УДК 517.927.6

Д. Дауитбек[1,2,a], Н.Е. Токмагамбетов[1,2,b], К.С. Туленов[1,2,c]
[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы*
[a] *e-mail: dos-mm@mail.ru,* [b] *e-mail: tokmagam@list.ru,* [c] *e-mail: tulen.kz@mail.ru*

Об одном спектральном неравенстве для оператора Штурма–Лиувилля с δ–подобным потенциалом[1]

В данной статье рассмотрены корректно возмущенные обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка в проколотом отрезке. Найдена резольвента возмущенного оператора. Получена одна асимптотическая формула для собственных значений возмущенного оператора. Эта работа посвящена к изучению свойств одномерного аналога оператора Лапласа.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, сингулярный потенциал, возмущенная задача, корректно разрешимая задача, собственное значение, резольвента.

Д. Дәуітбек, Н.Е. Токмагамбетов, К.С. Туленов

δ–тәрізді потенциалды Штурм–Лиувилль операторы

Бұл мақалада ойылған кесіндіде корректілі ауытқыған жай дифференциалдық операторлар қарастырылды. Олардың резольвенталары алынды. Және олардың меншікті мәндерінің кері қосындысына формула алынды.

D. Dauitbek, N.E. Tokmagambetov, K.S. Tulenov

Sturm-Liouville with δ–interaction

This article describes the correct perturbed ordinary differential operators of second order in the punctured segment. And find a resolution perturbed. One obtained an asymptotic formula for the eigenvalues of the perturbed. This work is dedicated to the study of the properties of one-dimensional analogue of the Laplace operator. Trace theory of linear operators begins with the fundamental results Tata linear algebra, matrix trace of a linear operator is invariant to- respect to the choice of basis and coincides with the spectral trace. The role of this invariant and its consequences in various areas of algebra, analysis, Lisa, the geometry is very big. The problem of computing regularized traces back to the work of I.M. Gelfand and B.M. Levitan. They have been considered the Sturm-Liouville problem with Dirichlet boundary conditions. L.A. Diky in their work the regularized traces a regular Sturm-Liouville higher orders.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012г.-2014г.

В физических исследованиях (к примеру, см. [1]) была поставлена задача об изучении оператора

$$-\Delta + \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \delta_k, \qquad (1)$$

где δ_k–дельта-функция Дирака, которая имеет точечный носитель. К изучению свойств одномерного аналога посвящено множество работ (к примеру, см.[2-5]). Свойства и приложения операторов вида (1) также были исследованы в работах [6-8]. В статье [9] дано описание всех корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в проколотом круге.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) \equiv -y''(x) = f(x),\ -1 < x < x_0,\ x_0 < x < 1, \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$y(-1) = y(1) = 0, \qquad (3)$$

$$[y(x_0)] = 0, [y'(x_0)] = \int_{-1}^{1} l(y)\overline{\sigma(x)}dx =< f, \sigma >, \qquad (4)$$

где

$$[y(x_0)] = y(x_0+0) - y(x_0-0),\ \ [y'(x_0)] = y'(x_0+0) - y'(x_0-0)$$

и $\sigma(x) \in L_2(-1,1)$. Оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями (3)–(4) обозначим через L_σ.

Обозначим нужные нам граничные функционалы следующим образом

$$U_1(y) \equiv y(-1),\ U_2(y) \equiv y(1),\ U_3(y) \equiv [y(x_0)],\ U_4(y) \equiv [y'(x_0)].$$

Верна следующая теорема о представлении резольвенты оператора L_σ.

Теорема 1 *Резольвента оператора L_σ определяется по формуле*

$$(L_\sigma - \lambda I)^{-1} f(x) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x) + \psi(x,\lambda) < f, L_0(L_0 - \bar{\lambda} I)^{-1}\sigma >, \qquad (5)$$

где $\psi(x,\lambda)$ - решение задачи (2)–(3) с условием в точке x_0

$$[\psi(x_0,\lambda)] = 0, [\psi'(x_0,\lambda)] - < l(\psi), \sigma >= 1$$

и

$$\psi(x,\lambda) = L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi(x), \qquad (6)$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x_0-1}{2}(x+1), -1 < x < x_0, \\ \frac{x_0+1}{2}(x-1), x_0 < x < 1. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая лемма.

