УДК 517.938

С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев, Е.М. Поздеева

Механико-математический факультет, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К краевой задаче обыкновенных дифференциальных уравнений *

Предлагается метод решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений. Основой метода является принцип погружения, основанный на общем решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода, который позволяет свести исходную краевую задачу к специальной задаче оптимального уравнения.

Ключевые слова: краевая задача обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, принцип погружения, задача оптимального управления, оптимизационная задача.

С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев, Е.М. Поздеева

Жай дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есебіне

Фазалық және интегралдық шектеулері берілген жағдайдағы шекаралық шарттары бар жай дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есебін шешу әдісі ұсынылады. Әдістің негізі – берілген шекаралық есепті арнайы түрдегі оптималды теңдеу есебіне келтіре алатын Фредгольмның бірінші текті интегралдық теңдеуінің жалпы шешіміне негізделген арту принципі.

S.A. Aisagaliev, M.N. Kalimoldayev, E.M. Pozdeeva

On the boundary problem of ordinary differential equations

Building the solution of the boundary problem of ordinary differential equations with local and non-local relations, as well as with state constraints is little-investigated problem of the qualitative theory of differential equations. The paper presents a method of solving the boundary problem of ordinary differential equations with boundary conditions if there are phase and integral constraints. The method is based on immersion principle, which is based on the general solution of the Fredholm integral equation of the first kind, which allows to reduce the initial boundary problem into the special problem of the optimal equation. Necessary and sufficient conditions for an existence of solving the boundary problem, as well as the building of its solution are obtained. The essence of the method is that in the first phase of the study by transformation of and bringing in a fictitious control the initial problem is

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 1619/ГФ, 2012г.-2014г.

immersed in the task of manageability. Then, the existence of solutions of the initial problem and the construction of its solution is carried out by solving the problem of optimal control of a special kind. In this approach, the necessary and sufficient conditions for existence of solving the boundary problem can be obtained from the condition for achieving the lower limit of the functional on a given set, and solutions of the original boundary problem are limit points of minimizing sequences.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,t) + \mu(t), \ \ t \in I = [t_0, t_1] \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n} \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n | \gamma(t) \leq F(x,t) \leq \delta(t), \ \ t \in I\}, \tag{3}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(x) \leq c_j, \ \ j = \overline{1, m_1}; \tag{4}$$

$$g_j(x) = c_j, \ \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}; \tag{5}$$

$$g_j(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),t)dt, \ l; j = \overline{1, m_2}; \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – заданные матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n$, $n \times m$ соответственно, $\mu(t)$, $t \in I$ – заданная n - мерная вектор-функция с кусочно-непрерывными элементами, m - мерная вектор-функция $f(x,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $(x,t) = R^n \times I$ и удовлетворяет условиям:

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq l|x - y|, \quad \forall (x,t), \ \ (y,t) \in R^n \times I, \ \ l = const > 0,$$

$$|f(x,t)| \leq c_0|x| + c_1(t), \quad c_0 = const \geq 0, \quad c_1(t) \in L_1(I, R^1),$$

S – заданное выпуклое замкнутое множество. Функция $F(x,t) = (F_1(x,t), \ldots, F_r(x,t))$, $t \in I$ – r - мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности аргументов, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_r(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t), \ldots, \delta_r(t))$, $t \in I$ – заданные непрерывные функции.

Величины c_j, $j = \overline{1, m_2}$ – заданные постоянные, $f_{0j}(x,t)$, $j = \overline{1, m_2}$ – заданные непрерывные функции по совокупности аргументов, удовлетворяющих условиям

$$|f_{0j}(x,t) - f_{0j}(y,t)| \leq l_j|x - y|, \quad \forall (x,t), \ \ (y,t) \in R^n \times I, \ \ j = \overline{1, m_2};$$

$$|f_{0j}(x,t)| \leq c_{0j}|x| + c_{1j}(t), \quad c_{0j} = const, \quad c_{1j} \in L_1(I, R^1), \ \ j = \overline{1, m_2}.$$

Заметим что: 1) если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x,t) + \mu(t) = \overline{f}(x,t), \ \ t \in I. \tag{7}$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (7) при условиях (2)-(6);

2) если $f(x,t) = x + \mu_1(t)$ (либо $f(x,t) = C(t)x + \mu_1(t)$), то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)x + B(t)\mu_1(t) + \mu(t) = \overline{A}(t)x + \overline{\mu}(t), \ \ t \in I, \tag{8}$$

где $\overline{A}(t) = A(t) + B(t)$, $\overline{\mu}(t) = B(t)\mu_1(t) + \mu(t)$. Отсюда следует, что уравнение (8) является частным случаем уравнения (1).

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1)-(6).

Задача 2. Построить решение краевой задачи (1)-(6).

Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0, x_1) \in S$ такой, что решение системы (1), исходящее из точки x_0 в момент времени t_0, проходит через точку x_1 в момент времени t_1, при этом вдоль решения системы (1) для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (6) удовлетворяют условиям (4), (5). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} | H_j(x_0, x_1) \leq 0, \ \ j = \overline{1,p};$$

$$< a_j, x_0 > + < b_j, x_1 > - d_j = 0, \ \ j = \overline{p+1, s}\},$$

где $H_j(x_0, x_1)$, $j = \overline{1,p}$ – выпуклые функции относительно переменных (x_0, x_1), $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $d_j \in R^1$, $j = \overline{p+1, s}$ – заданные векторы и числа, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение.

Во многих случаях на практике исследуемый процесс описывается уравнением вида (1) в области фазового пространства системы, определяемой фазовым ограничением вида (3). Вне указанной области процесс описывается совершенно другими уравнениями либо исследуемый процесс не существует. В частности, такие явления имеют место в исследованиях динамики ядерных и химических реакторов (вне области (3)реакторы не существует). Интегральные ограничения вида (4) характеризуют суммарные нагрузки, испытываемые элементами и узлами системы (напр. суммарная перегрузка космонавтов), которые не должны превосходить заданных величин, а равенства вида (5) соответствуют суммарным ограничениям, налагаемым на систему (напр., расход топлива равен заданной величине).

