УДК 517.948.34

Касымов К.А., Дауылбаев М.К., Атахан Н.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: dmk57@mail.ru

Асимптотическая сходимость решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений[1]

Изучается краевая задача для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка, обладающая явлением начальных скачков. Установлена асимптотическая сходимость решения этой задачи к решению некоторой невозмущенной краевой задачи.

Ключевые слова: Сингулярное возмущение, интегро-дифференциальные уравнения, начальный скачок, асимптотическая сходимость.

Қасымов Қ.Ә., Дауылбаев М.Қ., Атахан Н.

Сингулярлы ауытқыған интегралды дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептер шешімінің асимптотикалық жинақтылығы

Кез-келген ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы секірістер құбылыстары бар шеттік есеп қарастырылған. Бұл есеп шешімінің қандай да бір ауытқымаған шеттік есеп шешіміне асимптотикалық жинақталатыны көрсетілген.

Kassymov K.A., Dauylbayev M.K., Atakhan N.

symptotic convergence of solution of boundary problems for the singular perturbated integro-differential equations

In this work boundary value problem for the singular perturbed linear integral differential equations of nth order. Estimates of the solution and its derivatives of this problem are received. Established that the solution of the boundary value problem at the point t = 0 has the phenomenon of initial jump (n-2) th order. Changed unperturbed boundary value problem is constructed. Solution of the given singular perturbed boundary value problem tends to the solution of the changed unperturbed boundary value problem. Changed unperturbed boundary value problem is different from the usual unperturbed problem. There are initial jump of the solution and integral member. Estimates of the difference between the solutions of the given singular perturbed and unperturbed changed problems are received. Values of initial jumps of the solution and of the integral member are found.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант №0699/ ГФ, 2012 г.-2014 г.

Рассмотрим следующее линейное сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + ... + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$\begin{cases} h_i y \equiv \sum_{j=0}^{n-1-i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0,\varepsilon) = a_i, & i = \overline{1,\ l}, \\ h_{l+i} y \equiv \sum_{j=0}^{n-1-i} \beta_{ij} y^{(j)}(1,\varepsilon) = b_i, & i = \overline{1,p}, \qquad l+p=n, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0-$ малый параметр, $a_i,\ \alpha_{ij}, i = \overline{1,l}\ , j = \overline{0, n-1-i}$; $\alpha_{1,n-2} \neq 0$, $b_i, \beta_{ij}, i = \overline{1,p}, j = \overline{0, n-1-i}$ – некоторые известные постоянные, не зависящие от ε.

Предположим выполнение следующих условий:

1. $A_i(t),\quad F(t) \in C^{n-1}[0,1]\ , i = \overline{1,n}\ ;\ H_i(t,x) \in C^{n-1}(D)\ ,\ i = \overline{0,n-1}, D = (0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1)$.
2. $A_1(t) \ge \gamma = const > 0,\ \ 0 \le t \le 1$.
3. $\overline{\Delta}_{10} = \begin{vmatrix} h_2 y_{10} & ... & h_2 y_{n-1,0} \\ ... & ... & ... \\ h_n y_{10} & ... & h_n y_{n-1,0} \end{vmatrix} \neq 0$, где $y_{i0}(t), i = \overline{1, n-1}$- фср уравнения $L_0 y = 0$.
4. Число $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра

$$H(t,s) = \frac{1}{A_1(s)} \cdot [\ H_{n-1}(t,s) + \int_s^1 \sum_{i=0}^{n-1} H_i(t,x) \overline{K}^{(i)}(x,s)dx\ ],$$

где функция $\overline{K}(t,s)$ является решением задачи $L_0 \overline{K}(t,s) = 0, \overline{K}^{(i)}(s,s) = 0, \quad i = \overline{0, n-3}$, $\overline{K}^{(n-2)}(s,s) = 1$, т.е. является функцией Коши.

