

УДК 004.02

С.Ж. Токмолдин¹, В.В. Клименов¹, З.Ж. Тулеуов², К.К. Шакенов²¹*Физико-технический институт, Алматы, Казахстан*
*e-mail: klimenov@sci.kz*²*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
e-mail: shakenov2000@mail.ru

Обработка сигналов с помощью быстрого вейвлет-преобразования на суперкомпьютере в системе MATLAB¹

В данной работе рассматриваются теоретические и практические проблемы обработки сигналов. С помощью фильтров вейвлетов и вейвлет-пакетов в системе MATLAB сигналы масштабируются, разлагаются на низкочастотные и высокочастотные составляющие и вейвлет разложением аппроксимирующие коэффициенты раскладываются на аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты. Детализирующие коэффициенты не анализируются. Идеальными фильтрами восстанавливаются сигналы, удаляются шумы и компрессируются, вычисляются энтропии сигналов. Производятся сжатие и сглаживание, оценка шума вейвлет-коэффициентов. Эти обработки проведены на суперкомпьютере в системе MATLAB.

Ключевые слова: Фурье преобразование, вейвлет-преобразование, обработка сигнала, фильтр, удаление шума, компрессия, сжатие, сглаживание, суперкомпьютер, оценка шума вейвлет-коэффициентов, MATLAB.

С.Ж. Тоқмолдин, В.В. Клименов, З.Ж. Төлеуов, Қ.Қ. Шакенов Дабылдарды суперкомпьютерде MATLAB жүйесінде жылдам вейвлет-түрлендірулерімен өңдеу

Бұл жұмыста дабылды өңдеудің теоретикалық және практикалық мәселелері қарастырылады. Вейвлет сүзгіштері мен вейвлет-пакеттерінің көмектерімен MATLAB-та дабылдар масштабталынады, жоғарғы және төменгі жиіліктер құрамына жіктеледі және вейвлет жіктелуімен аппроксимациялаушы коэффициенттері аппроксимациялайтын және деталдайтын болып жіктеледі. Деталдайтын коэффициенттері талданбайды. Идеалды сүзгіштермен дабылдар қалпына келтіріледі. Шуылдардан тазартылады және қысылады. Дабылдардың энтропиялары есептеледі. Сығылу және жайдақтау жүргізіледі және вейвлет-коэффициенттерінің шуылы бағаланады. Осы өңдеулер MATLAB жүйесінде суперкомпьютерде орындалған.

¹Работа выполнена при поддержке грантовых финансирования "Грант по международному сотрудничеству № 1478 КН МОН РК, 2012г." и "Грант КН МОН РК, № 0696/ГФ, 2012г.-2014г."

S.ZH. TOKMOLDIN, V.V. KLIMENOV, Z.ZH. TULEUOV, K.K. SHAKENOV
**The handling of signal using fast wavelet transform (FWT) to
 supercomputing in MATLAB**

In the work the theoretical and practical problems of signal processing are considered. With the help of wavelet filters and of wavelet-packet in MATLAB the signals of scaling's, decompositions of low frequency and high frequency components and the coefficients of approximations by wavelet-development to approximating and detailing coefficients spreading's. The detailing coefficients non-analyze. With the help of ideal filters a signal is restored. The noise is removed and we have compressive data. Compute the entropy of signals and pressure and smoothing and estimation of noise wavelet-coefficients signals. These data processing is conducted to supercomputing in MATLAB.

Постановка задачи. Теория вейвлет-преобразования. На суперкомпьютер поступают пакетами непрерывные или дискретные сигналы. Надо обрабатывать их в следующей последовательности: фильтрация сигналов – разложение сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие; восстановление сигнала идеальными фильтрами; удаление шума и компрессия, сжатие и сглаживание; оценка шума вейвлет-коэффициентов.

Краткое описание теории вейвлет-преобразования. Непрерывное Фурье и вейвлет-преобразование. Важным средством анализа стационарных непрерывных сигналов является преобразование Фурье непрерывного времени. При этом сигнал раскладывается в базис синусов и косинусов различных частот. Количество этих функций – бесконечно большое. Коэффициенты преобразования находятся путем вычисления скалярного произведения сигнала с комплексными экспонентами:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ означает сигнал, а $F(\omega)$ его преобразование Фурье. Отметим недостатки преобразования Фурье с практической точки зрения. Во-первых, для получения преобразования на одной частоте требуется вся временная информация. Это означает, что должно быть известно будущее поведение сигнала. Далее, на практике не все сигналы стационарные. Пик в сигнале во временной области распространится по всей частотной области его преобразования Фурье. Для преодоления этих недостатков в Фурье преобразование (1) вводится кратковременное, или оконное преобразование Фурье $SWF(\omega, b)$ (Short Window Fourier):

$$SWF(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\omega x) w(x - b) dx, \quad (2)$$