Суть предлагаемого метода состоит в том, что на первом этапе исследования путем преобразования и введения фиктивного управления исходная задача погружается в задачу управляемости. Далее, существование решения исходной задачи и построение ее решения осуществляется путем решения задачи оптимального управления специального вида. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1)-(6) могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решение исходной краевой задачи являются предельными точками минимизирующих последовательностей.

1. Преобразование

Полагаем, что $f_0(x,t) = (f_{01}(x,t), \dots, f_{0m_2}(x,t))$, где

$$f_0(x,t) = C(t)x + \overline{f_0}(x,t), \quad t \in I, \tag{9}$$

где $C(t)$, $t \in I$ – известная матрица порядка $m_2 \times n$ с кусочно-непрерывными элементами, $\overline{f}_0(x,t) = (\overline{f}_{01}(x,t), \dots, \overline{f}_{0m}(x,t))$. Если j-ая строка матрицы $C(t)$ равна нулю, то $f_{0j}(x,t) = \overline{f}_{0j}(x,t)$. Таким образом, без ущерба общности, можно считать, функция $f_0(x,t)$ определяется по формуле (9). Путем введения дополнительных переменных $d = (d_1, \dots, d_{m_1}) \in R^{m_1}$, $d \geq 0$, соотношения (4), (6) можно представить в виде

$$g_j(x) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),t)dt = c_j - d_j, \quad j = \overline{1, m_1},$$

где

$$d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1} | \ d \geq 0\}.$$

Пусть вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$, где $\bar{c}_j = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\bar{c}_j = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$. Введем вектор-функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$, где

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau),\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тогда

$$\dot{\eta} = f_0(x(t),t) = C(t)x + \overline{f}_0(x,t), \quad t \in I$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar{c}, \quad d \in \Gamma.$$

Теперь исходная краевая задача (1)-(6) запишется в виде

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P\xi,t) + B_2\overline{f}_0(P\xi,t) + B_3\mu(t), \quad t \in I, \tag{10}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \tag{11}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad P\xi(t) \in G(t), \quad t \in I, \tag{12}$$

где

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ C(t) & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,m} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} I_n \\ O_{m_2,n} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I_n, & O_{n,m_2} \end{pmatrix}, \quad P\xi = x,$$

$O_{j,k}$ – матрица порядка $j \times k$ с нулевыми элементами, $O_q \in R^q$ – вектор $q \times 1$ с нулевыми элементами, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m_2})$.

2. Интегральное уравнение

Основой предлагаемого метода решения задач 1, 2 являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u(t)dt = a, \tag{13}$$

где $K(t_0,t) = \|K_{ij}(t_0,t)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированном t_0, $u(\cdot) \in L_2[I, R^m]$ – искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $a \in R^n$ – заданный n-мерный вектор.

Теорема 1 *Интегральное уравнение* (13) *при любом фиксированном* $a \in R^n$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt, \tag{14}$$

порядка $n \times n$ *является положительно определенной, где (*) – знак транспонирования.*

Теорема 2 *Пусть матрица* $C(t_0,t_1)$ *положительно-определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения* (13) *имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt, \quad t \in I, \tag{15}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *– произвольная функция,* $a \in R^n$ *– любой вектор.*

Доказательства теорем 1, 2 приведены в работах [2, 3]. Приложение теорем 1, 2 для решения задачи управляемости и оптимального управления изложены в [4-7].

3. Принцип погружения

Наряду с дифференциальным уравнением (10) с краевыми условиями (11), рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2(t)w_2(t) + \mu_2(t), \quad t \in I, \tag{16}$$

$$y(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad y(t_1) = \xi_1 = (x_1, \overline{c}), \tag{17}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{18}$$

где $\mu_2(t) = B_3\mu(t)$, $t \in I$.

Пусть матрица $\overline{B}(t) = (B_1(t), B_2(t))$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + m)$, а вектор-функция $w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \in L_2(I, R^{m+m_2})$. Легко убедиться в том, что управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, которое переводит траекторию системы (16) из любого начального состояния ξ_0 в любое желаемое состояние ξ_1, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\overline{B}(t)w(t)dt = a, \tag{19}$$

где $\Phi(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\omega}=A_1(t)\omega$, вектор

$$a = a(\xi_0,\xi_1) = \Phi(t_0,t_1)[\xi_1 - \Phi(t_1,t_0)\xi_0] - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu_2(t)dt.$$

Как следует из (13), (19), матрица $K(t_0,t) = (t_0,t)\overline{B}(t)$. Введем следующие обозначения

$$\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1) = T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + \mu_3(t) = E(t)a, \quad t \in I,$$

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\overline{B}(t)\overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt, \; W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\overline{B}(\tau)\overline{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,$$

$$W(t,t_1) = W(t_0,t_1) - W(t_0,t), \quad E(t) = \overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$\mu_3(t) = -E(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu_2(t)dt, \; \lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) = E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \mu_4(t),$$

$$E_1(t) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1), \quad E_2(t) = \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\mu_4(t) = \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\mu_2(\tau)d\tau - E_2(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,t)\mu_2(t)dt,$$

$$N_1(t) = -E(t)\Phi(t_0,t_1), \quad N_2(t) = -E_2(t), \quad t \in I.$$

Теорема 3 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$. Управление $w(\cdot) \in L_2(I,R^{m+m_2})$ переводит траекторию системы* (16) *из любой начальной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в любое конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I,R^{m+m_2}) / w(t) = v(t) + \lambda_1(t,\xi_0,\xi_1) + \\ &+N_1(t)z(t_1,v), \quad t \in I, \;\; \forall v(\cdot) \in L_2(I,R^{m+m_2})\}, \end{aligned} \tag{20}$$

где функция $z(t) = z(t,v)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1(t)z + \overline{B}(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad v(\cdot) \in L_2(I,R^{m+m_2}). \tag{21}$$

Решение дифференциального уравнения (16)*, соответствующее управлению $w(t) \in W$, определяется по формуле*

$$y(t) = z(t) + \lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) + N_2(t)z(t_1,v), \quad t \in I. \tag{22}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, для существования решения интегрального уравнения (19) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1) = C(t_0, t_1) > 0$, где $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)$. Теперь соотношение (15) запишется в виде (20). Решение системы (16), соответствующее управлению (20), определяется по формуле (22), где $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (21). Теорема доказана.