Для решения краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке $0 \le t \le 1$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\ \right| \le C \left[\frac{|a_1|}{\alpha_{1,n-2}} \cdot \max_{0 \le t \le 1} |H_{n-1}(t,0)| + \sum_{i=2}^{l} |\ a_i| + \sum_{i=1}^{p} |\ b_i\ | + \max_{0 \le t \le 1}\ |\ F(t)\ | + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{n-2-i} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{l} |\ a_i| + \sum_{i=1}^{p} |b_i| + \max_{0 \le t \le 1}\ |\ F(t)\ | \right) \right], i = \overline{0, n-2}, \tag{3}$$

$$\left|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\ \right| \le C \left[\frac{|a_1|}{\alpha_{1,n-2}} \cdot \max_{0 \le t \le 1} |H_{n-1}(t,0)| + \sum_{i=2}^{l} |\ a_i| + \sum_{i=1}^{p} |\ b_i\ | + \max_{0 \le t \le 1}\ |\ F(t)\ | + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{l} |\ a_i| + \sum_{i=1}^{p} |b_i|\ + \varepsilon \max_{0 \le t \le 1}\ |\ F(t)\ | \right) \right]$$

Из оценок (3) следует, что $y^{(i)}(0,\varepsilon) = O\left(1\right),\ i=\overline{0,n-2},\quad y^{(n-1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\ ,\quad \varepsilon \to 0$, т.е. решение краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка $n-2$ - го порядка.

Рассмотрим следующее измененное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_0\overline{y} \equiv A_1(t)\bar{y}^{(n-1)}(t) + \sum_{i=2}^{n} A_i(t)\overline{y}^{(n-i)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx + \Delta(t) \quad (4)$$

с краевыми условиями:

$$h_1\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{1j}\overline{y}^{(j)}\left(0\right) = \ a_1 + \alpha_{1,n-2}\cdot\Delta, \quad (5)$$

$$h_i\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-1-i} \alpha_{ij}\overline{y}^{(j)}\left(0\right) = \ a_i, \quad i=\overline{2,\ l}, \quad h_{l+i}\overline{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-1-i} \beta_{ij}\overline{y}^{(j)}(1) = b_i, \quad i=\overline{1,p}, \quad (6)$$

где $\Delta(t)$, Δ – соответственно, так называемые, начальные скачки интегрального члена и решения. Вводя обозначение $y(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) + \bar{y}(t)$ из (1) с учетом (4) – (6) относительно функции $u(t,\varepsilon)$ получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} L_\varepsilon u = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} H_i(t,x)u^{(i)}(x,\varepsilon)dx - \varepsilon\overline{y}^{(n)} - \Delta(t), \\ h_1u(t,\varepsilon) = -\alpha_{1,n-2}\cdot\Delta, \quad h_iu(t,\varepsilon) = \ 0, \quad i=\overline{2,\ l}, \quad h_{l+i}u(t,\varepsilon) = 0, \quad i=\overline{1,p} \end{cases} \quad (7)$$

Так как задача (7) такого же типа, что и задача (1), (2), то применяя к ней оценку (3), получаем:

$$\left|u^{(i)}(t,\varepsilon)\ \right| \le \ C\ \left[\ \max_{0\le t\le 1} |\ \Delta(t) - \Delta\cdot H_{n-1}(t,0)\ | + \varepsilon^{n-2-i}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\ \right]\ ,\quad i=\overline{0,n-2},$$

$$\left|u^{(n-1)}(t,\varepsilon)\ \right| \le C\ \left[\max_{0\le t\le 1} |\ \Delta(t) - \Delta\cdot H_{n-1}(t,0)\ | + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\right]$$

Из этих оценок следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $\bar{y}(t)$ измененной невозмущенной краевой задачи (4), (5), (6) при выполнении равенства

$$\Delta(t) = \Delta\cdot H_{n-1}(t,0), \quad (8)$$

т.е. между решениями задач (1), (2) и (4), (5), (6) будут справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} &|y(t,\varepsilon) - \overline{y}(t)\ | \le C\varepsilon, \quad j=\overline{0,n-3}, \\ &\left|y^{(n-2)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(n-2)}(t)\ \right| \le C\left(\varepsilon + \exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \\ &\left|y^{(n-1)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(n-1)}(t)\ \right| \le C\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $C > 0$, $\gamma > 0-$ некоторые постоянные, не зависящие от ε. Тем самым, начальный скачок интегрального члена $\Delta(t)$ в уравнении (4) должен определяться равенством (8).