в котором применяется операция умножения сигнала на окно перед применением преобразования Фурье. Окном $w(x - b)$ является локальная функция, которая сдвигается вдоль временной оси для вычисления преобразования в нескольких позициях b . Преобразование становится зависимым от времени, и в результате получается частотно-временное описание сигнала. В качестве окна часто выбирается функция Гаусса, и в этом

случае обратное преобразование тоже будет выполняться с использованием оконной функции Гаусса. В нашем случае также используются многие другие окна, в зависимости от конкретного приложения. Но оконное преобразование Фурье имеет также ряд недостатков. Главный недостаток состоит в том, что при его вычислении используется фиксированное окно, которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала. Вейвлет-преобразование решает эту и некоторые другие проблемы. Непрерывное вейвлет-преобразование $CWT(a, b)$ (Continuous Wave Transform) есть скалярное произведение $f(x)$ и базисных функций

$$\psi_{a,b}(x) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

так что

$$CWT(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx. \quad (4)$$

. Базисные функции $\psi_{a,b}(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ являются вещественными и колеблются вокруг оси абсцисс. Они определены на некотором интервале. Данные функции называются вейвлетами (короткие волны) и могут рассматриваться как масштабированные и сдвинутые версии функции-прототипа $\psi(x)$. Параметр b показывает расположение во времени, а параметр a – параметр масштаба. Большие значения соответствуют низким частотам, а малые – высоким. Операция умножения на окно как бы содержится в самой базисной функции, которая позволяет сужать и расширять это окно. Отсюда появляется возможность адаптивного к сигналу выбора параметров окна.

Вейвлет-ряды дискретного времени. В нашей задаче входные сигналы являются дискретными. Поэтому с точки зрения практики представляют интерес дискретные аналоги $CWT(a, b)$ и $CWS(a, b)$ (Continuous Wave Series). Разбиение частотно-временного плана для $SFT(a, b)$ (Short Fourier Transform) и $CWT(a, b)$. В соответствии с принципом неопределенности сужение окна анализа во временной области вызывает расширение его в частотной. Таким образом, площадь окна остается постоянной. Для того чтобы было возможно обратное получение $f(x)$ из результата $CWT(a, b)$, функция $\psi(x)$ должна удовлетворять следующему условию:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (5)$$

где через $\Psi(\omega)$ обозначено преобразование Фурье $\psi(x)$. Если $\psi(x)$ – локальная функция, то ее среднее значение равно нулю: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0$. Тогда формула реконструкции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} CWT(a, b) a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}. \quad (6)$$

Из последней формулы видно, что $f(x)$ может быть выражена через сумму базисных функций $\psi_{a,b}(x)$ с весами $CWT(a, b)$. Параметры a и b меняются непрерывно, и поэтому множество базисных функций избыточно. Необходимо дискретизация значений a и b при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация осуществляется следующим образом:

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad a_0 > 1, \quad \forall b_0 \neq 0. \quad (7)$$

Отсюда видно, что параметр местоположения зависит от параметра масштаба. С увеличением масштаба увеличивается размер шага сдвига. Для дискретных значений a и b вейвлет-функции имеют вид

$$\psi_{m,n}(a, b) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - n). \quad (8)$$

$CWS(a, b)$ определяется путем дискретизации $CWT(a, b)$:

$$CWS_{m,n} = d_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - n) f(x) dx. \quad (9)$$

Восстановление $f(x)$ из последовательности возможно в том случае, если существуют числа $A > 0$ и $B < \infty$, такие что

$$A \|f(x)\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_{m,n}|^2 \leq B \|f(x)\|^2 \quad (10)$$

для всех $f(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Это означает, что хотя реконструкция $f(x)$ из ее вейвлет-коэффициентов может не совпадать точно с $f(x)$, она будет близка к ней в среднеквадратическом смысле. Если $A = B = 1$ и $a_0 = 2$, то возможно полное восстановление, и семейство базисных функций $\psi_{a,b}(x)$ образует ортогональный базис. Тогда

$$f(x) = C_\psi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{m,n} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - n). \quad (11)$$