Лемма 1 *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда краевая задача* (1)-(6) *(либо* (10)-(12)*) равносильна следующей задаче*

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in W, \quad w_1(t) = f(Py(t), t), \quad w_2(t) = \overline{f}_0(Py(t), t), \tag{23}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2(t)v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \ \ t \in I, \tag{24}$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)), \ \ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{25}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad Py(t) \in G(t), \quad t \in I, \tag{26}$$

где $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ *– произвольная функция,* $y(t), t \in I$ *– определяется по формуле* (22).

Доказательство. При выполнении соотношений (23)-(26), функция

$$y(t) = \xi(t), \quad t \in I, \quad Py(t) = P\xi(t) \in G(t), \quad t \in I, \quad w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in W.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$\begin{gathered}(v_1, v_2, p, d, x_0, x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(Py(t), t)|^2 + |w_2(t) - \overline{f}_0(Py(t), t)|^2 + \\ +|p(t) - F(Py(t), t)|^2]dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(t, v_1(t), v_2(t), p(t), d, x_0, x_1, z(t), z(t_1))dt \to \inf\end{gathered} \tag{27}$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2(t)v_2(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ t \in I, \tag{28}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \ (x_0, x_1) \in S, \ \ d \in \Gamma, \tag{29}$$

$$p(t) \in P(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^r) / \ \ \gamma(t) \le p(t) \le \delta(t), \ \ t \in I\}, \tag{30}$$

где

$$w_1(t) = v_1(t) + \lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{11}(t)z(t_1, v), \ \ t \in I,$$
$$w_2(t) = v_2(t) + \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{12}(t)z(t_1, v), \ \ t \in I,$$
$$N_1(t) = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad \lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$X = L_2(I, R^{m+m_2}) \times P(t) \times \Gamma \times S \subset H = L_2(I, R^m) \times$$
$$L_2(I, R^{m_2}) \times L_2(I, R^r) \times R^{m_1} \times R^n \times R^n,$$
$$J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta), \ \ \theta = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1) \in X, \ \ X_* = \left\{ \theta_* \in \frac{X}{J(\theta_*)} = 0 \right\}.$$

Теорема 4 *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$, $X_* \neq \emptyset$. *Для того, чтобы краевая задача* (1)-(6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\theta_*) = 0 = J_*$, *где* $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_1^*) \in X$ *– оптимальное управление для задачи* (27)-(30).

Если $J_* = J(\theta_*) = 0$, *то функция*

$$x_*(t) = z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, d_*, x_0^*, x_1^*) + N_2(t) z(t_1, v_1^*, v_2^*), \quad t \in I$$

решение краевой задачи (1)-(6). *Если* $J_* > 0$, *то краевая задача* (1)-(6) *не имеет решения.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть краевая задача (1)-(6) имеет решение. Тогда, как следует из леммы 1, значения $w_1^*(t) = f(Py_*(t),t)$, $w_2^*(t) = \overline{f}_0(Py_*(t),t)$, где $w_*(t) = (w_1^*(t),\ w_2^*(t)) \in W$, $y(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (22), $\xi_0^* = (x_0^*, O_{m_2})$, $\xi_1^* = (x_1^*, \overline{c}_*)$, $\overline{c}_* = (c_j{}^* - d_j^*,\ j = \overline{1, m_1},\ c_j,\ j = \overline{m_1+1, m_2})$. Включение $y_*(t) \in G(t)$, $t \in I$ равносильно тому, что $p_*(t) = F(y_*(t),t)$, где $\gamma(t) \le p_*(t) = F(y_*(t),t) \le \delta(t)$, $t \in I$. Следовательно, значение $J(\theta_*) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $J(\theta_*) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $w_1^*(t) = f(Py_*(t),t)$, $w_2^*(t) = \overline{f}_0(Py_*(t),t)$, $p_*(t) = F(y_*(t),t)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S$, $d_* \in \Gamma$, $v_1^*(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2^*(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Переход от краевой задачи (1)-(6) к задаче (27)-(30) называется принципом погружения.

4. Оптимизационная задача

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (27)-(30). Заметим, что функция

$$F_0(t,\ v_1,\ v_2,\ p,\ d,\ x_0,\ x_1,\ z,\ \overline{z}) = |w_1 - f(Py,t)|^2 + |w_2 - \overline{f_0}(Py,t)|^2 +$$

$$+ |p - F(Py,t)|^2 = F_0(t, \theta, z, \overline{z}) = F_0(t,q), \quad q = (\theta, z, \overline{z}),$$

где

$$w_1 = v_1 + \lambda_{11}(t, x_0, x_1, d) + N_{11}(t)\overline{z}, \quad \overline{z} = z(t_1, v_1, v_2),$$

$$w_2 = v_2 + \lambda_{12}(t, x_0, x_1, d) + N_{12}(t)\overline{z}, \quad y = z + \lambda_2(t, x_0, x_1, d) + N_2(t)\overline{z},$$

$$P = (I_n, O_{nm_2}), \quad Py = x.$$

Теорема 5 *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$, *функция* $F_0(t,q)$ *определена и непрерывно дифференцируема по* $q = (\theta, z, \overline{z})$, *и выполняемы следующие условия:*

$$|F_{0z}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0z}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$|F_{0\overline{z}}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0\overline{z}}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$|F_{0\theta}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0\theta}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$\forall \theta \varepsilon R^{m+m_2+r+m_1+n+n}, \quad \forall z \in R^{n+m_2}, \quad \forall \overline{z} \in R^{n+m_2}.$$

Тогда функционал (27) *при условиях* (28)-(30) *непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке* $\theta \in X$, *причем*

$$J'(\theta) = (J_1'(\theta), J_2'(\theta), J_3'(\theta), J_4'(\theta), J_5'(\theta), J_6'(\theta)) \in H,$$

