УДК 517.958

С.А. Айсагалиев, А.М. Аязбаева
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К построению оптимального фильтра для случайных процессов

В работе рассматривается обобщенное интегральное уравнение оптимального фильтра Винера - Колмогорова для нестационарных случайных процессов и построение линейного оптимального фильтра для общего случая. Предлагается метод решения интегрального уравнения относительно весовой матрицы. Получено необходимое и достаточное условие существования решения интегрального уравнения. Найдено общее решение интегрального уравнения. В качестве приложение приведен метод построения фильтра Калмана - Бьюси.

Ключевые слова: теория фильтрации, матричное интегральное уравнение, оптимальный фильтр, случайные процессы.

С.Ә. Айсағалиев, Ә.М. Аязбаева

Кездейсоқ процесстер үшін тиімді фильтрдің құрылуына

Бұл жұмыста стационар емес кездейсоқ үдерістер үшін Винер - Колмогоров тиімді фильтрінің жалпыланған интегралдық теңдеулері мен жалпы жағдай үшін сызқты тиімді фильтрдің құрылуы қарастырылады. Салмақ матрицасына қатысты интегралдық теңдеулерді шешу әдісі ұсынылады. Интегралдық теңдеулердің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Интегралдық теңдеулердің жалпы шешімі табылған. Қосымша ретінде Калман - Бьюси фильтрін құру әдісі келтірілген.

S.A. Aisagaliev, A.M. Ayazbayeva

To construction of an optimal filter for random processes

We consider the generalized integral equation of optimal filter of Wiener- Kolmogorov for nonstationary random processes. Solvability and construction of the general solution of a generalized integral equation remains an unsolved problem. In this paper we propose a method for solving an integral equation in the weight matrix. A necessary and sufficient condition for the existence of a solution of the integral equation is obtained. General solution of the integral equation is found.

The case where the desired random process which is a solution of the stochastic differential equation, and the equation of the optimal filter is linear equations with unknown matrices. The parameters of the optimal linear filter are defined. A new method of constructing an optimal filter for diffusion processes is supposed. Arose from the need to practice optimal filters Kalman - Bucy are one of the best results in the theory of optimal filtering. However, the

solution of the matrix Riccati equation is difficult, and it can be solved only by approximate methods. Therefore it is interested to develop a new method for the optimal filtering of diffusion processes.

Теория фильтрации случайных процессов берет свое начало из работ Н. Винера [1] и А.Н. Колмогорова [2]. Одна из задач оптимальной фильтрации имеет следующую формулировку.

Пусть n – мерный случайный процесс $y(t), t \geq t_0$ порождается m – мерным случайным процессом $z(t), t \geq t_0$ согласно соотношению

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)z(\tau)d\tau, \quad t > t_0, \tag{1}$$

где $a_i(t,\tau)$ – детерминированная матрица порядка $n \times m$, $y(t_0) = 0$. Формула (1) определяет реализацию случайного процесса $y(t)$ соответствующего реализации случайного процесса $z(t)$.

Пусть $x(t), t \geq t_0 - n$ - мерный желаемый случайный процесс. Известно что:

$$\begin{array}{l} M[x(t)] = 0, K_{xx}(\tau,\sigma) = M[x(\tau)x^*(\sigma)], M[z(t)] = 0, \\ K_{xz}(\tau,\sigma) = M[x(\tau)z^*(\sigma)], K_{zz}(\tau,\sigma) = M[z(\tau)z^*(\sigma)], \end{array} \tag{2}$$

где $M[\xi(t)]$ – математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$, $K_{\psi,\psi}(t,\tau)$ – корреляционная матрица случайных процессов $\varphi(t), \psi(t)$, $(*)$ – знак транспонирования.

Функция $e(t) = x(t) - y(t), t = t_0$ является отклонением желаемого процесса $x(t)$ от $y(t)$. Необходимо найти матрицу $a_i(t,\tau)$ порядка $n \times m$ из условия минимума функционала.

$$J(t) = M[< e(t), e(t) >] = M[e^*e(t)] = SpM[e(t)e^*(t)] \to inf \tag{3}$$

при условиях (1), (2). Здесь $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение, SpA – след матрицы A.

В работе [3] получено решение оптимальной задачи (1) – (3) в виде матричного интегрального уравнения

$$K_{xz}(t,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau, \quad t_0 \leq \sigma < t. \tag{4}$$

В дальнейшем уравнение (4) назовем матричным интегральным уравнением Виннера - Колмогорова.

Исследованию интегрального уравнения (4) на основе канонического представления случайных процессов посвящена работа [4]. Однако, разрешимость и построения общего решения матричного интегрального уравнения (4) остается не решенной проблемой.

Пусть желаемый случайный процесс $x(t), t \geq t_0$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)w(t), x(t_0) = x_0, t > t_0, \tag{5}$$

где $A(t), B(t)$ – заданные детерминированные матрицы порядков $n \times n$, $n \times r$ соответственно, с кусочно непрерывными элементами, $w(t), t \geq t_0 - r$ – мерный случайный процесс, $x_0 - n$ – мерный случайный вектор. Известны, что:

$$\begin{aligned} &M[x_0] = 0, M[x(t_0)x^*(t_0)], M[x_0 x_0^*] = \sum\nolimits_0, \\ &M[w(t)] = 0, K_{ww}(t,\tau) = M[w(t)w^*(\tau)], \end{aligned} \tag{6}$$

где $\sum_0$ – положительно определенная матрица порядка $n \times n$, $K_{ww}(t,\tau)$ – матрица порядка $r \times r$ с кусочно непрерывными элементами.

Пусть вектор функция

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t), t \geq t_0, \tag{7}$$

где $C(t)$ – матрица порядка $m \times n$ с кусочно непрерывными элементами, $v(t), t \geq t_0 - m$ – мерный случайный процесс, причем известны

$$M[v(t)] = 0, K_{vv}(t,\tau) = M[v(t)v^*(\tau)]. \tag{8}$$

Здесь $K_{vv}(t,\tau)$ – известная матрица порядка $m \times m$ с кусочно непрерывными элементами.

В отличие от (1), случайный процесс $y(t), t \geq t_0$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = F(t)y + G(t)z(t), y(t_0) = 0, t > t_0, \tag{9}$$

где $F(t), G(t)$ – неизвестные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$ с кусочно непрерывными элементами.