Если базисные функции нормализованы, то $C_\psi = 1$. Этим мы дали определения вейвлет-преобразования и вейвлет-рядов функций непрерывного времени по аналогии с соответствующими формулами для преобразования и рядов Фурье. Наконец, опуская некоторые математические выкладки, и представление функций при помощи вейвлетов мы дадим определение вейвлет-рядов дискретного времени. В большинстве приложений, и в нашем случае, мы имеем дело с дискретными сигналами. Поэтому дадим дискретные аналоги CWT и CWS , которые преобразуют дискретный сигнал в непрерывный и дискретный сигналы, соответственно. Формулы для вейвлет-преобразования и рядов вейвлетов дискретного времени, DWT (Discrete Wave Transform) и DWS (Discrete Wave Series), нельзя получить простой дискретизацией соответствующих формул для непрерывного времени. Также невозможно определить кратномасштабный анализ для дискретных сигналов, так как не существует базисных функций, масштабированные и смещенные версии которых давали бы нам базис пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, пространства квадратично

суммируемых последовательностей бесконечной длины. По этой причине, мы, ссылаясь к работе [1], дадим формулы для вычисления DWT , по аналогии DFT (Discrete Fourier Transform). Предположим, что сигнал, подвергаемый преобразованию, c_n имеет длину $N = 2^d$. Периодически продолжим его. Тогда получим периодический сигнал \tilde{c}_n с периодом N . Тогда получим

$$\left(DWT_c\right)_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{m=-M}^M g_{n-2^j k}^j \tilde{c}_n, \quad 1 \leq j < d, \quad 0 \leq k < N2^{-j}, \quad (12)$$

$$\left(DWT_c\right)_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{m=-M}^M h_{n-2^j k}^j \tilde{c}_n, \quad j = d, \quad k = 0, \quad (13)$$

где последовательность g_n получается из последовательности h_n по формуле

$$g_n = (-1)^n h_{-n+2t+1}. \quad (14)$$

Здесь последовательность h_n – "шаги" связанные с масштабирующей функцией, и для них выполнено условие нормировки $\sum_i h_i = 1$, то есть они являются некоторыми коэффициентами масштаба, аналогичными шагам по пространственной переменной в схемах конечной разности. Естественно, что последовательности g_n и h_n связаны с базисными функциями, следовательно, они являются масштабирующими последовательностями (функциями), и они также связаны с семейством вейвлет-функций. Эти факты позволяет нам записать любую функцию $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ в виде суммы функций вейвлетов. Ряд DWS может быть записан аналогично выражению (12) и (13)

$$\left(DWS_c\right)_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{m=-M}^M g_{n-2^j k}^j c_n, \quad j \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Отметим, что (15) не является дискретизированной версией непрерывного ряда CWS , так как вместо функции $\psi(x)$ здесь мы имеем последовательность $2^{j/2} g_n$. Однако, дискретная формула сходится в пределе к непрерывной. Теоретические и некоторые практические вопросы Фурье, Быстрое-Фурье и Вейвлет, и Быстрое-вейвлет преобразований были рассмотрены на международном конференции *International Conference Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators*. June 25 – 30, 2012, at Aalto University near Helsinki, Finland. Например, в следующих работах [3], [4], [5], [6] рассматривались современные актуальные проблемы Фурье, Быстрое-Фурье и Вейвлет, и Быстрое-вейвлет преобразований и их применения.

Вейвлеты в системе MATLAB. [2].

Рассмотрим семейство вейвлетов, используемые в MATLAB. При работе с вейвлетами удобно пользоваться главным меню пакета расширения Toolbox (User GUI), которое вызывается по команде `wavemenu`. Для получения первоначальной информации о вейвлетах можно использовать следующие функции: `waveinfo` – информация о вейвлетах; `wavefun` – вейвлет-функции и ; `intwave` – первообразная вейвлет-функции ; `centfrq` – центральная частота вейвлетов; `meyer` – вейвлет Майера; `meyeraux` – вспомогательная

функция вейвлета Майера; `gauswavf` – гауссов вейвлет; `mexihat` – вейвлет "мексиканская шляпа"; `morlet` – вейвлет Морле; `cgauwavf` – комплексный гауссов вейвлет; `cmorwavf` – комплексный вейвлет Морле; `fbspwavf` – комплексный частотный **B**-сплайновый вейвлет; `shanwavf` – вейвлет Шеннона; Приведем список имен основных вейвлетов в системе MATLAB. `Haar` – вейвлеты Хаара, `Db` – вейвлеты Добеши, `Sym` – Симплеты, `Coif` – Койфлеты, `Bior` – биортогональные вейвлеты, `Rbio` – дуальные биортогональные вейвлеты, `Meu` – вейвлеты Мейера, `Dmeu` – дискретные аппроксимации вейвлетов Мейера, `Gaus` – Гауссовы вейвлеты, `Mexh` – вейвлет "мексиканская шляпа" `Morl` – вейвлеты Морле, `Cgau` – комплексные гауссовы вейвлеты, `Shan` – вейвлеты Шеннона, `Fbsp` – частотные **B**-сплайновые вейвлеты, `Сmor` – комплексные вейвлеты Морле. Информации об этих вейвлетах вызывается командой `waveinfo('wname')`.