где

$$J_1^{'}(\theta)=\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v_1}-B_1^*(t)\psi(t), J_2^{'}(\theta)=\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v_1}-B_2^*(t)\psi(t),$$
$$J_3^{'}(\theta)=\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial p}, J_4^{'}(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial d}dt, J_5^{'}(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial x_0}dt, \tag{31}$$
$$J_6^{'}(\theta)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial x_1}dt,$$

$q=(\theta,z(t),z(t,v))$, функция $z(t)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения (28) при $v_1=v_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)$, $v_2=v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})$, а функция $\psi(t)$, $t\in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}=\frac{\partial F_0(t,q(t))}{\partial z}-A_1^*(t)\psi, \psi(t_1)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(t,q(t))}{\partial z(t_1)}dt. \tag{32}$$

Кроме того, градиент $J^{'}(\theta)$, $\theta\in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J^{'}(\theta_1)-J^{'}\theta_2)\|\le K\|\theta_1-\theta_2\|, \ \ \forall\theta_1,\theta_2\in X, \tag{33}$$

где $K>0$ – постоянная Липшица.

Доказательство. Пусть θ, $\theta+\Delta\theta\in X$, где $\Delta\theta=(\Delta v_1,\Delta v_2,\Delta p,\Delta d,\Delta x_0,\Delta x_1)$. Можно показать, что $\Delta\dot{z}=A_1(t)\Delta z+B_1(t)\Delta v_1+B_2(t)\Delta v_2$, приращение функционала

$$\Delta J=J(\theta+\Delta\theta)-J(\theta)=<J_1^{'}(\theta),\Delta v_1>_{L_2}+<J_2^{'}(\theta),\Delta v_2>_{L_2}+$$
$$+<J_3^{'}(\theta),\Delta p>_{L_2}+<J_4^{'}(\theta),\Delta d>_{R^{m_1}}+<J_5^{'}(\theta),\Delta x_0>_{R^n}+$$
$$+<J_6^{'}(\theta),\Delta x_1>_{R^n}+R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6,$$

где $|R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6|\le c_*\|\Delta\theta\|_X^2$, $c_*=const>0$, $\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{6}R_i\right|}{\|\Delta\theta\|_X}\to 0$ при $\|\Delta\theta\|_X\to 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Используя соотношение (31)-(33) строим последовательность $\{\theta_n\}=\{v_m(t),\ v_{2n}(t),\ p_n(t),\ d_n,x_{0n},x_{1n}\}\subset X$ по следующему алгоритму

$$\begin{aligned}&v_{1n+1}=v_{1n}-\alpha_nJ_1^{'}(\theta_n), v_{2n+1}=v_{2n}-\alpha_nJ_2^{'}(\theta_n),\\&p_{n+1}=P_p[p_n-\alpha_nJ_3^{'}(\theta_n)], d_{n+1}=P_\Gamma[d_n-\alpha_nJ_4^{'}(\theta_n)],\\&x_{0n+1}=P_S[x_{0n}-\alpha_nJ_5^{'}(\theta_n)]\\&x_{1n+1}=P_S[x_{1n}-\alpha_nJ_6^{'}(\theta_n)], \ \ n=0,1,2,\dots,\end{aligned} \tag{34}$$

где $0<\alpha_n=\frac{2}{K+2\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $K>0$ – постоянная Липшица из (33). Введем следующие множества

$$\Lambda_0=\{\theta\in X|J(\theta)\le J(\theta_0)\}, X_{**}=\{\theta_{**}\in X|J(\theta_{**})=\inf_{\theta\in X}\ J(\theta)\}.$$

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5, функционал* $J(\theta)$, $\theta \in X$ *ограничен снизу, последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *определяется по формуле* (34). *Тогда:*

$$1) J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{35}$$

$$2) \lim_{n\to\infty} \|\theta_n - \theta_{n+1}\| = 0, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Доказательство. Так как θ_{n+1} является проекцией точки $\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)$, то $<\theta_{n+1}-\theta_n+\alpha_n J'(\theta_n), \theta_n-\theta_{n+1}>_H \geq 0$, $\forall\theta$, $\theta\in X$. Отсюда, с учетом того, что $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$, получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2}\right) \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, и верно неравенство (35). Равенство (36) следует из ограниченности снизу функционала $J(\theta)$, $\theta \in X$. Теорема доказана.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 5, множество* Λ_0 *– ограничено,* $J(\theta)$, $\theta \in X$ *– выпуклый функционал. Тогда:*

1) Множество Λ_0 *– слабо бикомпактно,* $X_{**} \neq 0$.

2) Последовательность $\{\theta_n\}$ *является минимизирующей т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta\in X} J(\theta).$$

3) Последовательность $\{\theta_n\} \subset \Lambda_0$ *слабо сходится к точке* $\theta_{**} \in X_{**}$.

4) Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c_1}{n}, \quad c_1 = const > 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

5) Краевая задача (1)-(6) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta\in X} J(\theta) = J(\theta_{**}) = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что Λ_0 – ограниченное выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства X, а также из слабой полунепрерывности снизу функционала $J(\theta)$ на слабо бикомпактном множестве Λ_0. Второе утверждение следует из оценки $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда имеем $J(\theta_{n+1}) < J(\theta_n)$, $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\{\theta_n\} \subset \Lambda_0$. Тогда из выпуклости функционала $J(\theta_n)$ на Λ_0 следует, что $\{\theta_n\}$ минимизирующая.Третье утверждение следует из слабой бикомпактности множества Λ_0. Оценка скорости сходимости следует из неравенства $J(\theta_n) - J(\theta_{**}) \leq c_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|$. Последнее утверждение следует из теоремы 4. Теорема доказана.

Заметим, что если $f(x,t)$, $f_{0j}(x,t)$, $j = \overline{1, m_2}$, $F(x,t)$ – линейные функции относительно x, то функционал $J(\theta)$ является выпуклым.

