УДК 517.958

Д. Сураган
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
Институт математики и математического моделирования, Алматы
e-mail: suragan@list.ru

Решение задачи о точном переносе условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области в пространстве

Для решения неоднородного уравнения Гельмгольца в ограниченной трехмерной области с достаточно гладкой границей предложена новая постановка граничных условий, обладающих свойством подавлять волны, отраженные от границы. Доказаны существование и единственность классического решения задачи в предложенной постановке. Показано, что внутри ограниченной области это решение совпадает с решением (с излученным решением) задачи, поставленной в неограниченной области с условием излучения Зоммерфельда. Описано граничное условие объемного потенциала для уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, условия излучения Зоммерфельда, граничные условия нелокального типа.

Д. Сураган

Үш өлшемді кеңістік үшін Зоммерфельд шартын шенелген облыстын шекарасына ауыстыру есебі

Бұл мақалада біртекті емес Гельмгольц теңдеуіне қойылған Зоммерфельд шартынан шенелген облыстын шекарасына ауыстыруындағы жаңа шекаралық шарт алынды.

D. Suragan

Solving problem on faithful transfer of Sommerfeld radiation condition to a boundary of a bounded in 3D space

New statement of the boundary conditions possessing property to suppress a wave, reflected from the boundary is offered to solve non-homogeneous Helmholtz equation in a three-dimensional domain with a smooth boundary. And it's described the boundary condition for the volume potential Helmholtz equation. The idea of construction of boundary value problems for partial differential equations by transfer boundary conditions goes back to [1, Vladimirov'55] where the study boundary value problems for ordinary differential second-order equation. Also the method of demolition of the boundary conditions was used in [2, Bellman'58] and the review of applications of this method dimensional problems can be found in [3, Bellman and Vasudevan '86]. Works devoted to the further development of technology

transfer boundary conditions in problems for ordinary differential equations are presented in [4, Abramov'81] and [5, Abramov and Konyuhova'85].

Идея построения краевых задач для дифференциальных уравнений путем переноса граничных условий восходит к работе [1, Владимиров'55], где изучалась краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Также метод сноса краевых условий был использован в [2, Bellman'58] и обзор применений этого метода в одномерных задачах можно найти в [3, Bellman and Vasudevan '86]. Работы, посвященные дальнейшему развитию техники переноса граничных условий в задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представлены в [4, Абрамов'81] и [5, Абрамов и Конюхова'85]. В [6, Федорюк' 72] впервые для уравнения Гельмгольца был использован операторный метод сноса краевых условий из бесконечности, который рассматривается в полуцилиндре с ординарными условиями на границе. В случае финитной правой части доказывается, что условие ограниченности решения на бесконечности эквивалентно операторному краевому условию на некотором сечении волновода. В [7, Маслов и др.'88] авторами найдены псевдодифференциальные краевые условия на сфере, эквивалентные условиям излучения. В работе [8, Безменов'94] предложена постановка граничных условий для решения уравнения Гельмгольца внутри ограниченной области с искусственной, достаточно гладкой границей. То есть на достаточно гладкость границы автор добавляет некоторые предположения. И доказана равномерная сходимость решений внутренней задачи к решению задачи, поставленной в неограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности, при неограниченном увеличении размеров области. Вычислительные аспекты таких краевых задач можно найти в [9, Ditkowski and Suhov'2008].

В данной работе предложена новая постановка граничных условий нелокального типа для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве, эквивалентных условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

С помощью простого метода теории потенциала описано граничное условие объемного потенциала для уравнения Гельмгольца. В случае, когда волновой коэффициент является константой ($\widehat{k}^2 \equiv const > 0$), показано, что решение внутренней краевой задачи задается объемным потенциалом для уравнения Гельмгольца.

Для уравнения Лапласа ($\widehat{k}^2 \equiv 0$) аналогичный результат получен в работе [10 , Кальменов и Сураган'2009] и его применение для спектральных задач объемного потенциала развито в [10 , Кальменов и Сураган'2009] и [11, Сураган'2009].