Фильтры вейвлетов. С каждым вейвлетом можно связать несколько фильтров. Первый фильтр – это масштабирующий фильтр W , состоящий из коэффициентов $\{w_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, участвующих в основном в уравнении кратномасштабного анализа. Масштабирующее уравнение пишут в виде $\varphi(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \varphi(2x - n)$, где φ – масштабирующая функция вейвлета, обычно $w_n = \left(1/\sqrt{2}\right)h_n$. При разложении сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие используются два фильтра разложения, которые связаны с масштабирующим фильтром W . В MATLAB-е используются две функции; первая функция вычисляет масштабирующий фильтр W вейвлета и вторая – для нахождения фильтров разложения и восстановления. Масштабирующие фильтры: `dlwavf` – вейвлет фильтр Добеши; `symwavf` – фильтр симплета; `coifwavf` – фильтр койфлета; `biorwavf` – фильтр биортогонального сплайнового вейвлета; `rbiorwavf` – обратные биортогональные сплайновые фильтры. Фильтры разложения и восстановления: `orthfilt` – набор фильтров разложения и восстановления ортогонального вейвлета; `biorfilt` – набор фильтров биортогонального вейвлета; `wfilters` – фильтры вейвлета; `qmf` – квадратурный зеркальный фильтр.

Одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование. В одноуровневом дискретном вейвлет-преобразовании используются следующие функции: `dwt` – одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование; `idwt` – обратное одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование; `dwtmode` – мода расширения дискретного вейвлет-преобразования.

Многоуровневый одномерный вейвлет-анализ. Рассматривается разложение сигналов на несколько уровней. В многоуровневом дискретном одномерном вейвлет-анализе участвуют следующие функции: `wavedec` – многоуровневое одномерное вейвлет-разложение; `waverec` – многоуровневое одномерное вейвлет-восстановление; `apprcoef` – вычисляет аппроксимирующие коэффициенты **1-D** сигнала; `detcoef` – вычисляет детализирующие коэффициенты **1-D** сигнала; `urwlev` – одноуровневая реконструкция одномерного вейвлет-разложения; `wrcoef` – восстановление сигнала по одной ветви вейвлет-коэффициентов; `urcoef` – прямое восстановление из коэффициентов; `swt` – дискретное вейвлет-преобразование стационарного сигнала; `iswt` – обратное вейвлет-преобразование стационарного сигнала.

Вейвлет-пакеты.

Вейвлет-пакеты в MATLAB. При обычном ортогональном вейвлет-разложении аппроксимирующие коэффициенты раскладываются на аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты более низкого уровня, а затем процедура применяется к вновь полученным аппроксимирующим коэффициентам. Детализирующие коэффициенты не анализируются. Идея пакетного вейвлет-анализа состоит в том, чтобы раскладывать также и детализирующие коэффициенты, используя тот же самый метод разложения. Это дает более богатый анализ: двоичное дерево коэффициентов разложения, начинающееся с исходного сигнала $s(0, 0)$. При разложении данных некоторого узла ниже слева находится аппроксимирующие коэффициенты, а справа – детализирующие коэффициенты. Пакетные вейвлет-функции $w_n(x)$ могут быть определены рекурсивно. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – ортогональные масштабирующая функция и вейвлет с фильтрами h_n и g_n соответственно. Полагаем $w_0 = \varphi(x)$ и $w_1 = \psi(x)$ и определим для любого натурального n функции $w_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k w_n(2x - k)$, $w_{2n+1}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k w_n(2x - k)$. Обозначим символом Ω_n пространство, порожденное целочисленными сдвигами функций $w_n(x)$. Пространства Ω_0 и Ω_1 соответствуют введенным ранее "начальным" значениям $w_0 = \varphi(x)$ и $w_1 = \psi(x)$. Известно, что функции $w_n(x - k)$ для любых целых k и неотрицательных целых n образуют базис пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$ есть разложение пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ в ортогональную прямую сумму замкнутых подпространств. **Разложение функции $f(x)$ по базису $w_n(x - k)$ называется вейвлет-пакетным разложением.** Основные функции пакетного вейвлет-анализа: `wrdec` – пакетное вейвлет-разложение одномерного сигнала; `plot` – дерево пакетного вейвлет-разложения; `allnodes` – нумерация узлов дерева; `wrcoef` – коэффициенты пакетного вейвлет-преобразования; `wrrec` – пакетное вейвлет-восстановление **1-D**; `wrcoef` – восстановление по коэффициентам пакетного преобразования; `wrsplt` – расщепление узла вейвлет-пакетного дерева; `wrcutree` – обрезание пакетного дерева; `wrjoin` – отрезание отдельных ветвей дерева; `tnodes` – определение терминальных узлов; `write (read)` – запись (считывание) значений в терминальные узлы дерева; `wentropy` – вычисление энтропии сигнала; `entrupd` – замена функции энтропии в пакетном анализе; `besttree` – наилучшее дерево пакетного вейвлет-разложения; `bestlevt` – дерево пакетного вейвлет-разложения наилучшего уровня.