Пример. Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \varphi = \cos t, \quad 0 < t < \pi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0, \tag{37}$$

где фазовое ограничение задается в виде

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le \varphi(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \quad t \in I = [0,\pi]. \tag{38}$$

Интегральное ограничение определяется соотношением

$$\int_0^\pi \varphi(t)dt \le 1. \tag{39}$$

Обозначая $\varphi = x_1$, $\dot\varphi = \dot x_1 = x_2$, уравнение (37) запишем в векторной форме

$$\dot x = Ax + \overline{B}x + \mu(t), x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} \in S_0, \quad x(\pi) = \overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \in S_1, \tag{40}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$x_0 \in S_0 = \{(x_1(0), x_2(0)) \in R^2 |\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \delta \in R^1\},$$

$$x_1 \in S_1 = \{(x_1(\pi), x_2(\pi)) \in R^2 |\ x_1(\pi) = 0, \ x_2(\pi) = \beta \in R^1\},$$

фазовое ограничение (38) имеет вид

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le x_1(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \quad t \in I, \tag{41}$$

интегральное ограничение (39) запишется так

$$\int_0^\pi x_1(t)dt \le 1. \tag{42}$$

Для данной задачи $F(x,t) = x_1$, $\gamma(t) = \frac{0,37t}{\pi} - 0,37$, $\delta(t) = \frac{0,44t}{\pi}$, $g_1(x_1) = \int_0^\pi f_{01}(x_1)dt = = \int_0^\pi x_1(t)dt$, $c_1 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $f_{01} = x_1$.

Преобразование

Функция $\eta(t) = \eta_1(t)$, $t \in I$ где $\eta(t) = \int_0^t x_1(\tau)d\tau$, $\dot\eta(t) = x_1(t)$, $\eta(0) = 0$, $\eta(\pi) = 1 - d_1$, $d_1 \ge 0$.

Множество $\Gamma = \{d_1 \in R^1 | d_1 \ge 0\}$. Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, где $\xi_1(t) = x_1(t)$, $\xi_2(t) = x_2(t)$, $\xi_3(t) = \eta(t)$. Тогда

$$\dot\xi(t) = A_1\xi + \overline{B}_1\xi + \mu_1(t), t \in I = [0,\pi], \tag{43}$$

$$\xi(0) = \xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi(\pi) = \xi_1 = \begin{pmatrix} x_1(\pi) \\ x_2(\pi) \\ \eta(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 - d_1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(t) = \begin{pmatrix} c0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = 0, \quad \overline{f}_0 = 0.$$

Фазовое ограничение запишется в виде

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le \xi_1(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \quad t \in I = [0,\pi]. \tag{45}$$

Здесь $\delta \in R^1$, $\beta \in R^1$, $d_1 \in \Gamma = \{d_1 \in R^1 | d_1\} \ge 0$.

Принцип погружения

Линейная управляемая система (см. (16)-(18)) имеет вид

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 w(t) + \mu_1(t), \quad t \in I = [0,\pi], \tag{46}$$

$$y(0) = \xi_0, \ \ y(\pi) = \xi_1, \ \ (\delta,\beta) \in R^2, \ \ w(\cdot) \in L_2(I, R^1),$$

где матрица B_1 и линейная однородная система $\dot{\omega} = A_1\omega$ равны

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \ \ \dot{\omega}_1 = \omega_2, \dot{\omega}_2 = 0, \dot{\omega}_3 = \omega_1.$$

Фундаментальная матрица решения линейной однородной системы $\dot{\omega} = A_1\omega$ определяется по формуле

$$\theta(t) = e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t^2/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta^{-1}(t) = e^{-A_1 t} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t^2/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau).$$

Вектор

$$a = \Phi(0,\pi)\xi_1 - \xi_0 - \int_0^\pi \Phi(0,t)\mu_1(t)dt = \begin{pmatrix} -\pi\beta - 2 \\ \beta - \delta \\ \frac{\pi^2\beta}{2} + 1 - d_1 + \pi \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$W(0,\pi) = \int_0^\pi \Phi(0,t)BB^*\Phi^*(0,t)dt = \begin{pmatrix} \pi^3/3 & -\pi^2/2 & -\pi^4/8 \\ -\pi^2/2 & \pi & \pi^3/6 \\ -\pi^4/8 & \pi^3/6 & \pi^5/20 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(0,\pi) = \begin{pmatrix} 192/\pi^3 & 36/\pi^2 & 360/\pi^4 \\ 36/\pi^2 & 9/\pi & 60/\pi^3 \\ 360/\pi^4 & 60/\pi^3 & 720/\pi^5 \end{pmatrix}, \quad W(0,t) = \begin{pmatrix} t^3/3 & -t^2/2 & -t^4/8 \\ -t^2/2 & t & t^3/6 \\ -t^4/8 & t^3/6 & t^5/20 \end{pmatrix},$$

$$W(t,\pi)=\begin{pmatrix}(\pi^3-t^3)/3 & (t^2-\pi^2)/2 & (t^4-\pi^4)/8\\ (t^2-\pi^2)/2 & \pi-t & (\pi^3-t^3)/6\\ (t^4-\pi^4)/8 & (\pi^3-t^3)/6 & (\pi^5-t^5)/20\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)=E(t)a=B_1^*(t)\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,\pi)a=\frac{(-\pi\beta-2)(-180t^2+192\pi t-36\pi^2)}{\pi^4}+$$
$$+\frac{(\beta-\delta)[-30t^2+36\pi t-9\pi^2]}{\pi^3}+(\frac{\pi^2\beta}{2}+1-d_1-\pi)\cdot\frac{-360t^2+360\pi t-60\pi^2}{\pi^5};$$

$$E_1(t)\xi_0=\Phi(t,0)W(t,\pi)W^{-1}(0,\pi)\xi_0=$$
$$=\delta\begin{pmatrix}\frac{[12t(8\pi t-3\pi^2-5t^2)+\pi t(\pi^3+18\pi t^2-9\pi^2t-10t^3)]}{\pi^3}\\ \frac{[\pi^3+18\pi t^2-9\pi^2t-10t^3]}{\pi^3}\\ \frac{[24t^2(8\pi t-3\pi^2-5t^2)+\pi t^2(\pi^3+18\pi t^2-9\pi^2t-10t^3)+3\pi t^3(3\pi t-\pi^2-2t^2)]}{2\pi^4}\end{pmatrix},$$