Полагаем, что корреляционные матрицы $K_{ww}(t,\tau)$, $K_{vv}(t,\tau)$, $\sum_0 > 0$ известны, $w(t)$, $v(t)$, $x(t_0) = x_0$ независимы.

В настоящее время известно решение оптимизационной задачи (3), (5) – (9) для частного случая. Решение оптимизационной задачи (3), (5) – (9) для общего случая является актуальной.

В работах Р. Калмана [5], Р. Калмана, Р. Бьюси [6] рассмотрены случай, когда

$$K_{ww}(t,\tau) = Q(t)\delta(t-\tau), K_{vv} = R(t)\delta(t-\tau), \tag{10}$$

где $Q(t) = Q^*(t) \geq 0$, $R(t) = R^*(t) > 0$ известные матрицы порядков $r \times r$, $m \times m$ соответственно с непрерывными элементами, $x(t_0) = x_0 - n$ –мерный гауссов случайный вектор, $w(t), v(t), t \geq t_0$ гауссовы случайные процессы типа белого шума, $\delta(t-\tau)$ – функция Дирака.

Результаты Калмана - Бьюси заключается в том, что неизвестные матрицы $F(t), G(t)$ определяются по следующему алгоритму: 1. Определяется матрица $\sum(t) = M[e(t)e^*(t)]$ из решения матричного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\sum}{dt} = A(t)\sum + \sum A^*(t) - \sum(t)C^*R^{-1}(t)C(t)\sum(t) + \\ &+ B(t)Q(t)B^*(t), \quad \sum(t_0) = \sum\nolimits_0, \quad t > t_0; \end{aligned} \tag{11}$$

2. Матрицы $G(t), F(t), t \geq t_0$ равны

$$G(t) = \sum(t)C^*(t)R^{-1}(t), \quad F(t) = A(t) - G(t)C(t), \quad t \geq t_0. \tag{12}$$

Возникшие от потребности практики, оптимальные фильтры Калмана - Бьюси является одним из лучших результатов в теории оптимальной фильтрации. Оптимальным фильтром Калмана - Бьюси посвящены работы [7-9]. Однако решение матричного уравнения Риккати (11) довольно сложно и оно может быть решено только приближенными методами. Следовательно, матрицы $G(t), F(t), t \geq t_0$ могут быть определены с определенной точностью. Поэтому представляет интерес поиск других методов решения оптимальных фильтрации.

Постановка задачи. Выше приведены основные нерешенные проблемы оптимальной фильтрации случайных процессов.

Рассмотрим матричное интегральное уравнение (4) относительно неизвестной матрицы $a(t,\tau)$ порядка $n \times m$. Введем обозначения $K_{xz}(t,\sigma) = f(t,\sigma)$, $K_{zz}(\tau,\sigma) - K(\tau,\sigma)$, где

$$f(t,\sigma) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,\sigma) & f_{12}(t,\sigma) & \cdots & f_{1m}(t,\sigma) \\ f_{21}(t,\sigma) & f_{22}(t,\sigma) & \cdots & f_{2m}(t,\sigma) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(t,\sigma) & f_{n2}(t,\sigma) & \cdots & f_{nm}(t,\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,\sigma) \\ f_2(t,\sigma) \\ \cdots \\ f_n(t,\sigma) \end{pmatrix}$$

$$K(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} K_{11}(\tau,\sigma) & K_{12}(\tau,\sigma) & \cdots & K_{1m}(\tau,\sigma) \\ K_{21}(\tau,\sigma) & K_{22}(\tau,\sigma) & \cdots & K_{2m}(\tau,\sigma) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{m1}(\tau,\sigma) & K_{m2}(\tau,\sigma) & \cdots & K_{mm}(\tau,\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(\tau,\sigma) & K_2(\tau,\sigma) & \cdots & K_m(\tau,\sigma) \end{pmatrix}$$

$$a(t,\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,\tau) & a_{12}(t,\tau) & \cdots & a_{1m}(t,\tau) \\ a_{21}(t,\tau) & a_{22}(t,\tau) & \cdots & a_{2m}(t,\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t,\tau) & a_{n2}(t,\tau) & \cdots & a_{nm}(t,\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t,\tau) \\ a_2(t,\tau) \\ \cdots \\ a_n(t,\tau) \end{pmatrix}$$

$$f_i(t,\sigma) = (f_{i1}(t,\sigma) \ \ f_{i2}(t,\sigma) \ldots f_{im}(t,\sigma)), \quad i = \overline{1,n}$$

$$K_j(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} K_{1j}(\tau,\sigma) \\ \cdots \\ K_{mj}(\tau,\sigma) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,m}, \quad a_i(t,\tau) = (a_{i1}(t,\tau) \ldots a_{im}(t,\tau)),$$

$$i = \overline{1,n}, \quad \Omega = \{(t,\sigma) \in R^2 / t > t_0, \quad t_0 \leq \sigma < t\}, \quad \omega = \{(t,\tau) \in R^2 / t > t_0, \ t_0 \leq \tau \leq t\},$$

$$\pi = \{(\tau,\sigma) \in R^2 / t_0 \leq \tau \leq t, \quad t_0\sigma < t\}.$$

Теперь интегральное уравнение (4) запишется в виде

$$f_i^*(t,\sigma) = \int_{t_0}^{t} K^*(\tau,\sigma) a_i^*(t,\tau) d\tau, \quad t_0 \leq \sigma < t, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Задача 1. Пусть функции $f_i^*(t,\sigma) \in L_2(\Omega, R^m)$, $i = \overline{1,n}$, $K_{js}(\tau,\sigma) \in L_2(\omega, R^1)$, $j,s = \overline{1,m}$, искомая вектор функция $a_i^*(t,\tau) \in L_2(\pi, R^m), i = \overline{1,n}$.

Найти необходимое и достаточное условие существования решения интегральных уравнений (13) при любом фиксированном $t \in R^1$.

Задача 2. Найти общее решение интегральных уравнений (13). Заметим что, если $\overline{a}_i^*(t,\tau)$, $i=\overline{1,m}$ решения интегральных уравнений (13), то искомая матрица $a(t,\tau) = [(\overline{a}_1^*(t,\tau)\dots\overline{a}_n^*(t,\tau))]$ решение матричного уравнения (4).

