УДК 517.95

М.Ю. Немченко[1,a], Д. Сураган[1,2,b], Н.Е. Токмагамбетов[1,2,c]
[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы*
[a]*e-mail: nemchenko.imim@mail.ru,* [b]*e-mail: suragan@list.ru,* [c]*e-mail: tokmagam@list.ru*

Неравенство типа Релей-Фабер-Краха для Лапласиана с граничным условием Ньютонова потенциала

В работе докажем, что среди всех областей с одинаковой мерой шар минимизирует первое собственное значение Ньютонова потенциала. Круг из плоских областей является минимизирующей (среди областей одинаковой площади) первого собственного значения Лапласиана с граничным условием Дирихле. Музыкальная интерпретация этого результата следующая: среди всех барабанов с заданной площадью, кругообразный барабан производит самую низкую частоту.

Ключевые слова: неравенство Релей – Фабер – Краха, граничное условие объемного потенциала, оператор Лапласа.

М.Ю. Немченко, Д. Сураган, Н.Е. Токмагамбетов

Лаплас теңдеуіне Ньютон потенциалының шекаралық шартымен болған оператор үшін Релей–Фабер–Крах теңсіздігі

Бұл мақалада Лаплас теңдеуіне Ньютон потенциалының шекаралық шартымен болған оператор үшін Релей–Фабер–Крах теңсіздігі дәлелденді.

M.Y. Nemchenko, D. Suragan, N.E. Tokmagambetov

Solving problem on faithful transfer of Sommerfeld radiation condition to a boundary of a bounded in 3D space

In this paper it's proved Reley-Faber-Kranh inequality for Laplace operator with boundary condition of the Newton potential. The terms of the flat areas is minimizing (among other regions of the same area) the first eigenvalue Laplacian with Dirichlet boundary condition. Musical interpretation is among all the drums with a given Square, circular drum to produce the lowest purity. Historically, the minimization of the first eigenvalue of the Laplacian, probably one of the first of such problems, which appeared in the scientific literature. In fact, in his famous book Rayleigh "Theory sounds "[1] (the first was published in 1877), which focuses on some explicit computation and physical interpretation, it is argued that the terms of the flat area is minimized (among regions of equal area) of the first eigenvalue Laplacian with Dirichlet boundary condition. Musical Interpretation This result sledyuschee: among all the drums with a given Square, circular drum to produce the lowest frequency.

Исторически,минимизация первого собственного значения Лапласиана, возможно, одна из первых таких задач, которая появилась в научной литературе. В действительности, в известной книге Релея "Теория звуков"[1] (впервые была издана в 1877 году), которая посвящена некоторым явным вычислениям и физическим толкованиям, утверждается что круг из плоских областей является минимизирующей (среди областей одинаковой площади) первого собственного значения Лапласиана с граничным условием Дирихле. Музыкальная интерпретация этого результата следующая: среди всех барабанов с заданной площадью, кругообразный барабан производит самую низкую частоту. Доказательство этого предположения пришло только через 30 лет одновременно и независимо Г. Фабером и Е. Крахом. Тем не менее, история минимизации первого собственного значения не закончена! Неравенства Релей - Фабер - Краха было расширено на многие другие случаи и граничные задачи для Лапласиана. Самые последние доказанные изопериметрические неравенства такого рода принадлежат Д. Данерсу, М. С. Ашбау, Р. Д. Бегуриа и другим. В частности, Данерс [2] доказал неравенство Релей - Фабер - Краха для Лапласиана с граничным условием Робина.

В этой работе мы докажем неравенство Релей - Фабер - Краха для Лапласиана со специальным граничным условием нелокального типа для любой пространственной размерности.

Рассмотрим спектральную проблему на собственные значения Лапласиана в ограниченной области Ω с граничным условием $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x),\, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2, \tag{1}$$

$$-\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) ds_y - \int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} ds_y = 0,\, x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_d(x-y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} ln|x-y|, & d=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_d}|x-y|^{2-d}, & d \geq 3 \end{cases}$$

фундаментальное решение оператора Лапласа, то есть

$$-\Delta\varepsilon_d(x-y) = \delta(x-y)$$

в R^d, где δ - дельта функция, $|x-y| = \left[\sum_{k=1}^{d}(x_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ - расстояние между точками $x = (x_1, ..., x_d)$ и $y = (y_1, ..., y_d)$ в d-мерном Евклидовом пространстве R^d, $\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$- площадь единичной сферы в R^d и Γ-гамма функция.