$$E_2(t)\xi_1=\begin{pmatrix}\beta\cdot\frac{(-8\pi t^3+3\pi^2t^2+5t^4)}{2\pi^3}+(1-d_1)\cdot\frac{(-60\pi t^3+30\pi^2t^2+30t^4)}{\pi^5}\\ \beta\cdot\frac{(-12\pi t^2+3\pi^2t+10t^3)}{\pi^3}+(1-d_1)\cdot\frac{(-180\pi t^2+60\pi^2t+120t^3)}{\pi^5}\\ \beta\cdot\frac{(-2\pi t^4+\pi^2t^3+t^5)}{2\pi^3}+(1-d_1)\cdot\frac{(-15\pi t^4+10\pi^2t^2+6t^5)}{\pi^5}\end{pmatrix},$$

$$\mu_4(t)=\Phi(t,0)\int_0^t\Phi(0,\tau)\mu_2(\tau)d\tau-E_2(t)\int_0^\pi\Phi(\pi,t)\mu_2(t)dt=\begin{pmatrix}-\cos t+1+\frac{4\pi t^3-6\pi^2t^2}{\pi^4}\\ \sin t+\frac{12\pi t^2-12\pi^2t}{\pi^4}\\ t-\sin t+\frac{\pi t^4-2\pi^2t^2}{\pi^4}\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$E(t)=B_1^*(t)\phi^*(0,t)W^{-1}(0,\pi)=$$
$$=(\frac{-180t^2+192\pi t-36\pi^2}{\pi^4},\ \frac{-30t^2+36\pi t-9\pi^2}{\pi^3},\frac{-360t^2+360\pi t-60\pi^2}{\pi^5}),$$

$$E_2(t)=\begin{pmatrix}\frac{28\pi t^3-12\pi^2t^2-15t^4}{\pi^4} & \frac{-8\pi t^3+3\pi^2t^2+5t^4}{2\pi^3} & \frac{-60\pi t^3+30\pi^2t^2+30t^4}{\pi^5}\\ \frac{84\pi t^2-24\pi^2t-60t^3}{\pi^4} & \frac{-12\pi t^2+3\pi^2t+10t^3}{\pi^3} & \frac{-180\pi t^2+60\pi^2t+120t^3}{\pi^5}\\ \frac{7\pi t^4-4\pi^2t^3-3t^5}{\pi^4} & \frac{-2\pi t^4+\pi^2t^3+t^5}{2\pi^3} & \frac{-15\pi t^4+10\pi^2t^2+6t^5}{\pi^5}\end{pmatrix}$$

$$N_1(t)=-E(t)\phi(0,\pi)=$$
$$=(\frac{-180t^2+168\pi t-24\pi^2}{\pi^4},\ \frac{30t^2-24\pi t+3\pi^2}{\pi^3},\frac{360t^2-360\pi t+60\pi^2}{\pi^5}),$$

$$N_2(t)=-E_2(t).$$

Как следует из теоремы 3, управление

$$\begin{aligned}&w(t)=v(t)+\lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)+N_1(t)z(t_1,v)=\\&=v(t)+\frac{(-\pi\beta-2)(-180t^2+192\pi t-36\pi^2)}{\pi^4}+\frac{(\beta-\delta)(-30t^2+36\pi t-9\pi^2)}{\pi^3}+\\&+(\frac{\pi^2\beta}{2}+1-d_1+\pi)\frac{(-360t^2+360\pi t-60\pi^2)}{\pi^5}+\\&+\frac{(-180t^2+168\pi t-24\pi^2)}{\pi^4}z_1(\pi,v)+\frac{(30t^2-24\pi t+3\pi^2)}{\pi^3}z_2(\pi,v)+\\&+\frac{(360t^2-360\pi t+60\pi^2)}{\pi^5}z_3(\pi,v),\quad t\in I=[0,\pi],\end{aligned}\tag{47}$$

где $z(t,v)$, $t \in I = [0,\pi]$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{48}$$

Решение дифференциального уравнения (46) соответствующего уравнения (47) равно

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = z(t,v) + \lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) + N_2(t)z(\pi,v) =$$
$$= z(t,v) + E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \mu_4(t), t \in I = [0,\pi],$$

где

$$\begin{aligned} y_1(t) &= z_1(t,v) + \delta\frac{[12t(8\pi t - 3\pi^2 - 5t^2) + \pi t(\pi^3 + 18\pi t^2 - 9\pi^2 t - 10t^3)]}{\pi^3} + \\ &+\beta\frac{(-8\pi t^3 + 3\pi^2 t^2 + 5t^4)}{2\pi^3} + (1-d_1)\frac{(-60\pi t^3 + 30\pi^2 t^2 + 30t^4)}{\pi^5} + \frac{4\pi t^3 - 6\pi^2 t^2}{\pi^4} - \\ &- \cos t + 1 - \frac{\left(28\pi t^3 - 12\pi^2 t^2 - 15t^4\right)}{\pi^4} z_1(\pi,v) + \frac{\left(8\pi t^3 - 3\pi^2 t^2 - 5t^4\right)}{2\pi^3} z_2(\pi,v) + \\ &+ \frac{60\pi t^3 - 30\pi^2 t^2 - 30t^4}{\pi^5} z_3(\pi,v), \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= z_2(t,v) + \delta\frac{\pi^3 + 18\pi t^2 - 9\pi^2 t - 10t^3}{\pi^3} + \beta\frac{(-12\pi t^2 + 3\pi^2 t + 10t^3)}{\pi^3} + \\ &+(1-d_1)\frac{(-180\pi t^2 + 60\pi^2 t + 120t^3)}{\pi^5} + \sin t + \frac{12\pi t^2 - 12\pi^2 t}{\pi^4} - \\ &- \frac{84\pi t^2 - 24\pi^2 t - 60t^3}{\pi^4} z_1(\pi,v) - \frac{(-12\pi t^2 + 3\pi^2 t + 10t^3)}{\pi^3} z_2(\pi,v) - \\ &- \frac{(-180\pi t^2 + 60\pi^2 t + 120t^3)}{\pi^5} z_3(\pi,v), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= z_3(t,v) + \\ &+\delta\frac{[24t^2(8\pi t - 3\pi^2 - 5t^2) + \pi t^2(\pi^3 + 18\pi t^2 - 9\pi^2 t - 10t^3) + 3\pi t^3(3\pi t - 2t^2 - \pi^2)]}{2\pi^4} + \\ &+\beta\frac{(-2\pi t^4 + \pi^2 t^3 + t^5)}{2\pi^3} + (1-d_1)\cdot\frac{(-15\pi t^4 + 10\pi^2 t^2 + 6t^5)}{\pi^5} + t - \sin t + \\ &+ \frac{\pi t^4 - 2\pi^2 t^2}{\pi^4} - \frac{7\pi t^4 - 4\pi^2 t^3 - 3t^5}{\pi^4} z_1(\pi,v) - \frac{(-2\pi t^4 + \pi^2 t^3 + t^5)}{2\pi^3} z_2(\pi,v) - \\ &- \frac{(-15\pi t^4 + 10\pi^2 t^2 + 6t^5)}{\pi^5} z_3(\pi,v), \quad t \in I. \end{aligned} \tag{51}$$