Задача 3. Пусть желаемый случайный процесс $x(t)$, $t \geq t_0$ – решение дифференциального уравнения (5), уравнение оптимального фильтра имеет вид (9), где $F(t)$, $G(t)$, $t{\geq}t_0$ – неизвестные матрицы порядков $n\times n$, $n\times m$ соответственно. Найти матрицы $F(t)$, $G(t)$ при условий (6) – (8).

Задача 4. Пусть матрицы $K_{ww}(t,\tau)$, $K_{vv}(t,\tau)$ определяются соотношением (10). Найти новый метод построения оптимального фильтра Калмана - Бьюси.

Суть предлагаемого метода решения задач оптимальной фильтрации состоит в том, что для объекта управления описываемого уравнением (1) найти необходимое и достаточное условия существования оптимальной весовой матрицы $a(t,\tau)$ и построить общее решение интегрального уравнения (4).

Для случая, когда уравнение движения объекта управления имеет вид (5), найти параметры оптимального фильтра $F(t), G(t)$ по оптимальной весовой матрицей $a(t,\tau)$.

При фиксированном $t \in R^1$ уравнение (13) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с параметром $\sigma, t_0 \leq \sigma < t$. Решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода без параметра посвящены работы [10, 11]. Применения этих результатов для решения краевых задач оптимального управления для процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями приведены в [12 - 14], а исследованию управляемости и быстродействия процессов описываемых параболическим уравнением посвящена статья [15]. Данная работа является продолжением работ [10 - 15].

1. Решение матричного уравнения.

Для фиксированного значения $t=t_*\in R^1$ интегральные уравнения (13) запишутся так

$$f_i^*(t_*,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t_*} K^*(\tau,\sigma)a_i^*(t_*,\tau)d\tau, \ \ t_0 \leq \sigma < t_*, \ \ i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Пусть $\{\varphi_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система в L_2. Тогда

$$F_{ik}(t_*) = \int\limits_{t_0}^{t_*} f_i^*(t_*,\sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma, \ \ k=1,2,...$$

$$K_k(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t_*} K^*(\tau,\sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma, \ \ k=1,2,...$$

$$f_i^*(t_*,\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik}(t_*)\varphi_k(\sigma), \ \ K^*(\tau,\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(\tau)\varphi_k(\tau).$$

Теперь интегральные уравнения (14) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ik}^{*}\varphi_k(\sigma) = \int_{t_0}^{t_*} \left[\sum_{k=1}^{\infty} K_k(\tau)\varphi_k(\sigma)\right] a_i^{*}(t_*, \tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, ... \tag{15}$$

Из (15) имеем

$$F_{ik}^{*} = \int_{t_0}^{t_*} K_k(\tau)a_i^{*}(t_*, \tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, ... \tag{16}$$

где

$$K_k(\tau) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_*} K_{11}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma & \cdots & \int_{t_0}^{t_*} K_{m1}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{t_0}^{t_*} K_{1m}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma & \cdots & \int_{t_0}^{t_*} K_{mm}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma & \end{pmatrix}$$

$$F_{ik}(t_*) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_*} f_{i1}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma \\ \cdots \\ \int_{t_0}^{t_*} f_{im}(t, \sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma \end{pmatrix}, \quad a_i^{*}(t_*, \tau) = \begin{pmatrix} a_{i1}(t_*, \tau) \\ \cdots \\ a_{im}(t_*, \tau) \end{pmatrix}.$$

Пусть $k = 1, 2, ..., N$. Тогда из (16) следует, что

$$F_i^N = \int_{t_0}^{t_*} K^N(\tau)a_{iN}^{*}(t_*, \tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где

$$F_i^N(t_*) = \begin{pmatrix} F_{i1}(t_*) \\ F_{i2}(t_*) \\ \cdots \\ F_{iN}(t_*) \end{pmatrix}, \quad K^N(\tau) = \begin{pmatrix} K_1(\tau) \\ K_2(\tau) \\ \cdots \\ K_N(\tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь $F_i^N(t_*)$ — mN - мерный вектор, $K^N(\tau)$ – матрица порядка $mN \times m$, $a_i^{*}(t_*, \tau)$ – искомый m - мерный вектор.

Теорема 1 . *Интегральные уравнения (17) при любом фиксированном $F_i^N(t_* \in R^{mN})$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W_N(t_*) = \int_{t_0}^{t_*} K^N(\tau)K^{*(N)}(\tau)d\tau, \quad t_* > t_0$$

порядка $mN \times mN$ является положительно определенной.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть матрица $W_N(t_*) > 0$, т.е. квадратичная форма $b^*W_N(t_*)b > 0$, $\forall b, b \in R^{mN}, b \neq 0$. Покажем, что интегральное уравнение (17) имеет решение. В самом деле, поскольку матрица $W_N(t_*) > 0$, то существует обратная матрица $W_N^{-1}(t_*) > 0$. Выберем

$$a^*_{iN}(t_*, \tau) = K^{*N}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^N(t_*), \quad i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} K^N(\tau)a^*_{iN}(t_*, \tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_*} K^N(\tau)K^{*N}(\tau)d\tau W_N^{-1}(t_*)F_i^N(t_*) = F_i^N(t_*), \quad i = \overline{1, n}$$

Следовательно, в случае, когда матрица $W_N(t_*) > 0$ интегральное уравнение (17) имеет по крайней мере одно решение (18). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть интегральное уравнение (17) имеет решение при любом $F_i^N(t_*) \in R^{mN}$. Покажем, что матрица $W_N(t_*) > 0$. Поскольку для любого вектора $b \in R^{mN}$, квадратичная форма $b^*W_N(t_*)b \geq 0$, то для доказательства $W_N(T_*) > 0$ достаточно показать, что матрица $W_N(t_*)$ неособая.