Граничная задача (1)-(2) является самосопряженной (см. [3]). Следовательно, собственные значения спектральной задачи (1)-(2) дискретные и вещественнозначные. Обозначим собственные значения спектральной задачи (1)-(2) через λ_n^{NP}, $n \in N$. Для спектральной задачи (1)-(2) получим следующий аналог неравенства Релей - Фабер - Краха:

Теорема 1 *Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ и $\Omega^{ball} \subset R^d$ – шар одиноковой меры с Ω, то есть $|\Omega^{ball}| = |\Omega|$, тогда*

$$\lambda_1^{NP}(\Omega^{ball}) \leq \lambda_1^{NP}(\Omega). \tag{3}$$

Предварительные леммы

Лемма 1 *Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, $suppf \subset \Omega$ Ньютоновый потенциал*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) f(y) dy, \tag{4}$$

удовлетворяет граничным условиям

$$-u(x) + 2\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) ds_y - 2\int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} ds_y = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

Обратно, если функция $u \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-\triangle u(x) = f(x),\ x \in \Omega \tag{6}$$

и граничным условиям (5), тогда функция $u(x)$ есть Ньютоновый потенциал (4). Здесь $\frac{\partial}{\partial n_y}$ означает внешнюю нормальную производную.

Доказательство. Предположим, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Непосредственными вычислениями для любого $x \in \Omega$ получим

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) f(y) dy = -\int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) \triangle_y u(y) dy =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(-\varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} + \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dS_y -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \triangle \varepsilon_d(x-y) u(y) dy = u(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + n_d \frac{\partial}{\partial y_d}$ - внешняя нормальная производная и $n_1, ..., n_d$ - компоненты единичной нормали.

Это означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0,\ x \in \Omega. \tag{7}$$

Применяя свойства потенциалов двойного и простого слоя к формуле (7) при $x \to \partial\Omega$ получим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{8}$$

т.е. (8) является граничным условием для Ньютонова потенциала (4). Далее, легко показать переходя к пределу, что соотношение (8) остается в силе для всех $u \in H^2(\Omega)$. Таким образом, Ньютоновый потенциал (4) удовлетворяет граничному условию (5).

Наоборот, если функция $g \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $-\Delta g = f$ и граничному условию (5), то совпадает с Ньютоновым потенциалом (4). На самом деле, если это не так, то функция $v = u - g \in H^2(\Omega)$, где u является потенциалом Ньютона (4), удовлетворяет однородному уравнению $\Delta v = 0$ и граничному условию

$$-\frac{v(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Как и выше, применяя формулу Грина к $v \in H^2(\Omega)$ мы увидим, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)\Delta_y v(y)dy =$$

$$= -v(x) - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0, \forall x \in \Omega.$$

Переходя к пределу при $x \to \partial\Omega$ получим

$$-v(x) + \frac{v(x)}{2} - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0.$$

Здесь из (9) придем к

$$v(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа следует, что $v(x) = u(x) - g(x) = 0$ для любого $x \in \Omega$, то есть $g = u, g$ совпадает с Ньютоновым потенциалом. Это завершает доказательство леммы 1.

Из леммы 1 следует, что спектральная задача на собственные значения Ньютонова потенциала (4) эквивалентна спектральной граничной задаче

$$-\Delta u = \lambda u, \; x \in \Omega, \tag{11}$$

$$-u(x) + 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y)dS_y - 2\int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Следствие 1 *Оператор (11)–(12): $H^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ самосопряжен так как его обратный оператор (4) самосопряжен. В дальнейшем, будем обозначать самосопряженный оператор (11)–(12) через $-\Delta_{\Omega}^{NP}$.*

Следствие 2 *Легко проверить, что нелокальная граничная задача (11)–(12) не является эквивалентой к другим регулярным задачам для Лапласиана, таким как задачи Неймана, Робина и так далее.*

Пусть Ω измеримое множество конечного объема в R^d. Его симметрическая перестановка Ω^* является открытым централизованным шаром, объем которого совпадает с Ω, т.е. $|\Omega^*| = |\Omega|$ и

$$\Omega^* \;=\; \{x \in R^n \mid \omega_n |x|^n < Vol(\Omega)\}$$

Пусть u неотрицательная измеримая функция, равная нулю на бесконечности в том смысле, что все ее положительные уровневые множества имеют конечную меру,

$$Vol\left(\{x|f(x)>t\}\right)<\infty,\ (\forall t>0).$$

Определим симметрическую убывающую перестановку u^* функции u через симметризацию уровневых множеств

$$u^*(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}}dt.$$

Тогда u^* снизу полунепрерывная (следовательно, уровневые множества открытые) функция и единственным образом определяется через функцию распределения

$$\mu_u(t)=Vol\left\{x|u(x)>t\right\}.$$

По конструкции u^* одинаковой меры с u, т.е. соответствующие уровневые множества двух функций имеют одинаковый объем

$$\mu_u(t)=\mu_{u^*}(t),\ (\forall t>0). \tag{13}$$

В определении функции u^* используется специальное layer-cake разложение, которое выражает неотрицательную функцию u в терминах ее уровневых множеств

$$u^*(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}}dt$$

Заметим, что характеристическая функция $\chi_{\{u(x)>t\}}$ измерима по совокупности x и t, когда функция u измерима.