Заметим, что $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = \delta$, $y_3(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$, $y_2(\pi) = \beta$, $y_3(\pi) = 1 - d_1$.

Оптимизационная задача

Поскольку для данного примера $f = y_1$, $F = y_1$, то оптимизационная задача (27)-(30) запишется в виде: минимизировать функционал:

$$\begin{aligned} J(v,p,d_1,\delta,\beta) &= \int_0^\pi [|w(t) - y_1(t)|^2 + |p(t) - y_1(t)|^2]dt = \\ &= \int_0^\pi F_0(t, v(t), \ \ p(t), \ \ d_1, \ \ \delta, \ \ \beta, \ \ z(t), z(\pi))dt \to \inf \end{aligned} \tag{52}$$

при условиях (48), где

$$v(\cdot) \in L_2(I, R^1), \ \ p(t) \in P(t), \ \ d_1 \in \Gamma, \ \ \delta \in R^1, \ \ \beta \in R^1, \tag{53}$$

функция $w(t)$, $t \in I$ – определяется по формуле (47), а функция $y_1(t)$, $t \in I$ определяется соотношением (49), множество

$$P(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^1) | \frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le p(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, n.b, t \in I\}. \tag{54}$$

Частные производные

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v} = 2[w(t) - y_1(t)], \ \ \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial p} = 2[p(t) - y_1(t)],$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial d_1} = 2[w(t) - y_1(t)] \left(\frac{360t^2 - 360\pi t + 60\pi^2}{\pi^5} - \frac{60\pi t^3 - 30\pi^2 t^2 - 30t^4}{\pi^5} \right) +$$

$$+2[p(t) - y_1(t)] \left(\frac{-60\pi t^3 + 30\pi^2 t^2 + 30t^4}{\pi^5} \right);$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial \delta} = 2[w(t) - y_1(t)] \times$$

$$\times \left(\frac{-30t^2 + 36\pi t - 9\pi^2}{\pi^3} - \frac{[12t(8\pi t - 3\pi^2 - 5t^2) + \pi t(\pi^3 + 18\pi t - 9\pi^2 t - 10t^3)]}{\pi^3} \right) +$$

$$+2[p(t) - y_1(t)] \left[- \frac{[12t(8\pi t - 3\pi^2 - 5t^2) + \pi t(\pi^3 + 18\pi t^2 - 9\pi^2 t - 10t^3)]}{\pi^3} \right],$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial \beta} = 2[w(t) - y_1(t)] \Big[\frac{(-30t^2 + 36\pi t - 9\pi^2)}{\pi^3} +$$

$$- \frac{(-180t^2 + 180\pi t - 30\pi^2)}{\pi^3} - \frac{(-180t^2 + 192\pi t - 36\pi^2)}{\pi^3} - \frac{-8\pi t^3 + 3\pi^2 t^2 + 5t^4}{2\pi^3} \Big] +$$

$$+2[p(t) - y_1(t)] \left(\frac{8\pi t^3 - 3\pi^2 t^2 - 5t^4}{2\pi^3} \right);$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_1} = -2[w(t) - y_1(t)] - 2[p(t) - y_1(t)], \quad \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_3} = 0;$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_1(\pi)} = 2[w(t) - y_1(t)] \cdot \left[\frac{-180t^2 + 168\pi t - 24\pi^2}{\pi^4} + \frac{28\pi t^3 - 12\pi^2 t^2 - 15t^4}{\pi^4} \right] +$$

$$+2[p(t) - y_1(t)] \cdot \left(\frac{28\pi t^3 - 12\pi^2 t^2 - 15t^4}{\pi^4} \right);$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_2(\pi)} = 2[w(t)-y_1(t)]\left[\frac{30t^2-24\pi t+3\pi^2}{\pi^3} - \frac{8\pi t^3-3\pi^2t^2-5t^4}{2\pi^3}\right]+$$
$$+2[p(t)-y_1(t)]\left[-\frac{8\pi t^3-3\pi^2t^2-5t^4}{2\pi^3}\right];$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_3(\pi)} = 2[w(t)-y_1(t)]\left(\frac{360t^2-360\pi t+60\pi^2}{\pi^5} - \frac{60\pi t^3-30\pi^2t^2-30t^4}{\pi^5}\right)+$$
$$+2[p(t)-y_1(t)]\left(-\frac{60\pi t^3-30\pi^2t^2-30t^4}{\pi^5}\right).$$

Легко убедиться в том, что функционал (52) при условиях (48), (53), (54) является выпуклым. Следовательно, последовательности, приведенные ниже, являются минимизирующими.

