory of a satellite rotating around the Earth and the Sun. An equation of this curve and the formula that calculates the length of the traversed path is represented.

Катеокв Е. Один вид кривой в пространстве и ее математика.
В статье исследуется один вид траектории спутника Земли при вращении вокруг Земли и Солнца. Приводится уравнение этой кривой и формула, по которой вычисляется длина пройденного пути.