Предположим противное. Пусть матрица $W_N(t_*)$ особая. Тогда существует вектор $c \in R^{mN}, c \neq$ такой, что $c^*W_Nc = 0$. Определим функцию

$$w_N(\tau) = K^{*(N)}(\tau)c, \quad \tau \in I = [t_0, t_*], \quad w_N(\cdot) \in L_2(I, R^{mN})$$

Заметим, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} w_N^*(\tau)w_N(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_*} c^*K^N(\tau)K^{*(N)}(\tau)cd\tau = c^*W_N(t_*)c = 0. \tag{19}$$

Тогда функция $w(0) \equiv 0, \tau \in I$. Так как интегральное уравнение (17) имеет решение для любого вектора $F_i^{(N)}(t_*) \in R^{mN}$, то в частности, существует функция $\overline{a}^*_{iN}(t_*, \tau)$ такая, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} K^N(\tau)\overline{a}^*_{iN}(t_*, \tau)d\tau = c = F_i^N(t_*). \tag{20}$$

Как следует из соотношений (19), (20) верно равенство.

$$0 = \int\limits_{t_0}^{t_*} w^*(\tau)\overline{a}^*_{iN}(t_*, \tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_*} c^*K^N(\tau)\overline{a}^*_{iN}(t_*, \tau)d\tau = c^*c.$$

Это противоречит тому, что $c \neq 0$. Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица $W_N(t_*)$ особая. Теорема доказана.

Теорема 2 . *Пусть матрица $W_N(t_*)$ положительно-определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (17) имеет вид*

$$\begin{aligned}&\overline{a}^*_{iN}(t_*,\tau)=K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^N(t_*)+b_{iN}(t_*,\tau)-\\&-K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)b_{iN}(t_*,\tau)d\tau, t_0\le\tau\le t_*,\end{aligned}\tag{21}$$

где $b_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)$ – произвольная функция.

Доказательство. Введем следующие множества

$$U_i=\{a_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)/\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)a^*_{iN}(t_*,\tau)d\tau=F_i^{(N)}(t_*)\},\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&Q_i=\{a_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)/a_{iN}(t_*,\tau)=K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^{(N)}(t_*)+\\&+b_{iN}(t_*,\tau)-K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)b_{iN}(t_*,\tau)d\tau,\\&\forall b_{iN}(t_*,\tau),\ \ b_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)\},\end{aligned}\tag{23}$$

где множества U_i содержит все решения интегрального уравнения (17) при каждом фиксированном i, $i=\overline{1,n}$. Теорема утверждает, что функция $a_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)$ принадлежит множеству U_i тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству Q_i, т.е. $U_i=Q_i, i=\overline{1,n}$.

Докажем, что $U_i=Q_i$. Для этого достаточно показать, что: $Q_i\subset U_i, U_i\subset Q_i, i=\overline{1,n}$.

Покажем, что $Q_i\subset U_i$. В самом деле, если $a_{iN}(t_*,\tau)\in Q_i$, то как следует из соотношения (23), верно равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)a_{iN}(t_*,\tau)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)K^{*(N)}(\tau)d\tau W_N^{-1}(t_*)F_i^{(N)}(t_*)+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)b_{iN}(t_*,\tau)d\tau-\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)K^{*(N)}(\tau)d\tau W_N^{-1}(t_*)\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)\times$$
$$\times b_{iN}(t_*,\tau)d\tau=F_i^N(t_*),\quad i=\overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что $a_{iN}(t_*,\tau)\in U_i$. Следовательно, множество $Q_i\subset U_i$.

Покажем, что $U_i\subset Q_i$. Пусть $a_{iN}(t_*,\tau)\in U_i$, т.е. для функции $\overline{a}_{iN}(t_*,\tau)\in U_i$ выполнено равенство (см. (22))

$$\int\limits_{t_0}^{t_*}K^{(N)}(\tau)\overline{a}_{iN}(t_*,\tau)d\tau=F_i^{(N)}(t_*),\quad i=\overline{1,n}$$

Заметим, что в соотношении (23) функция $b_{iN}(t_*,\tau)\in L_2(I,R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $b_{iN}(t_*,\tau)=\overline{a}_{iN}(t_*,\tau),\tau\in I$. Теперь функция $a_{iN}(t_*,\tau)\in Q_i$ запишется в виде

$$a_{iN}(t_*,\tau)=K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^{(N)}(t_*)+\overline{a}_{iN}(t_*,\tau)-K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_*} K^{(N)}(\tau)\overline{a}_{iN}(t_*,\tau)d\tau = \overline{a}_{iN}(t_*,\tau), \quad \tau \in I.$$

Следовательно, $\overline{a}_{iN}(t_*,\tau) = a_{iN}(t_{*,\tau}) \in Q_i$. Отсюда следует, что $U_i \subset Q_i$, $i = \overline{1,n}$. Из включений $Q_i \subset U_i$, $U_i \subset Q_i$, $i = \overline{1,n}$ следует, что $U_i = Q_i$, $i = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Отметим свойства решений интегрального уравнения (17).

1. Как следует из формулы (21), функция $a^*_{iN}(t_*,\tau)$, $\tau \in I$ может быть представлен в виде $a^*_{iN}(t_*,\tau) = d^*_{iN}(t_*,\tau) + e^*_{iN}(t_8,\tau)$, $\tau \in I$, где

$$d^*_{iN}(t_*,\tau) = K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^{(N)}(t_*)$$

– частное решение интегрального уравнения (17),

$$e^*_{iN}(t_*,\tau) = b_{iN}(t_*,\tau) - K^{*(N)}(\tau)W_{NN}^{-1}(t_*)\int_{t_0}^{t_*} K^{(N)}(\tau)b^*_{iN}(t_*,\tau), \quad \tau \in I$$

– решение однородного интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_*} K^{(N)}(\tau)e^*_{iN}(t_* = 0.$$

2. Функции $d^*_{iN}(t_*,\tau)$, $e^*_{iN}(t_*,\tau)$, $\tau \in I$ ортогональны, т.е. $d^*_{iN}(t_*,\tau) \perp e^*_{iN}(t_*,\tau)$. В самом деле, легко убедиться в том, что

$$< d^*_{iN}, e^*_{iN} >_{L_2} = \int_{t_0}^{t_*} [d^*_{iN}(t_*,\tau)]^* e^*_{iN}(t_*,\tau)d\tau = 0.$$

3. Функция $d^*_{iN}(t_*,\tau) = K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t_*)F_i^{(N)}(t_*)$, $\tau \in I$ является решением интегрального уравнения (17) с минимальной нормой в $L_2(I,R^m)$. Действительно, норма $\|a^*_{iN}\|^2 = \|d^*_{iN}\|^2 + \|e^*_{iN}\|$. Отсюда следует, что $\|a^*_{iN}\|^2 \geq \|d^*_{iN}\|^2$. Если функция $b^*_{iN}(t_*,\tau) \equiv 0$, $\tau \in I$, тогда $a^*_{iN}(t_*,\tau) = d^*_{iN}(t_*,\tau)$, $\|a^*_{iN}\| = \|d^*_{iN}\|$.