Найдем решение $\bar{y}(t)$ и Δ краевой задачи (4), (5), (6). Для этого предварительно рассмотрим задачу (4), (6), решение которого ищем в виде [1, 2]:

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{\Phi}_1(t) + ... + C_{n-1}\overline{\Phi}_{n-1}(t) + \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_1(s)} \cdot z(s)ds, \tag{10}$$

где функции $\overline{\Phi}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ являются решениями задач $L_0\overline{\Phi}_i(t) = 0$, $h_k\overline{\Phi}_i(t) = \delta_{k,i+1}$, $k = \overline{2,n}$, $i = \overline{1,n-1}$, C_i-неизвестные постоянные, а $z(t)$ однозначно определяется в силу условия IV из интегрального уравнения вида $z(t) = f(t) + \int_0^1 H(t,s)z(s)ds$ и имеет вид

$$z(t) = \overline{F}(t) + \overline{\Delta}(t) + C_1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_i(t,x)\overline{\Phi}_1^{(i)}(x)dx + \ldots + C_n \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_i(t,x)\overline{\Phi}_{n-1}^{(i)}(x)dx, \tag{11}$$

где $\overline{F}(t) \equiv F(t) + \int_0^1 R(t,s)F(s)ds$, $\overline{\Delta}(t) \equiv \Delta(t) + \int_0^1 R(t,s)\Delta(s)ds$, $\overline{H}_i(t,x) \equiv H_i(t,x) + \int_0^1 R(t,s)H_i(s,x)ds$, а $R(t,s)-$ резольвента ядра $H(t,s)$.
Подставляя (11) в (10) и учитывая (8) представим формулу (10) в виде:

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} C_i\overline{Q}_i(t) + \overline{P}(t) + \Delta \cdot \bar{H}(t), \tag{12}$$

где

$$\overline{Q}_i(t) \equiv \overline{\Phi}_i(t) + \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_1(s)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \bar{H}_j(s,x)\overline{\Phi}_i^{(j)}(x)dxds, \ \overline{P}(t) \equiv \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_1(s)} \cdot \overline{F}(s)ds,$$

$$\bar{H}(t) \equiv \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_1(s)} \cdot \left[H_{n-1}(s,0) + \int_0^1 R(s,p)H_{n-1}(p,0)dp \right] ds$$

Действуя на обе стороны формулы (12) граничными операторами $h_i, i = \overline{2,n}$, находим $C_1 = a_2$, ..., $C_{l-1} = a_l$, а для определения остальных неизвестных получаем систему

$$\begin{cases} (1+\overline{g}_{1l}) \cdot C_l + ... + \overline{g}_{1,n-1} \cdot C_{n-1} = \bar{q}_1 - \Delta \cdot \overline{r}_1, \\ \quad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ \overline{g}_{pl} \cdot C_l + ... + (1+\overline{g}_{p,n-1}) \cdot C_{n-1} = \bar{q}_p - \Delta \cdot \overline{r}_p, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\overline{g}_{ik} = \sum_{j=0}^{n-1-i} \beta_{ij} \int_0^1 \frac{\overline{K}^{(j)}(1,s)}{A_1(s)} \cdot \overline{\varphi}_k(s)ds, \qquad \overline{\varphi}_k(t) \equiv \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_i(t,x)\overline{\Phi}_k^{(i)}(x)dx,$$

$$\overline{r}_i = \sum_{j=0}^{n-1-i} \beta_{ij} \int_0^1 \frac{\overline{K}^{(j)}(1,s)}{A_1(s)} \cdot \overline{H}_{n-1}(s,0)ds, \qquad \bar{q}_i = b_i - \sum_{j=1}^{l-1} \bar{g}_{ij} \cdot a_{j+1} - \bar{e}_i,$$

$$\bar{e}_i = \sum_{j=0}^{n-1-i} \beta_{ij} \int_0^1 \frac{\overline{K}^{(j)}(1,s)}{A_1(s)} \cdot \overline{F}(s)ds, \qquad i = \overline{1,p}$$