Вычисление энтропии сигнала.

Вычисление энтропии сигнала. Энтропия – общая концепция оценки информативности, в частности, в обработке сигналов. Для вычисления энтропии сигнала используется функция `wentropy`, и используется при выборе оптимального пакетного вейвлет-разложения. Полное дерево пакетного вейвлет-разложения содержит много коэффициентов. Изучение всех полученных коэффициентов пакета затруднительно ввиду их большого числа. Кроме того, некоторые из коэффициентов могут быть малоинформативными. Поэтому важно получить не все дерево, а некоторые поддерево оптимальной величины в смысле числа коэффициентов и их информативности. Представляет интерес нахождение оптимального разложения относительно удобного критерия. Поэтому для оценки дерева разложения естественно использовать классические критерии на основе энтропии, которые обладают свойством аддитивности (объединения) по отно-

шению к сигналам и дают информационные оценки сигнала. Рассматриваются четыре различные критерий энтропии. Если обозначим через s сигнал и через s_i значение этого сигнала, то через сумму значений сигналов s_i , поскольку она обладает свойством аддитивности по отношению к объединению массивов, мы можем определить четыре различные энтропии. 1. Энтропия Шеннона ('shannon'): $E1(s) = -\sum_i s_i^2 \log(s_i^2)$, здесь при согласовании: $0 \cdot \log(0) = 0$. 2. Норма пространства l^p , $p \geq 1$ ('norm'): $E2(s) = \sum_i |s_i|^p = \|s\|_p^p$. 3. Энтропия логарифм энергии ('log energy'): $E3(s) = \sum_i \log(s_i^2)$ при следующем согласовании: $\log(0) = 0$. 4. Пороговая энтропия ('threshold'): $E4(s) = 1$, если $|s_i| > \varepsilon$ и 0 – в противном случае, тогда $E4(s)$ есть число элементов сигнала, величина которых больше порогового значения ε . 5. Энтропия "SURE" $E5(s)$. Смотри: Help Matlab: Wavelet Toolbox *Using the Wavelet Toolbox Advanced Concepts Choosing the Optimal Decomposition*. Описание функции `wentropy`. $E = \text{wentropy}(X, T, P)$, $E = \text{wentropy}(X, T)$ Функция $E = \text{wentropy}(X, T, P)$ вычисляет энтропию E вектора X ; T указывает тип энтропии: 'shannon', 'norm', 'log energy', 'threshold', 'sure', 'user'. P – дополнительный параметр: 'shannon' или 'log energy' P – не используется; 'threshold' или 'sure' – тогда P – пороговое значение, $P > 0$; 'norm' – тогда P – степень ($P \geq 1$); 'user' – тогда P определен как имя функции, определенный пользователем. $\{E = \text{wentropy}(X, T)\} \equiv \{E = \text{wentropy}(X, T, 0)\}$.

Удаление шума и компрессия.