Лемма 1 *Если $\varphi(x)$ является решением однородного уравнения $l(\varphi) = 0$ и удовлетворяет соотношениям $U_1(\varphi) = 0$, $U_2(\varphi) = 0$, $U_3(\varphi) = 0$ и $U_4(\varphi) = 1$, то функция*

$$\psi(x, \lambda) = L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi(x)$$

представляет решение уравнения

$$l(\psi(x, \lambda)) = \lambda\psi(x, \lambda)$$

и удовлетворяет условиям

$$U_1(\psi) = 0,\ U_2(\psi) = 0,\ U_3(\psi) = 0,\ U_4(\psi) - < l(\psi), \sigma >= 1.$$

Лемма проверяется непосредственно. Действительно, легко видеть, что

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi(x).$$

Остается к обеим частям последнего равенства последовательно применить выражения $l(\cdot)$ и $U_j(\cdot)$.

Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения

$$y_0(x, \lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}f(x),$$

$$C =< f, L_0(L_0 - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma >,$$

$$\psi(x, \lambda) = L_\sigma(L_\sigma - \lambda I)^{-1}\varphi.$$

Ясно, что функция $y_0(x, \lambda)$ принадлежит области определения оператора L_0 и является решением уравнения $l(y_0) - \lambda y_0 = f(x)$. Иначе говоря, для функции $y_0(x, \lambda)$ выполняются краевые условия $U_j(y_0) = 0$, $j = \overline{1, 4}$. В соответствии с правой частью соотношения (5) рассмотрим функцию

$$y(x, \lambda) = y_0(x, \lambda) + C\psi(x, \lambda). \tag{7}$$

Применим к обеим частям последнего равенства дифференциальное выражение $l(\cdot) - \lambda$. В силу леммы 1 имеем

$$l(y) - \lambda y = l(y_0) - \lambda y_0 = f(x).$$

Таким образом, правая часть (7) удовлетворяет требуемому неоднородному уравнению. Для проверки краевых условий на обе части равенства (7) подействуем формой $U_\nu(\cdot)$. В силу леммы 1 имеем при $\nu = 1, 2, 3$

$$U_\nu(y) = U_\nu(y_0) + C \cdot U_\nu(\psi) = 0,$$

а при $\nu = 4$

$$U_4(y) - < l(y), \sigma >= U_4(y_0) + C \cdot U_4(\psi) - < l(y_0), \sigma > -C < l(\psi), \sigma >=$$
$$= C(U_4(\psi) - < l(\psi), \sigma >) - < l(y_0), \sigma >= C - < l(y_0), \sigma >$$
$$=< f, L_0(L_0 - \bar{\lambda} I)^{-1} \sigma > - < l(y_0), \sigma >=< L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f, \sigma > - < f + \lambda y_0, \sigma >$$
$$=< L_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f, \sigma > - < f + \lambda (L_0 - \lambda I)^{-1} f, \sigma >= 0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения оператора L_0, а через μ_k собственные значения оператора L_σ, пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом их кратностей.

Из Теоремы 1 легко следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2 *Имеет место формула*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} + < \varphi, \sigma > . \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2. Из представления (5) при $\lambda = 0$ получим

$$L_\sigma^{-1} f(x) = L_0^{-1} f(x) + \varphi(x) < f, \sigma > . \tag{9}$$

Полученное тождество имеет смысл, так как оба слагаемых в правой части существуют. Теперь вычислим спектральный след оператора (9). Заметим, что

$$Tr(L_0^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

и так как

$$Bf \equiv \varphi(x) < f, \sigma >= \int_{-1}^{1} \varphi(x) f(t) \overline{\sigma(t)} dt,$$

то

$$Tr(B) = \int_{-1}^{1} \varphi(t) \overline{\sigma(t)} dt =< \varphi, \sigma >,$$

где $Tr(\cdot)$–оператор взятия следа. Таким образом, из приведенных выше замечаний, следует утверждение теоремы.