Пусть

$$V. \qquad \overline{\omega}=\begin{vmatrix} 1+\overline{g}_{1l} & ... & \overline{g}_{1,n-1} \\ ... & ... & ... \\ \overline{g}_{pl} & ... & 1+\overline{g}_{p,n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда из системы (13) однозначно определяем $C_l = \frac{\overline{\omega}_1^q+\Delta\cdot\overline{\omega}_1^r}{\overline{\omega}}$, $C_{l+1} = \frac{\overline{\omega}_2^q+\Delta\cdot\overline{\omega}_2^r}{\overline{\omega}}$, ..., $C_{n-1} = \frac{\overline{\omega}_p^q+\Delta\cdot\overline{\omega}_p^r}{\overline{\omega}}$, где $\overline{\omega}_i^q$ и $\overline{\omega}_i^r$, $i=\overline{1,p}$ - определители, получаемые из $\bar{\omega}$заменой его $i-$го столбца столбцами $\left(\overline{q}_1...\overline{q}_p\right)^T$и $(\overline{r}_1...\overline{r}_p)^T$ соответственно. Подставляя найденные значения постоянных $C_i, i=\overline{1,n-1}$ в (12), получаем решение задачи (4), (6) в виде

$$\overline{y}(t)=\sum_{i=1}^{l-1}a_{i+1}\overline{Q}_i(t)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\overline{\omega}_i^q+\Delta\cdot\overline{\omega}_i^r}{\overline{\omega}}\cdot\overline{Q}_{l-1+i}(t)+\overline{P}(t)+\Delta\cdot\overline{H}(t). \tag{14}$$

Теперь воспользуемся условием (5) и действуем на обе стороны (14) граничным оператором h_1 и предполагая, что

$$VI. \qquad \alpha_{1,n-2}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\overline{\omega}_i^r}{\overline{\omega}}\cdot h_1\overline{Q}_{l-1+i}(t)\neq 0$$

получаем величину начального скачка решения Δ в виде:

$$\Delta=\frac{\sum_{i=1}^{l-1}a_{i+1}h_1\overline{Q}_i(t)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\overline{\omega}_i^q}{\overline{\omega}}\cdot h_1\overline{Q}_{l-1+i}(t)-a_1}{\alpha_{1,n-2}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\overline{\omega}_i^r}{\overline{\omega}}\cdot h_1\overline{Q}_{l-1+i}(t)} \tag{15}$$

Тем самым, будет справедливой следующая

Теорема 1 *Если справедливы условия I-VI, то на* $[0,1]$ *существует единственное решение* $(\overline{y}(t),\ \Delta)$ *задачи* (4), (5), (6), *выражаемое формулами* (14), (15).

Из теоремы и оценок (9) можно получить следующие предельные переходы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y^{(i)}(t,\varepsilon)=\overline{y}^{(i)}(t), \quad i=\overline{0,n-3}, \quad 0\le t\le 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y^{(n-2)}(t,\varepsilon)=\overline{y}^{(n-2)}(t), \;\; 0<t\le 1, \lim_{\varepsilon\to 0}y^{(n-1)}(t,\varepsilon)=\overline{y}^{(n-1)}(t), \;\; 0<t\le 1.$$

Тем самым, решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной краевой задачи (1), (2) стремится при $\varepsilon\to 0$ к решению $\overline{y}(t)$ измененной невозмущенной краевой задачи (4), (5), (6) равномерно на отрезке $0\le t\le 1$ вместе с производными до $n-3-$го порядка. Предельные равенства для производных $n-2-$ го и $n-1-$го порядков не являются равномерными относительно t на отрезке $[0,1]$, но они будут равномерными на отрезке $[t_0,1]$, где $t_0>0$ – достаточно малое, но фиксированное при $\varepsilon\to 0$ число.

Список литературы

[1] *Касымов К.А., Дауылбаев М.К.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва – Минск, 1999. – Т. 35, № 6. – С. 822 – 830.

[2] *Дауылбаев М.К.* Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. – Алматы: «Қазақ университетi», 2009. – 190 с.

Поступила в редакцию 14 август 2012 года