Минимизирующие последовательности

Для данной задачи управление $\theta = (v,p,d_1,\delta,\beta) \in X$. Выбираем начальное управление $\theta_0 = (v_0(t),p_0(t),d_{10},\delta_0,\beta_0) \in X$, где $v_0(\cdot) \in L_2(I,R^1)$, $p_0(t) \in P(t)$, $d_{10} \in \Gamma$, $\delta_0 \in R^1$, $\beta_0 \in R_1$. В частности $v_0(t) \equiv 1$, $p_0(t) = \frac{0{,}405t}{\pi} - 0{,}185 \in P(t)$, $d_{10} = 0.5$, $\delta_0 = -\frac{\pi}{8}$, $\beta_0 = -\frac{\pi}{8}$. Находим решение дифференциального уравнения $\dot z = A_1 z + B_1 v(t)$, $z(0)$=0, при v=$v_0(t)$, т.е. $\dot z_{10} = \dot z_{20}$, $\dot z_{20} = -v_0(t)$, $\dot z_{30} = z_{10}$, $t \in [0,\pi]$, где $z_{10}(0) = 0$, $z_{20}(0) = 0$, $z_{30}(0) = 0$. Итак, известны $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$, $t \in [0,\pi]$. Тогда $q_0 = (v_0,p_0,d_1^0,\delta_0,\beta_0,z_0(t),z_0(\pi))$, $z_0(t) = (z_{10}(t),z_{20}(t),z_{30}(t))$. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial v},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial p},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial d_1},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \delta},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}} = 0,\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{30}} = 0,\quad \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}(\pi)},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}(\pi)},\ \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{30}(\pi)}.$$

Следующие приближения

$$v_1 = v_0 - \alpha_0 J_1'(\theta_0), p_1 = P_p[p_0 - \alpha_0 J_2'(\theta_0)],\ d_1 = P_\Gamma[d_{10}^0 - \alpha_0 J_3'(\theta_0)];$$

$$\delta_1 = \delta_0 - \alpha_0 J_4'(\alpha_0), \beta_1 = \beta_0 - \alpha_0 J_5'(\theta_0),$$

где

$$J_1'(\theta_0) = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial v} - B_1^*\psi_0(t) = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial v} + \psi_{20}(t),\quad \psi_0 = (\psi_{10},\psi_{20},\psi_{30}),$$

$$J_2'(\theta_0) = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial p},\quad J_3'(\theta_0) = \int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial d_1}dt,$$

$$J_4'(\theta_0) = \int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \delta}dt,\quad J_5'(\theta_0) = \int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \beta}dt.$$

Здесь $\psi_0(t) = (\psi_{10}(t), \psi_{20}(t), \psi_{30}(t))$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}_{10} = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}} - \psi_{20}, \qquad \dot{\psi}_{20} = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}} = 0,$$

$$\dot{\psi}_{30} = \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{30}} - \psi_{10} = -\psi_{10},$$

$$\psi_{10}(\pi) = -\int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}(\pi)} dt, \qquad \psi_{20}(\pi) = -\int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}(\pi)} dt,$$

$$\psi_{30}(\pi) = -\int_0^\pi \frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{30}(\pi)} dt.$$

Величина $\alpha_0 = \frac{1}{K} = const = 0,1$. В результате находим $\theta_1 = (v_1, p_1, d_{11}, \delta_1, \beta_1)$. Далее повторяется процесс построения $\{\theta_n\}$ с начальной точкой θ_1, с величиной $\alpha_n = 0,1$, $n = 0,1,2,\ldots$. Можно показать, что $v_n \to v_*$, $p_n \to p_*$, $d_{1n} \to d_{1*}$, $\delta_n \to \delta_*$, $\beta_n \to \beta_*$ при $n \to \infty$, значение $J = (v_*, p_*, d_{1*}, \delta_*, \beta_*) = 0$, где

$$v_*(t) = \frac{t}{2}\sin t - \frac{\pi}{4}\sin t, \quad t \in [0,\pi];$$

$$p_*(t) = \frac{t}{2}\sin t - \frac{\pi}{4}\sin t \quad t \in [0,\pi], \ \ d_{1*} = 1, \ \ \delta_* = -\frac{\pi}{4}, \ \ \beta_* = -\frac{\pi}{4}.$$

Функции

$$z_1(v_*) = \cos t - 1 + \frac{1}{2}t\sin t - \frac{\pi}{4}\sin t + \frac{\pi}{4}t, \ t \in I,$$

$$z_2(v_*) = -\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) - \frac{\pi}{4}\cos t + \frac{\pi}{4}, \ t \in I,$$

$$z_3(v_*) = \sin t - t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) - \frac{\pi}{4}(-\cos t + 1) + \frac{\pi^2}{8}t^2, \ t \in I,$$

где $z_1(\pi, v_*) = \frac{\pi^2}{4} - 2$, $\quad z_2(\pi, v_*) = 0$, $\quad z_3(\pi, v_*) = \frac{\pi^3}{8} - \pi$;

Тогда (см.(50)-(52))

$$y_{1*}(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \frac{\pi}{4}\sin t = x_{1*}(t), \quad t \in I;$$

$$y_{2*}(t) = x_{2*}(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{\pi}{4}\cos t + \frac{\pi}{4}, \quad t \in I;$$

$$y_{3*}(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{\pi}{4}\cos t - \frac{\pi}{4}, \quad t \in I.$$

Решение исходной краевой задачи (38)-(40):

$$\varphi(t) = x_{1*}(t) = y_{1*}(t), \ t \in I, \ \frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le x_{1*}(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \ t \in I;$$

$$\int_0^\pi \varphi(t)dt = \int_0^\pi x_{1*}(t)dt = 0 \le 1, \qquad x_0 = \left(0, -\frac{\pi}{4}\right), \quad \overline{x}_1 = \left(0, -\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi(\pi) = 0, \quad \dot{\varphi}(\pi) = -\frac{\pi}{4}.$$

Список литературы

[1] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.

[2] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. Институт математики МОН РК. – 2005. – Т. 5, №4. – С. 7-13.

[3] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, №9. – С. 1476-1486.

[4] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2010. №1. – С. 30-55.

[5] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, №1. – С. 20-36.

[6] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 826-836.

[7] *Айсагалиев С.А., Жунусова Ж.Х., Калимолдаев М.Н.* Принцип погружения для краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический журнал. Институт математики МОН РК. – 2012. – Т. 12, №2(44). – С. 5-22.

Поступила в редакцию 12 ноября 2012 года