Некоторые обобщения метода нахождения граничных условий объемного потенциала и их применение, например для полигарманических уравнений, можно найти в [12, Kalmenov and Suragan 2011].

Предварительные обозначения и факты.

Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Производную по направлению внешней нормали обозначим через $\frac{\partial}{\partial n} := \frac{\partial}{\partial n_y} = n_1\frac{\partial}{\partial y_1} + n_2\frac{\partial}{\partial y_2} + n_3\frac{\partial}{\partial y_3}$, где n_1, n_2, n_3 - составляющие внешней единичной нормали к $\partial\Omega$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$. Через Δ обозначим оператор Лапласа.

Будем говорить, что поверхность Ляпунова $\partial\Omega$ - достаточно гладкая поверхность, если для области Ω справедлива формула Грина

$$\int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)dy = \int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})dS_y$$

для всех функций v, u из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, имеющих правильную нормальную производную на $\partial\Omega$ и $\Delta v, \Delta u \in L_2(\Omega)$. К примеру, ограниченные замкнутые поверхности класса C^2 - достаточно гладкие поверхности.

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца в пространстве R^3

$$\Delta u + \widehat{k}^2(x)u = f, x \in R^3, \tag{1}$$

где $f \in C^1(R^3)$ и $supp f \subseteq \overline{\Omega}$, решения которого на бесконечности удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} r(\frac{\partial u}{\partial r} + iku) = 0. \tag{2}$$

В соответствии с физическим смыслом задачи эти условия требуют, чтобы на бесконечности волны рассеяния были уходящими. Здесь функция $\widehat{k}^2(x)$ определяется свойствами среды внутри области Ω, k - волновое число и r - радиальная координата.

Обозначим

$$\alpha(x) = 1 - \frac{Re\{\widehat{k}^2(x)\}}{k^2}, \beta(x) = -\frac{Im\{\widehat{k}^2(x)\}}{k^2}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) запишется следующим образом:

$$\Delta u(x) + k^2\big(1 - \alpha(x) - i\beta(x)\big)u(x) = f, x \in R^3, \tag{4}$$

причем $supp\{\alpha\}, supp\{\beta\} \subseteq \overline{\Omega}$.

В вопросе существования решения задачи (1), (2) мы будем опираться на следующий результат.

Теорема 1. [8]. *Пусть выполнены:*

Предположение 1: $\beta(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$ (среда в Ω имеет поглощающие свойства);

Предположение 2: $\alpha(x), \beta(x) \in C^1(R^3)$ и $supp\alpha \subseteq supp\beta \subseteq \overline{\Omega}$;

Тогда для любой функции $f(x) \in C^1(R^3)$, $supp f \subseteq \overline{\Omega}$ классическое решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее условиям излучения (2), существует и единственно.

Всюду ниже мы будем считать выполненными условия теоремы 1.

Постановка задачи.

Задача переноса граничных условий из бесконечности. *Найти граничные условия для уравнения (1) на $\partial\Omega$ таким образом, чтобы решение полученной внутренней задачи совпадало бы с решением задачи (1)-(2) в $\overline{\Omega}$.*

На языке физики это означает, что граничные условия должны обладать следующим свойством: волны, приходящие на $\partial\Omega$ из Ω, должны проходить через $\partial\Omega$ без какого-либо отражения.

В [8, Безменов'94] сформулированы такие граничные условия для решения уравнения Гельмгольца внутри ограниченной области, что решение внутренней задачи (при неограниченном увеличении размеров области)равномерно сходится к решению задачи, поставленной в неограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Формулировка основных результатов.

Через λ^D обозначим собственные значения задачи Дирихле в Ω:

$$-\Delta u = \lambda^D u, x \in \Omega; u(x) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Краевая задача Ньютонова потенциала. Найти решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = f, x \in \Omega, \qquad (5)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$2\pi u(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|})}{\partial n_y} u(y) dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \qquad (6)$$

Отметим, что уравнение (5) совпадает с (1) при $\alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 0$. В частном случае $k = 0$ задача (5)-(6) исследована в [10].