Теорема 3 . *Интегральное уравнение*

$$F_i^{(N)}(t) = \int_{t_0}^{t} K^{(N)}(\tau)a^*_{iN}(t,\tau)d\tau, \quad t > t_0, \quad i = \overline{1,n} \tag{24}$$

при любой функции $F_i^{(N)}(t) \in L_2(I,R^{mN})$, $I_1 = \{t \in R^1/t > t_0\}$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W_{(N)}(t) = \int_{t_0}^{t} K^{(N)}(\tau)K^{*(N)}(\tau)d\tau \tag{25}$$

порядка $mN \times mN$ *является положительно определенной.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теоремы 1. Утверждение теоремы 1 верно для любого $t = t_*$, $t_* > t_0$. После замены t_* на t, получим матрицу $W_N(t)$, $t > t_0$. Теорема доказана.

Теорема 4 . *Пусть матрица $W_N(t)$, $t > t_0$ положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (24) имеет вид*

$$\begin{aligned} &a^*_{iN}(t,\tau) = K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t)F_i^{(N)}(t) + b_{iN}(t,\tau) - \\ &-K^{*(N)}(\tau)W_N^{-1}(t)\int_{t_0}^{t} K^{(N)}(\tau)b_{iN}(t,\tau)d\tau, \;\; t > t_0, \;\; i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $b_{iN}(t,\tau) \in L_2(\pi, R^m)$, $i = \overline{1,n}$ – произвольная функция.

Доказательство теоремы следует из теоремы 2, после замены t_* на t, где $t > t_0$.

Теорема 5 . *Матричное уравнение (13) при любой функции $f_i^*(t,\sigma) \in L_2(\Omega, R^m)$, $i = \overline{1,n}$ имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$W(t) = \lim_{N\to\infty} W_N(t) = \lim_{N\to\infty}\int_{t_0}^{t} K^{(N)}(\tau)K^{*(N)}(\tau)d\tau$$

является положительно определенной. Общее решение матричного уравнения (13) имеет вид

$$a^*_i(t,\tau) = \lim_{N\to} a^*_{iN}(t,\tau) = \lim_{N\to}\{K^{*N}(\tau)W_N^{-1}(t)F_i^{(N)}(t) + b_{iN}(t,\tau) -$$

$$-K^{*N}(\tau)W_N^{-1}(t)\int_{t_0}^{t} K^{N}(\tau)b_{iN}(t,\tau)d\tau\}, \;\; t > t_0, \;\; i = \overline{1,n},$$

где $b_{iN}(t,\tau) \in L_2(\pi, R^m)$, $i = \overline{1,n}$ – произвольная функция.

Доказательство теоремы следует из теоремы 3, 4 и полноты ортонормированной системы $\varphi_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$.

Для решения прикладных задач фильтрации может быть применен следующий приближенный метод решения матричного интегрального уравнения (13). Пусть $t \in R^{1,}$ $t > t_0$, t – фиксированный момент времени . Разобьем интервал t_0, t на $N_1 + 1$ частей точками $\sigma_0 = t_0$, $\sigma_1 = t_1, \ldots, \sigma_{N_1} = t_{N_1}$, $\sigma_{N_1+1} = t$. Для каждого фиксированного σ_j, $j = \overline{0, N_1}$ уравнение (13) запишется в виде

$$f_i^*(t,\sigma_j) = \int_{t_0}^{t} K^*(\tau,\sigma_j)a_i^*(t,\tau)d\tau, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,N_1}. \tag{27}$$

Введем следующие векторы и матрицы

$$\overline{F}_i^{(N_1)}(t) = \begin{pmatrix} f_i^*(t,\sigma_1) \\ f_i^*(t,\sigma_2) \\ \cdots \\ f_i^*(t,\sigma_{N_1}) \end{pmatrix}, \quad \overline{K}^{(N_1)}(\tau) = \begin{pmatrix} K(\tau,\sigma_1) \\ K(\tau,\sigma_2) \\ \cdots \\ K(\tau,\sigma_{N_1}) \end{pmatrix}.$$

Теперь интегральное уравнение (27) запишется в виде

$$\overline{F}_i^{(N_1)}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{K}^{(N_1)}(\tau) a^*_{iN_1}(t,\tau)d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \tag{28}$$

где $\overline{F}_i^{(N_1)}(t)$ – mN_1 - мерный вектор для каждого i, $\overline{K}^{N_1}(\tau)$ – матрица порядка $mN_1 \times m$, $a^*_{iN_1}(t,\tau)$ – m - мерный вектор.

Теорема 6 . *Интегральное уравнение (28) при любом фиксированном $\overline{F}_i^{(N_1)} \in R^{mN_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$\overline{W}_{N_1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{K}^{(N_1)}(\tau)\overline{K}^{*(N_1)}(\tau)d\tau, \quad t > t_0,$$

порядка $mN_1 \times mN_1$ является положительно определенной.

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 1, 3.

Теорема 7 . *Пусть матрица $\overline{W}_{N_1}(t) > 0$ при фиксированном $t > t_0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (28) для каждого индекса i, $i = \overline{1,n}$ имеет вид*

$$a^*_{iN_1} = \overline{K}^{*(N_1)}(\tau)\overline{W}^{-1}_{N_1}(t)\overline{F}_i^{(N_1)}(t) + \overline{b}_{iN_1}(t,\tau) -$$

$$-\overline{K}^{*(N_1)}(\tau)\overline{W}^{-1}_{N_1}(t)\int\limits_{t_0}^{t} \overline{K}^{(N)}(\tau)\overline{b}_{iN_1}(t,\tau)d\tau, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\overline{b}_{iN_1}(t,\tau) \in L_2(I, R^m)$ – произвольная функция.