Удаление шума, компрессия. В простейшей модели прилагается, что зашумленный сигнал имеет вид $s(n) = f(n) + \sigma e(n)$, где $f(n)$ – полезный сигнал, σ – уровень шума и $e(n)$ – гауссов белый шум, т.е. стационарная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием, абсолютно некоррелированная и с дисперсией, равная единице, $\mathbf{E}(e(n)) = 0$, $\mathbf{Var}(e(n)) = 1$. Название "белый шум" отражает тот факт, что такой сигнал имеет постоянный спектр на всех частотах по аналогии с белым светом, имеющим в видимой части равномерный сплошной спектр. Цель состоит в том, чтобы подавить шумовую часть сигнала и восстановить $f(n)$. **Обработка вейвлет-коэффициентов для удаления шума.** При вейвлет-анализе сигнал раскладывается на аппроксимирующие коэффициенты, которые представляют сглаженный сигнал, и детализирующие коэффициенты, описывающие колебания. Следовательно, шумовая компонента больше отражается в детализирующих коэффициентах cD_i . Поэтому при удалении шума обрабатываются обычно детализирующие коэффициенты. Второе предположение заключается в том, что шумовая компонента представляет собой сигнал, меньший по модулю, чем основной. Поэтому простейший способ удаления шума состоит в том, чтобы сделать нулевыми значения коэффициентов, меньшие некоторого порогового значения. Эта процедура называется пороговой обработкой (трешолдингом) коэффициентов. Широко распространены такие методы пороговой обработки, как жесткий трешолдинг и мягкий трешолдинг. При решении задачи шумоподавления необходимо: оценить спектральный состав шумовой компоненты, выбрать тип пороговой обработки (трешолдинга) и критерий расчета самого порога. От выбора порогового уровня фона (оценка дисперсии шума) зависит качество шумоподавления сигнала, оцениваемое в виде отношения сигнал/шум. Задание малых значений порога сохраняет фон в коэффициентах детализации и поэтому приводит лишь к незначительному увеличению отношения сигнал/шум. При больших

значениях порога можно потерять коэффициенты, которые несут существенную информацию. Поиск оптимального значения – величины порога означает отыскание такого порога, который при наименьшем смещении восстановленного сигнала обеспечивает наибольшее значение отношения сигнал/шум. Критерий Штейна несмещенной оценки риска (Stein's unbiased risk estimation) позволяет определить оптимальное значение порога τ , соответствующее уровню i разложения сигнала, как аргумент некоторой функции риска $R_i(\tau)$, при котором данная функция принимает минимальное значение. Качество шумоподавления сигнала (отношение сигнал/шум) зависит также от способа применения трешолдинга. Используются следующие способы пороговой обработки: 1. Общий трешолдинг, осуществляемый с использованием фиксированного значения порога τ – значения, единого для всех уровней и коэффициентов детализации сигнала; 2. Многоуровневый трешолдинг, осуществляемый с использованием порога τ , значения которого изменяются от уровня к уровню; 3. Локальный трешолдинг, подразумевающий использование порога τ , переменного не только по уровню разложения, но также зависящего от позиции коэффициентов детализации на данном уровне. Итак, процедура удаления шума сигнала и компрессии изображения состоит из трех шагов. 1. Декомпозиция. Выбирается вейвлет и уровень разложения N . Вычисляется вейвлет-разложение исходного сигнала до уровня N . 2. Пороговая обработка детализирующих коэффициентов. Для каждого уровня от 1 до N выбирается порог и применяется мягкая (а в случае изображений – жесткая) пороговая обработка детализирующих коэффициентов. 3. Реконструкция. Производится вейвлет-реконструкция, основанная на первоначальных аппроксимирующих коэффициентах уровня N и модифицированных детализирующих коэффициентах уровней от 1 до N .

Функции MATLAB для удаления шума. Основные функции очистки сигналов от шума: `thselect` – выбор порога для удаления шума **1-D**; `wthresh` – мягкая или жесткая пороговая обработка (**1-D**, **2-D**); `wthcoef` – пороговая обработка; `wthcoef2` – двумерная пороговая обработка; `wprthcoef` – пороговая обработка пакетных коэффициентов (**1-D**, **2-D**); `wden` – автоматическое удаление шума **1-D**; `wdenctr` – удаление шума и сжатие при помощи вейвлетов (**1-D**, **2-D**); `wnoisest` – оценка шума **1-D** вейвлет-коэффициентов; `wbmrpn` – штрафной порог для **1-D** или **2-D** удаления шума; `wrbmrpn` – штрафной порог удаления шума вейвлет-пакета; `wdcbm` – трешолдинг **1-D** сигналов по стратегии Birge-Massart; `wdcbm2` – трешолдинг **2-D** сигналов по стратегии Birge-Massart; `ddenctr` – параметры по умолчанию для удаления шума (**1-D**, **2-D**); `randn` – нормально распределенные случайные числа и массивы. **Тестовые сигналы в MATLAB.** Тестовые демонстрационные сигналы являются файлами типа *.mat и загружаются командой `load`, после которой можно указать диапазон этого массива. Например, `vonkoch.mat` – фрактальный сигнал длины 81926 его фрагмент длины 510 загружается командой `loadvonkoch; s = vonkoch(1 : 510); plot(s)`. Список наиболее популярных сигналов (полный список имен тестовых сигналов и графики Wavelet Toolbox можно найти на сайте matlab.ru): `vonkoch` – фрактальная кривая Коха; `wcantor` – канторова лестница; `sinfract` – фрактал с синусоидальной огибающей; `leleccum` – демонстрационный сигнал с шумом; `nearbrk` – демонстрационный сигнал с шумом; `sumsin` – демонстрационный сигнал на основе синуса; `noisdopp` – доплерова кривая, напоминает с шумом; `ndopp1` – доплерова кривая с шумом; `noisbloc` – зашумленные прямоугольные импульсы; `whitnois` – белый шум; `wstep` – ступенчатый сигнал; `brkintri` – треугольник; `noispol` – полиноми-