Лемма 2 *(О сохранении L_2 норм перестановок). Для каждой неотрицательной функции u из $L_2(\Omega)$*

$$\| u \|_{L_2(\Omega)}=\| u^* \|_{L_2(\Omega^*)}.$$

Доказательство. Применяя layer-cake разложение, теорему Фубини и формулу (13) запишем

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2dx=\int\limits_\Omega\int\limits_0^\infty \chi_{\{u^2(x)>t\}}dtdx=$$

$$=\int\limits_0^\infty Vol\left(\left\{u^2(x)>t\right\}\right)dt=\int\limits_0^\infty Vol\left(\{u(x)>s\}\right)2\cdot s\cdot ds=$$

$$=\int\limits_0^\infty \mu_u(s)\cdot 2\cdot s\cdot ds=\int\limits_0^\infty \mu_{u^*}(s)\cdot 2\cdot s\cdot ds=$$

$$=\int\limits_0^\infty Vol(\{u^*(x)>s\})\cdot 2\cdot s\cdot ds=\int\limits_0^\infty Vol(\{{u^*}^2(x)>t\})dt=$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{\infty} \chi_{\{u^{*2}(x)>t\}} dt dx = \int\limits_{\Omega} |u^{*^2}(x)|^2 dx.$$

Утверждение леммы следует из того, что функция u^* равноизмерима с функцией u.

Также будем пользоваться неравенством Райса [4,5]

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} f(y)g(x-y)h(x)dydx \leq \int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} f^*(y)g^*(x-y)h^*(x)dydx, \tag{14}$$

где f^*, g^* и h^* симметрические не убывающие перестановки измеримых функции f, g и h соответственно.

Доказательство теоремы 1

Так как оператор $-\Delta_{\Omega}^{NP}$ самосопряженный, то его собственную функцию u_1, соотвествующую к первому собственному значению, не нарушая общности можно предполагать положительной. Из неравенства (14) и того, что $\varepsilon_d(x-y)$ – положительная неубывающая функция следует [6,7]

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} u_1(y)\varepsilon_d(x-y)u_1(x)dydx \leq \int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_d(x-y)u_1^*(x)dydx.$$

Тогда учитывая полученное, имеем [8]

$$\lambda_1^{NP}(\Omega) = \frac{\int_{\Omega}(u_1(x))^2dx}{\int_{\Omega}\int_{\Omega} u_1(y)\varepsilon_d(x-y)u_1(x)dydx} \geq \frac{\int_{\Omega^*}(u_1^*(x))^2dx}{\int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_d(x-y)u_1^*(x)dydx} \geq$$

$$\geq \inf_{v\in L_2(\Omega^*)} \frac{\int_{\Omega^*}(v^*(x))^2dx}{\int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} v^*(y)\varepsilon_d(x-y)v^*(x)dydx} = \lambda_1^{NP}(\Omega^{ball}).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Список литературы

[1] *Rayleigh J.W.S. The theory of sound. - New York: Dover Pub., 1945. - 451 p.*

[2] *Daners D. A Rayleigh - Faber - Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // Math. Ann. - 2006. - V. 335. - P. 767–785.*

[3] *Kal'menov T.Sh., Suragan D. To Spectral Problems for the Volume Potential // Doklady Mathematics. -2008. - V. 80, №2. - P. 646–649.*

[4] *Almut B. Cases of Equality in the Riesz Rearrangement Inequality. - New York: Dover Pub., 1994. - 239 p.*

[5] *Riesz F. Sur une inѓegalitѓe intѓegrale // J. London Math. Soc. - 1930. - V. 5. -P. 162–168.*

[6] *Almut B. A Short Course on Rearrangement Inequalities, - New York: Dover Pub., 2009. - 120 p.*

[7] *Talenti G. Rearrangements and PDE. - New York: Dover Pub., 1991. - 134 p.*

[8] *Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. - New York: Interscience, 1953. - 542 p.*

Поступила в редакцию 15 август 2012 года