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 2, 4. Заметим, что при $N_1 \to \infty$, $\lim\limits_{N_1\to\infty} a^*_{iN_1}(t,\tau) = a^*_i(t,\tau)$ – решение интегрального уравнения (13).

На основе теорем 1 - 7 могут быть решены задачи 1, 2.

2. Оптимальная фильтрация.

Заметим, что желаемый случайный процесс $x(t), t\geq t_0$ – решение дифференциального уравнения (5).

Следовательно, решение $x(t), t \geq t_0$ для каждой реализации случайного процесса $w(t), t \geq t_0$ может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)w(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0,$$

где x_0 – n - мерный случайный вектор, $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\mu} = A(t)\mu$, $w(t)$ и x_0 независимы, известны Σ_0, $K_{ww}(t,\tau)$ (см. (6)).

Вектор наблюдения $z(t)$, $t \geq t_0$ определяется по формуле (7), где $v(t)$ – m - мерный случайный процесс с характеристиками (8), $v(t)$ и x_0 независимы.

Лемма 1 . *Пусть* $x_0,\ w(t),\ v(t),\ t \geq t_0$ *независимы, известны* $M[x_0]{=}0$, $M[x_0x_0^*]{=}\Sigma_0$, $M[w(t)]{=}0$, $K_{ww}(t,\tau){=}M[w(t)w^*(\tau)]$, $M[v(t)]{=}0$, $K_{vv}(t,\tau){=}M[v(t)v^*(t)]$.

Тогда

$$\begin{aligned}&K_{xx}(\tau,\sigma) = M[x(\tau)x^*(\sigma)] = \Phi(\tau,t_0)\Sigma_0\Phi^*(\sigma,t_0)+\\ &+\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\sigma}\Phi(\tau,\xi)B(\xi)K_{ww}(\xi,\eta)B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta d\xi,\end{aligned} \tag{29}$$

$$K_{zz}(\tau,\sigma) = M[z(\tau)z^*(\sigma)] = C(\tau)K_{xx}(\tau,\sigma)C^*(\sigma) + K_{vv}(\tau,\sigma), \tag{30}$$

$$K_{xz}(t,\sigma) = M[x(t)z^*(\sigma)] = K_{xx}(t,\sigma)C^*(\sigma). \tag{31}$$

Доказательство. Так как

$$K_{xx}(\tau,\sigma) = M[x(\tau)x^*(\sigma)] = M\big\{[\Phi(\tau,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau}\Phi(\tau,\xi)B(\xi)w(\xi)d\xi] \times [x_0^*\Phi^*(\sigma,t_0)+$$

$$+\int t_0{}^{\sigma}w^*(\eta)B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta]\big\} = \Phi(\tau,t_0)M[x_0x_0^*]\times\Phi^*(\sigma,t_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(\tau,\xi)B(\xi)M[w(\xi)x_0^*]\Phi^*(\sigma,t_0)d\xi + \Phi(\tau,t_0)\int\limits_{t_0}^{\sigma}M[x_0w^*(\eta)]B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta+$$

$$\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\sigma}\Phi(\tau,\xi)B(\xi)M[w(\xi)w^*(\eta)]\times B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta d\xi.$$

Отсюда с учетом того, что $M[x_0x_0^*]{=}\Sigma_0$, $M[w(\xi)x_0^*]{=}0$, $M[x_0w^*(\eta)]{=}0$, $M[w(\xi)w^*(\eta)]{=}$ ${=}K_{ww}(\xi,\eta)$, получим равенство (29).

Поскольку

$$\begin{aligned}&K_{zz}(\tau,\sigma) = M[z(\tau)z^*(\sigma)] = M\{[C(\tau)x(\tau)+v(\tau)][x^*(\sigma)C^*(\sigma)+v^*(\sigma)]\} =\\ &= C(\tau)M[x(\tau)x^*(\sigma)]C^*(\sigma) + M[v(\tau)x^*(\sigma)]C(\sigma) + C(\tau)M[x(\tau)v^*(\sigma)]+\\ &+M[v(\tau)v^*(\tau)],\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$M[v(\tau)x^*(\sigma)] = M\{v(\tau)[x_0^*\Phi^*(\sigma,t_0) + \int\limits_{t_0}^{\sigma}w^*(\eta)B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta]\} =$$

$$= M[v(\tau)x_0^*]\Phi^*(\sigma,t_0) + \int\limits_{t_0}^{\sigma}M[v(\tau)w^*(\eta)]B^*(\eta)\Phi^*(\sigma,\eta)d\eta = 0,$$

$$M[x(\tau)v^*(\sigma)] = 0, \quad M[v(\tau)x_0^*] = 0, \quad M[v(\tau)w^*(\eta)] = 0,$$

в силу независимости x_0, $v(t)$, то из (32) следует равенство (30).

Корреляционная матрица

$$\begin{aligned} &K_{xz}(t,\sigma) = M[x(t), z^*(\sigma)] = M\{x(t)[x^*(\sigma)C^*(\sigma) + v^*(\sigma)]\} = \\ &= K_{xx}(t,\sigma)C^*(\sigma) + M[x(t)v^*(\sigma)], \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$M[x(t)v^*(\sigma)] = M\{[\Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{\sigma} \Phi(t,\tau)B(\tau)w(\tau)d\tau]v^*(\sigma)\} =$$

$$= \Phi(t,t_0)M[x_0v^*(\sigma)] + \int\limits_{t_0}^{\sigma} \Phi(t,\tau)B(\tau)M[w(\tau)v^*(\sigma)]d\tau = 0.$$

Из (33) следует равенство (31). Корреляционная матрица $K_{xx}(t,\sigma)$ следует из (29), после замены τ на t. Лемма доказана.

Как следует из уравнения фильтра (9), случайный процесс

$$y(t) = \Psi(t,t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)G(\tau)z(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)G(\tau)z(\tau)d\tau, \tag{34}$$

где $y(t_0) = 0$, $\Psi(t,\tau) = æ(t)æ^{-1}(\tau)$, $æ(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\omega} = F(t)\omega$, $F(t)$, $G(t)$ – неизвестные матрицы.