Теорема 2. *При $k^2 \neq \lambda^D$ функция*

$$u(x) = -\int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} f(y) dy, x \in \Omega, \qquad (7)$$

является единственным решением задачи (5)-(6).

Замечание 1. *Из теоремы 2 следует, что ядро объемного потенциала (7), то есть фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $-\frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}$, является функцией Грина нелокальной краевой задачи (5)-(6).*

Следует отметить, что объемный потенциал (7) удовлетворяет краевому условию (6) независимо от того $k^2 \neq \lambda^D$ или $k^2 = \lambda^D$. Однако в первом случае потенциал (7) однозначно определяется из уравнения (5) и условия (6). Во втором же случае решение уравнения (5) с условиям (6) существует для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$, однако не единственно и определяется с точностью до слагаемого, пропорционального собственным функциям задачи Дирихле, соответствующим собственным значением λ^D. Так как собственные значения λ^D изменяются с изменением области Ω, то для любых фиксированных значений k^2 можно всегда выбрать такие области Ω, что $k^2 \neq \lambda^D$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $k^2 \neq \lambda^D$. Тогда классическое решение задачи (1)-(2) удовлетворяет граничному условию (6). Обратно, если функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (6), то она совпадает с решением задачи (1)-(2) в $\overline{\Omega}$.*

Отметим, что условия вида (6) являются естественными при исследовании краевых задач во внешности ограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности [см. 13, 14].

Из свойств фундаментального решения легко проверить, что функция (7) удовлетворяет уравнению (5). Далее $-\frac{1}{4\pi|x-y|}\exp(ik|x-y|) \equiv \varepsilon(x-y)$. Непосредственным вычислением при любом $x \in \Omega$ получаем формулу Грина

$$u(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_\Omega \varepsilon(x-y)(\Delta_y u(y) + k^2 u(y))dy =$$

$$= \int_\Omega k^2\varepsilon(x-y)u(y)dy + \int_\Omega \varepsilon(x-y)\Delta_y u(y)dy =$$

$$= \int_\Omega (\Delta_y \varepsilon(x-y) + k^2\varepsilon(x-y))u(y)dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y =$$

$$= u(x) + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y.$$

Отсюда получим

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y = 0, x \in \Omega. \quad (8)$$

Используя свойства потенциала двойного и простого слоя (см. [13]), из (8) при $x \longrightarrow \partial\Omega$ находим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\Big)dS_y = 0, x \in \partial\Omega.$$

Таким образом функция (7) удовлетворяет уравнению (5) и граничному условию (6).

Теперь докажем единственность решения задачи, т.е. покажем, что если функция $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (5) и граничному условию (6), то она совпадает с (7) в Ω. Действительно, если существует другое решение u_1, то функция $\nu = u - u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, где $u = \int_\Omega \varepsilon(x-y)f(y)dy$, удовлетворяет однородному уравнению $\Delta\nu(y) + k^2\nu(y) = 0$ и граничному условию (6).

Применив к функции ν формулу Грина

$$0 = \int_\Omega \varepsilon(x-y)(\Delta_y \nu(y) + k^2\nu(y))dy =$$

$$= \int_\Omega \varepsilon(x-y)\Delta_y \nu(y)dy + \int_\Omega k^2\varepsilon(x-y)\nu(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial \nu(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}\nu(y)dS_y +$$

$$+ \int_\Omega (\Delta_y \varepsilon(x-y) + k^2(y)\varepsilon(x-y))\nu(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial \nu(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon(x-y)}{\partial n_y}\nu(y)dS_y + \nu(x), x \in \Omega,$$

получаем

$$\nu(x)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}\nu(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}\varepsilon(x-y)\frac{\partial\nu(y)}{\partial n_y}dS_y=0, x\in\Omega.$$