Обозначим через $L_{\alpha\varphi}$ оператор, соответствующий оператору L_σ при $\sigma(x) \equiv -\alpha\varphi(x)$, где α–положительное число, то есть оператор $L_{\alpha\varphi}$ соответствует следующей задачей

$$l(u) \equiv -u''(x) = f(x), -1 < x < x_0, x_0 < x < 1,$$
$$u(-1) = u(1) = 0,$$
$$[u(x_0)] = 0, [u'(x_0)] = \alpha u(x_0),$$

который порождается выражением

$$\widetilde{l}(u) \equiv -u''(x) + \alpha\delta(x - x_0) u(x).$$

Оператор $L_{\alpha\varphi}$ является самосопряженным оператором.

Справедливо

Следствие 1 *Пусть* $\{\mu_k(x_0,\, \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ *собственные значения оператора* $L_{\alpha\varphi}$ *пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(x_0,\, \alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} + \alpha < \varphi, \varphi > . \tag{10}$$

Обозначим через

$$S(x_0,\, \alpha) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(x_0,\, \alpha)}.$$

Теорема 3 *Пусть* $\alpha > 0$*, тогда* $S(x_0,\, \alpha)$ *принимает свой максимум при* $|x_0| \to 0$*, а минимум при* $|x_0| \to 1$*.*

Доказательство. Не сложным вычислением находим что

$$< \varphi, \varphi >= \int_{-1}^{1} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \frac{(x_0^2 - 1)^2}{6}.$$

Тогда

$$S(x_0,\, \alpha) \equiv \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(x_0,\, \alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} + \alpha \frac{(x_0^2-1)^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} + \alpha \frac{(x_0^2-1)^2}{2}.$$

Отсюда и следует утверждение Теоремы 3.

Следствие 2 *Справедливы*

$$\sup_{-1<x_0<1} S(x_0,\, \alpha) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\alpha}{2}, \quad \inf_{-1<x_0<1} S(x_0,\, \alpha) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4 *Пусть* $\{\mu_k(x_0,\, \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ *собственные значения оператора* $L_{\alpha\varphi}$*, порожденного дифференциальным выражением*

$$\widetilde{l}(u) \equiv -u''(x) + \alpha\delta(x - x_0)u(x)$$

в пространстве $L_2(-1, 1)$ *с граничными условиями*

$$y(-1) = y(1) = 0,$$

пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей. Тогда для любой точки $x_0 \in (-1, 1)$ *верно следующее спектральное неравенство*

$$\frac{\pi^2}{12} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(x_0,\, \alpha)} \le \frac{\pi^2}{12} + \frac{\alpha}{2}$$

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. -Москва: Наука, 1969. - 458 с.*

[2] *Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. - 1999. - Т. 66, №6. - С. 897–912.*

[3] *Kostenko A.S., Malamud M.M. 1–D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differential Equations. - 2010. - V. 249. - P. 253–304.*

[4] *Головатый Ю.Д., Манько С.С. Точные модели для операторов Шредингера с δ'–подобными потенциалами // Укр. мат. вестник. - 2009. - Т. 6, №2. - С. 173–207.*

[5] *Голощапова Н.И., Заставный В.П., Маламуд М.М. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шредингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. - 2011. - Т. 90, №1. - С. 151–156.*

[6] *Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук. - 1987. - Т. 42, №6. - С. 99–131*

[7] *Шондин Ю.Г. Возмущения на тонких множествах высокой коразмерности эллиптических операторов и теория расширений в пространстве с индефинитной метрикой // Зап. научн. сем. ПОМИ. - 1995. - Т. 222. -С. 246-–292.*

[8] *Зубок Д.А., Попов И.Ю. Два физических приложения оператора Лапласа, возмущенного на множестве нулевой меры // Теоретическая и математическая физика. - 1999. - Т. 119, №2. - С. 295–307.*

[9] *Кангужин Б.Е., Анияров А.А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области // Мат. заметки. - 2011. - Т. 89, №6. -С. 856–867.*

Поступила в редакцию 02 август 2012 года