альный сигнал; `wnioslop` – демонстрационный сигнал с шумом; `wntsrin` – суперпозиция зашумленной треугольной функции и синусоиды; `freqbrk` – временное и частотное распределение двух гармоник; `poissin` – композиция синусоиды и аддитивного шума; `qdc chirp` – осциллирующий сигнал; `sumlichr` – комбинация линейно-развернутых синусоид; `sumsin` – сумма синусов.

Обработка сигналов.

Обработка сигналов на суперкомпьютере. Поступающие, Рисунки входящих сигналов (Рисунок1 – Рисунок3), на суперкомпьютеры в КазНУ и в КазНТУ, сигналы были обработаны поэтапно в системе MATLAB. Были удалены шумы, произведены компрессия, сжатие и сглаживание входящих сигналов. Выбрав вейвлет (**Wavelet**) и его порядок, уровень (**Lavel**) вейвлет-разложения и тип энтропии (**Entropy**) и запустив команду (**Analyse**) произведем пакетное вейвлет разложение. На нашем графике не указаны дерево пакетного разложения, изображение коэффициентов в узлах дерева и величины коэффициентов. Приведены только входные сигналы и обработанные сигналы. Опции (**Compress**) и (**De-noise**) открывают новые окна, предназначенные для сжатия и удаления шума. После выполнения команды (**De-noise**) получаем сигнал очищенный от шума. Замечано, что сжатие сигнала удаляет большую часть шума. Отметим, что в данной работе не выполнены следующие процедуры: 1. Реконструкция сигнала по выбранным узлам (**Select Nodes and**), (**Reconstruct**); 2. Определение полного размера(**Full Size**); 3. Окраска коэффициентов.

Статистические характеристики коэффициентов разложения. В комплексе программ (**Wavelet 1-D**) предусмотрена возможность вычисления статистических характеристик компонент разложения. Для этого необходимо запустить команду (**Statistic**). Появится новое окно (**Wavelet 1-D Statistics**), содержащее статистические данные об исходном сигнале.

Ниже приведены графики входящих сигналов для обработки на суперкомпьютере в системе MATLAB. После приведены графики обработанных входящих сигналов. А также приведен график вейвлет-преобразования музыкальной ноты "до".

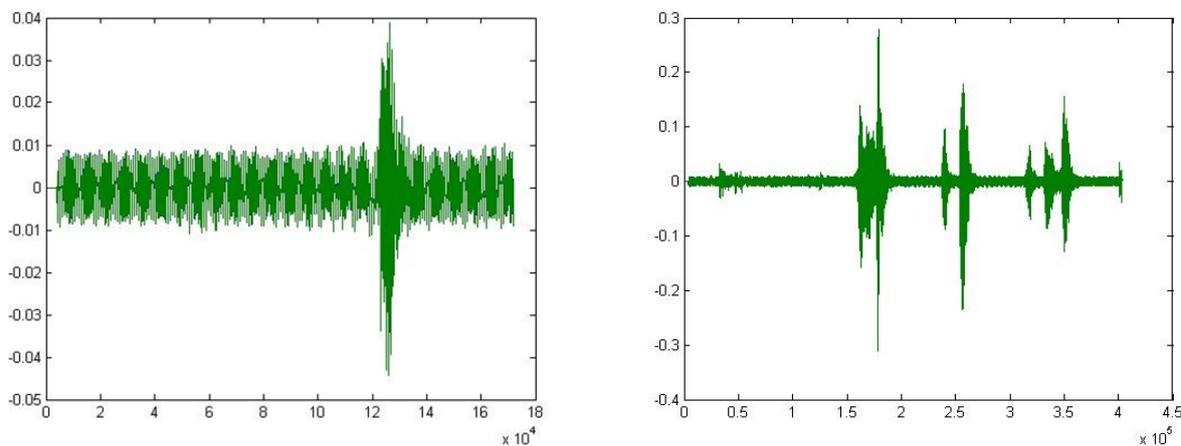


Рисунок 1. Входящих сигналов.