Переходя здесь к пределу при $x\to\partial\Omega$ (см. [13]) получим

$$\nu(x)-\frac{\nu(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}\nu(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}\varepsilon(x-y)\frac{\partial\nu(y)}{\partial n_y}dS_y=0, x\in\partial\Omega. \quad (9)$$

Поскольку $\nu(x)$ удовлетворяет граничному условию (6), из (9) следует, что

$$\nu(x)=0, \forall x\in\partial\Omega. \quad (10)$$

В силу единственности решения задачи Дирихле ($k^2\neq\lambda^D$) для уравнения Гельмгольца (см. напр.[14]) отсюда вытекает, что $\nu=u-u_1=0, \forall x\in\overline{\Omega}$, т. е. $u_1\equiv u$. Это доказывает, что решение (7) задачи (5)-(6) единственно. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

Нам понадобится следующая

Лемма 1.[15]. *Пусть $f\in C^1(R^1), suppf\subseteq\overline{\Omega}$ и выполнено предположение 2. Тогда задача по отысканию классического решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), эквивалентна к задаче по отысканию в классе $C(\overline{\Omega})$ решения интегрального уравнения*

$$u(x)=\int_{\Omega}K(x,y)u(y)dy+F(x), x\in\Omega, \quad (11)$$

$$F(x)=\int_{\Omega}\varepsilon(x-y)f(y)dy \quad (12)$$

со слабо полярным ядром $K(x,y)=k^2\varepsilon(x-y)\ [\alpha(y)+i\beta(y)]$. Причем решение уравнения (11) единственно тогда и только тогда, когда решение задачи (1)-(2) единственно.

Замечание 2. *Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что решение интегрального уравнение (11) единственно.*

Таким образом, решение задачи (1)-(2) совпадает с решением задачи (11) в ограниченной области Ω.

Из (11) непосредственным вычислением при любом $x\in\Omega$ находим

$$u(x)=\int_{\Omega}K(x,y)u(y)dy+F(x)=$$

$$=\int_{\Omega}k^2\varepsilon(x-y)[\alpha(y)+i\beta(y)]u(y)dy+\int_{\Omega}\varepsilon(x-y)f(y)dy=$$

$$=\int_{\Omega}k^2\varepsilon(x-y)[\alpha(y)+i\beta(y)]u(y)dy+\int_{\Omega}\varepsilon(x-y)\Big(\Delta_y u(y)+\widehat{k}^2(y)u(y)\Big)dy=$$

$$= \int_\Omega k^2\varepsilon(x-y)u(y)dy + \int_\Omega \varepsilon(x-y)\Delta_y u(y)dy =$$

$$= \int_\Omega \Big(\Delta\varepsilon(x-y) + k^2\varepsilon(x-y)\Big)u(y)dy+$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y =$$

$$= u(x) + \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y.$$

Поэтому

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y = 0, x \in \Omega. \tag{13}$$

Используя свойства потенциала двойного и простого слоя (см. [13. гл. V, п. 30]), из (13) при $x \longrightarrow \partial\Omega$ находим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon(x-y)\Big)dS_y = 0, x \in \partial\Omega.$$

Таким образом классическое решение задачи (1)-(2) удовлетворяет граничному условию (6).

Обратно, покажем, что если функция $u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (6), то она совпадает с решением задачи (1)-(2) в Ω.

Действительно, если не так, то функция

$$\nu = u - u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \tag{14}$$

где u - решение задачи (1)-(2), удовлетворяет однородному уравнению $\Delta\nu(x)+\widehat{k}(x)\nu(x) = 0$ и граничному условию (6), т.е. уравнению

$$\Delta\nu(x) + k^2\nu(x) = k^2\Big(\alpha(x) + \beta(x)\Big)\nu(x), x \in \Omega, \tag{15}$$

и граничному условию

$$-\frac{\nu(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y}\nu(y) - \frac{\partial\nu(y)}{\partial n_y}\varepsilon(x-y)\Big)dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \tag{16}$$