Обозначим $a(t,\tau) = \Psi(t,\tau)G(\tau)$. Теперь соотношение (34) запишется в виде

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)z(\tau)d\tau. \tag{35}$$

Лемма 2 . *Матрица $a(t,\tau)$ является решением интегрального уравнения*

$$K_{xz}(t,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau, \quad t_0 \le \sigma < t, \tag{36}$$

где $K_{xz}(t,\sigma)$, $K_{zz}(\tau,\sigma)$ определяются формулами (31), (30) соответственно.

Доказательство. Разность $x(t){-}y(t){=}e(t)$ является отклонением желаемого случайного процесса $x(t)$ от случайного процесса $y(t)$. Определим матрицу $a(t,\tau)\Psi(t,\tau)G(t)$ из решения оптимизационной задачи: минимизировать функционал (при фиксированном t)

$$\begin{aligned} &J(t) = M[e^*(t)e(t)] = SpM[e(t)e^*(t)] = SpM\{[x(t)- \\ &\quad - \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)z(\tau)d\tau][\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\sigma)z(\sigma)d\sigma]^*\} \to inf. \end{aligned} \tag{37}$$

Приращение функционала

$$\Delta J(t) = J(a+\gamma h) - J(a) = -2\gamma SpI_1 + \gamma^2 SpJ_2,$$

где

$$I_1 = \int_{t_0}^{t} \{M[x(t)z^*(\sigma)] - \int_{t_0}^{t} a(t,\tau)M[z(\tau)z^*(\sigma)]d\tau\}h^*(t,\sigma)d\sigma, \tag{38}$$

$$I_2 = M\{\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)z(\tau)d\tau \int_{t_0}^{t} [h(t,\sigma)z(\sigma)]^* d\sigma\}. \tag{39}$$

Необходимое условие минимума (37) имеет вид $SpI_1 = 0$, $SpI_2 > 0$. Как следует из (39) $SpI_2 > 0$. Из $SpI_1 = 0$ следует интегральное уравнения (36). Лемма доказана.

Лемма 3 . *Пусть выполнены условия леммы 1, 2. Тогда неизвестные матрицы $F(t)$, $G(t)$, $t \geq t_0$ определяются из соотношений*

$$a(t,\tau) = G(t), \ \ \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau) = F(t)a(t,\tau), \ \ t \geq t_0, \tag{40}$$

где $a(t,\tau)$ – решение интегрального уравнения (36).

Если, кроме того, выполнено равенство

$$B(t)\int_{t_0}^{\sigma} K_{ww}(t,\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi C^*(\sigma) - G(t)K_{vv}(t,\sigma) = 0, \ \ t \geq t_0, \tag{41}$$

$$F(t) = A(t) - G(t)C(t), \ \ t \geq t_0. \tag{42}$$

Доказательство. Из условия лемм 1, 2 следует матрица $a(t,\tau)$ – решение интегрального уравнения (36), где корреляционные матрицы $K_{xz}(t,\sigma)$, $K_{zz}(\tau,\sigma)$ определяются формулами (31), (30) соответственно.

Применение теорем 1 – 7 к интегральному уравнению (36) позволяет найти матрицу $a(t,\tau) = \Psi(t,\tau)G(\tau)$. Итак, известна матрица $a(t,\tau)$, необходимо найти параметры фильтра $F(t)$, $G(t)$.

Поскольку $\Psi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, то $a(t,\tau) = \Psi(t,t)G(t) = G(t)$, $t \geq t_0$. Остается определить матрицу $F(t)$ по известной матрице $a(t,\tau)$.

Как следует из формулы (35), производная

$$\dot{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau)\right] z(\tau)d\tau + a(t,\tau)z(t), \ \ t > t_0. \tag{43}$$

С другой стороны, из уравнения фильтра (9) имеем

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = F(t)y + G(t)z(t), \ \ t \geq t_0. \tag{44}$$

Из (43), (44) с учетом (35) и $a(t,t) = G(t)$, получим $\frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau) = F(t)a(t,\tau)$. Итак, доказаны соотношения (40).

Дифференцируя по t тождество (36), получим

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} a(t,\tau) K_{zz}(\tau,\sigma) d\tau + a(t,t) K_{zz}(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} K_{xz}(t,\sigma). \tag{45}$$

Производная

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{xz}(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} M[x(t)z^*(\sigma)] = M[\dot{x}(t)z^*(\sigma)] =$$

$$= M\{[A(t)x + B(t)w(t)]z^*(\sigma)\} = A(t)M[x(t)z^*(\sigma)] + B(t)M[w(t)z^*(\sigma)],$$

где

$$M[w(t)z^*(\sigma)] = M\{w(t)[x^*(t)C^*(\sigma) + v^*(\sigma)]\} = M[w(t)x^*(\sigma)]C^*(\sigma),$$

$$M[w(t)x^*(\sigma)] = M\{w(t)[x_0^*\Phi^*(\sigma,t_0) + \int_{t_0}^{t} w^*(\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi]\} =$$

$$= \int_{t_0}^{\sigma} M[w(t)w^*(\xi)]B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{xz}(t,\sigma) = A(t)K_{xz}(t,\sigma) + B(t)\int_{t_0}^{\sigma} K_{ww}(t,\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi C^*(\sigma).$$

Корреляционная матрица

$$K_{zz}(t,\sigma) = M[z(t)z^*(\sigma)] = M\{[C(t)x(t) + v(t)]z^*(\sigma)\} =$$

$$= C(t)M[x(t)z^*(\sigma)] + M[v(t)z^*(\sigma)] = C(t)K_{xz}(t,\sigma) + M[v(t)x^*(\sigma)]C^*(\sigma) +$$

$$+ K_{vv}(t,\sigma) = C(t)K_{xz}(t,\sigma) + K_{vv}(t,\sigma),$$

где $M[v(t)x^*(\sigma)] = 0$.

Теперь равенство (45) запишется в виде

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau + G(t)C(t)K_{xz}(t,\sigma) + G(t)K_{vv}(t,\sigma) =$$

$$= A(t)K_{xz}(t,\sigma) + B(t)\int_{t_0}^{t} K_{ww}(t,\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi C^*(\sigma).$$

Отсюда с учетом того, что $K_{xz}(t,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau$, $\frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau) = F(t)a(t,\tau)$, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t}[F(t) + G(t)C(t) - A(t)]a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau =$$
$$= B(t)\int\limits_{t_0}^{\sigma} K_{ww}(t,\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi C^*(\sigma) - G(t)K_{vv}(t,\sigma), \quad t \geq t_0. \tag{46}$$

Из (46) в силу равенства (41) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t}\{F(t) - [A(t) - G(t)C(t)]\}a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau = 0,$$

для любой функции $K_{zz}(\tau,\sigma)$. Это возможно при $F(t) = A(t) - G(t)C(t)$, $t \geq t_0$. Лемма доказана.