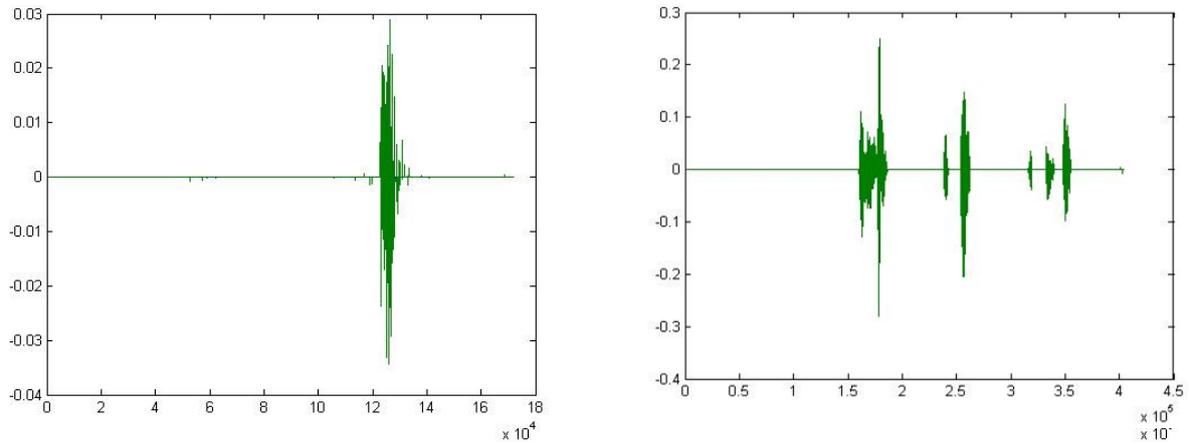


Рисунок 2. Соответствующих обработанных сигналов.

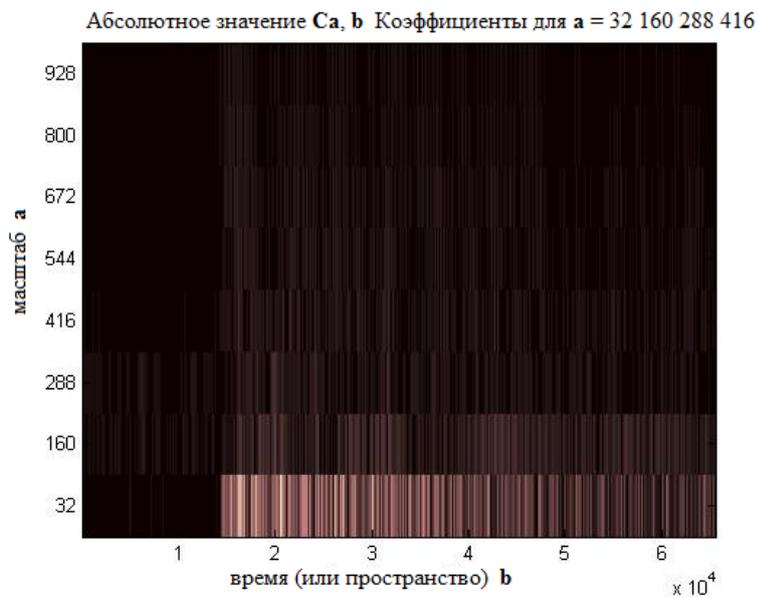


Рисунок 3. Вейвлет-преобразования музыкальной ноты "до".

Список литературы

- [1] Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – С.-Петербург: Военный университет связи, 1999. - 204 с.

- [2] *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. Издание второе, дополненное и переработанное. – М.: ДМК Пресс, 2005. - 304 с.
- [3] *Kanat Shakenov* The solution of the initial mixed boundary value problem for hiperbolic equations by Monte Carlo and probability difference methods. / Abstract. International Conference "Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators". – Helsinki, 2012. – P. 49.
- [4] *Sergey Tikhonov* Measures of smoothness and Fourier transforms. / Abstract. International Conference "Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators". – Helsinki, 2012. – P. 51.
- [5] *Jasson Vindas* Tauberian class estimates for wavelet and non-wavelet transforms of vector-valued distributions. / Abstract. International Conference "Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators". – Helsinki, 2012. – P. 53.
- [6] *Patrik Wahlberg* The global wave front set and the short-time Fourier transform. / Abstract. International Conference "Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators". – Helsinki, 2012. – P. 54.

Поступила в редакцию 29 июля 2012 года