В силу теоремы 2 при $k^2 \neq \lambda^D$ решение задач (15)-(16) удовлетворяет

$$\nu(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)k^2\Big(\alpha(y) + \beta(y)\Big)\nu(y)dy. \tag{17}$$

Отсюда и из (14)

$$u(x) - u_1(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)k^2\Big(\alpha(y)+\beta(y)\Big)\Big(u(y)-u_1(y)\Big)dy. \tag{18}$$

Поскольку u - решение задачи (1)-(2), то по лемме 1

$$u(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)k^2\Big(\alpha(y)+\beta(y)\Big)u(y)dy + \int_\Omega \varepsilon(x-y)f(y)dy.$$

Сравнивая полученное с (18), получим

$$u_1(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)k^2\Big(\alpha(y)+\beta(y)\Big)u_1(y)dy + \int_\Omega \varepsilon(x-y)f(y)dy. \tag{19}$$

По замечанию 2, интегральное уравнение (19) имеет единственное решение. Поэтому $u_1 \equiv u$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 3 доказана.

Решение задачи переноса граничных условий из бесконечности.

Из теоремы 3 следует, что решение задачи переноса граничных условий из бесконечности состоит в следующем. Для построения решения задачи (1), (2) (задачи нахождения решения уравнения Гельмгольца (1) с условием (2) излучения Зоммерфельда на бесконечности) в любой ограниченной области Ω необходимо и достаточно при $k^2 \neq \lambda^D$ построить решение краевой задачи (1), (6). При этом внутри области Ω решение задач (1), (2) и (1), (6) полностью совпадают.

Условие $k^2 \neq \lambda^D$ не является существенным ограничением для применения. Так как собственные значения λ^D изменяются с изменением области Ω, то для любых фиксированных значений k^2 можно всегда выбрать такие области Ω, что $k^2 \neq \lambda^D$.

Несмотря на достаточную сложность краевых условий (6), с ними можно вполне плодотворно работать. Так в [10 , Кальменов и Сураган'2009] и [11, Сураган'2009] для случая, когда область Ω является трехмерным шаром построены все собственные значения и собственные функции задачи (1), (6) в явном виде.

Список литературы

[1] *Владимиров В.С. // Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Прикл. матем. и механ. - 1955. - Т. 19, №3. -С. 315–324.*

[2] *Bellman R., Kalaba R., Wing G.C. // On the principle of invariant imbedding and neutron transport theory. J. Math. and Mech. - 1958. - V. 7. -P. 741.*

[3] *Bellman R., Kalaba R., Wing G.C. // On the principle of invariant imbedding and neutron transport theory. J. Math. and Mech. - 1958. - V. 7. -P. 741.*

[4] *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б. Перенос допустимых граничных условий линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва: Наука, 1983. - 224 с.*

[5] *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б. Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва: Наука, 1985. - 325 с.*

[6] *Федорюк М.В. // Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности). Журн. вычисл. матем. и матем. физ.. -1972. - Т. 12, №2. - Р. 374–387.*

[7] *Федорюк М.В. // Уравнение Гельмгольца в волноводе. Журн. вычисл. матем. и матем. физ.. -1971. - Т. 11, №1. - С. 74–89.*

[8] *Безменов И.В. // Перенос условий излучения Зоммерфельда на искусственную границу области, основанный на вариационном принципе. Математический сборник. -1994. - Т. 185, №3. - С. 3–24.*

[9] *Ditkowski A., Suhov A. // Near-field infinity-simulating boundary conditions for the heat equation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. - 1958. - V. 7. -P. 741.*

[10] *Кальменов Т.Ш., Сураган Д. // К спектральным вопросам объемного потециала. Доклады РАН. - 2009. - Т. 428. - С. 16–19.*

[11] *Kalmenov T.Sh., Suragan D. // A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potentials. Operator Theory: Advances and Applications. -2011. -V. 216. - P. 187–210.*

Поступила в редакцию 05 август 2012 года