3. Оптимальный фильтр Калмана – Бьюси.

Результаты Калмана – Бьюси относятся к частному случаю, когда корреляционные матрицы $K_{ww}(t,\tau)$, $K_{vv}(t,\tau)$ определяются по формуле (10), x_0 – n - мерный гауссов случайный вектор, $w(t)$, $v(t)$, $t \geq 0$ гауссовы случайные процессы типа белого шума. Случайные процессы $x(t)$, $y(t)$, $t \geq 0$ являются марковскими.

Лемма 4 . *Пусть* x_0, $w(t)$, $v(t)$, $t \geq t_0$ *независимы, известны* $M[x_0] = 0$, $M[x_0x_0^*] = \Sigma$, $M[w(t)] = 0$, $K_{ww}(t,\tau) = Q(t)\delta(t-\tau)$, $M[v(t)] = 0$, $M[v(t)v^*(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$.

Тогда

$$K_{xx}(\tau,\sigma) = \Phi(\tau,t_0)\Sigma_0\Phi(\sigma,t_0) + \int\limits_{t_0}^{\sigma}\Phi(\tau,\eta)B(\eta)Q(\eta)B^*(\eta)\Phi^*(\tau,\eta)d\eta, \tag{47}$$

$$K_{zz}(\tau,\sigma) = C(\tau)K_{xx}(\tau,\sigma)C^*(\sigma) + R(\tau)\delta(\tau-\sigma), \tag{48}$$

$$K_{xz}(\tau,\sigma) = K_{xx}(\tau,\sigma)C^*(\sigma). \tag{49}$$

Доказательство. Равенство (47) следует из (29) при $K_{ww}(\xi,\eta) = Q(\xi)\delta(\xi-\eta)$. Аналогично, из (30) при $K_{vv}(\tau,\sigma) = R(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, получим равенство (48). Корреляционная матрица $K_{xx}(r,\sigma)$ определяется по формуле (47), после замены τ на t. Равенство (49) следует из (31). Лемма доказана.

Лемма 5 . *Матрица* $a(t,\tau)$ *является решением интегрального уравнения*

$$K_{xz}(\tau,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)K_{zz}(\tau,\sigma)d\tau, \quad t_0 \leq \sigma < t, \tag{50}$$

где $K_{xz}(t,\sigma)$, $K_{zz}(\tau,\sigma)$ *определяются формулами (49), (48) соответственно.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 6 . *Пусть выполнены условия лемм 4, 5. Тогда неизвестные матрицы* $F(t)$, $G(t)$, $t \geq t_0$ *определяются из соотношений*

$$a(t,t) = G(t), \quad F(t) = A(t) - G(t)C(t), \quad t \geq t_0. \tag{51}$$

Доказательство леммы следует из утверждения леммы 3. Поскольку

$$B(t)\int\limits_{t_0}^{t} Q(t)\delta(t-\xi)B^*(\xi)\Phi^*(\sigma,\xi)d\xi C^*(\sigma) \equiv 0, \quad K_{vv}(t,\sigma) = R(t)\delta(t-\sigma) \equiv 0$$

в силу того, что $\delta(t-\xi) \equiv 0$, $t_0 \leq \xi \leq \sigma < t$, $\delta(t-\sigma) \equiv 0$, $t_0 \leq \sigma < t$.

Заключение. Разработан конструктивный метод решения матричного интегрального уравнения Винера – Колмогорова относительно весовой матрицы динамической системы для задач оптимальной фильтрации случайных процессов.

Рассмотрены два случая сведения исходного интегрального уравнения к интегральному уравнения Фредгольма первого рода специального вида.

Получено необходимое и достаточное условие существования решения матричного интегрального уравнения для многомерных нестационарных случайных процессов.

Для линейных динамических систем с известным уравнением движения, определены параметры линейного оптимального фильтра в условиях случайных воздействий на объект управления и на вектор наблюдения.

Определены параметры фильтра Калмана – Бьюси по известной весовой матрице оптимальной фильтрации в случае внешних возмущений в виде белого шума. Отличительный особенностью предлагаемого подхода к оптимальной фильтрации состоит в том, что параметры фильтра определяются по оптимальной весовой матрице, а не путем решения управления Риккати.

Список литературы

[1] *Винер Н. (Wiener N.)* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary Time series // J. Wiley. New York. Second printing. – 1950.

[2] *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1941. – Т. 5, № 1. – С. 3 – 14.

[3] *Бутон Р.К.(Booton R.C.)* An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary stsatistical inputs // Proc. IRE. –1952. – V. 40. – P. 977 – 981.

[4] *Пугачев В.С.* Интегральные канонические представления случайных функций и их приложение к определению оптимальных линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1957. – Т. 18, № 1. – С. 980 – 991.

[5] *Калман Р. (Kalman R.)* A new approach linear filtering and prediction problems // J. Basic Engr. (ASME Transactions). – 1960. V. 82. – P. 35 – 45.

[6] *Калман Р., Бьюси Р. (Kalman R., Bucy R.)* New results in linear filtering and perdiction theory // J. Basic Engr. (ASME Transactions). – 1961. – V. 83. – P. 95 – 108.

[7] *Дэвис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление / Перевод с англ. под ред. А.Н. Шиярева. – М.: Наука, 1984. – 208 с.

[8] *Athanosios C. Antoulas (Ed.)* Mathematical System Theory / The influence of R.E. Kalman. Springer – Verlag, 1991. – 605 p.

[9] *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси / пер. с нем. под ред. И.Е. Казакова. – М.: Наука, 1982. – 200 с.

[10] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. Институт математики МО и Н Республики Казахстан. – 2005. – Т. 5, № 4. – С. 7 – 13.

[11] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Минск – Москва. – 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1476 – 1486.

[12] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2010. – № 1. – С. 30 – 55.

Поступила в редакцию 2 сентябрь 2012 года