

УДК 517.938

К. АЙТБАЕВ, А.А. КАНЫБЕКОВА, С.Н. ДУЙСЕБАЕВ

*Международный казахско-турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Казахстан; e-mail: aytbaev53@mail.ru*

## **Об одном решении задачи Коши методом конечных элементов**

В работе приводятся алгоритм и основные результаты решения задачи нестационарной теплопроводности методом конечных элементов. Для определения оптимальной мощности внутренних источников тепла решена задача Коши, за начальное решение которой принято температурное поле, установленное путем решения задачи стационарной теплопроводности.

*Ключевые слова:* задача Коши, нестационарная теплопроводность, внутренние источники тепла.

Қ. АЙТБАЕВ, А.А. ҚАНЫБЕКОВА, С.Н. ДҮЙСЕБАЕВ

## **Коши есебінің шекті элементтер әдісімен алынған шешімі туралы**

Жұмыста бейстационар жылуөткізгіштік есебін шекті элементтер әдісімен шешудің алгоритмы мен негізгі нәтижелері келтірілген. Ішкі жылу көздерінің тиімді қуатын анықтау үшін Коши есебі шешілген. Оның бастапқы шешімі ретінде стационар жылуөткізгіштік есебін шешу арқылы анықталған температуралық өріс қабылданған.

K. AITBAEV, A.A. KANIBEKOVA, S.N. DUISEBAEV

## **A solution of the Cauchy problem by finite element method**

The paper presents the main results of the algorithm and the solution of the transient heat conduction finite element method. As the study area is considered homogeneous, isotropic body of rectangular cross-section. Within the body set point heat source located at an equal distance from each other. On the upper horizontal boundary of the negative effect of the convective temperature of the outside air. Required to determine the minimum power source of heat needed to create a positive temperature field in the body near the upper boundary of the study area. To determine the optimum capacity of internal heat source solved the Cauchy problem with the initial decision is made the temperature field established by solving the problem of stationary heat conduction. Results of the solution presented in the form of graphs of temperature on a horizontal slice in time and in the body of the isotherms for different time periods.

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в плоском, сплошном теле имеет вид [1,2]:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1)$$

Количество тепла, накопленное телом к моменту времени  $t$  вычисляется с помощью следующего функционала, экстремаль которого является и решением уравнения (1):

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2 \left( Q - \lambda \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] dV + \\ + \int_{S_1} q T dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [T^2 - 2TT_B + T_B^2] dS. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $T(x, y, t)$  – искомая температура в точке с координатами  $x, y$  в момент времени  $t$ ;  $Q$  – слагаемое, учитывающее мощность внутренних источников тепла,  $K_{xx}, K_{yy}$  – коэффициенты теплопроводности материалов, слагающих область исследования;  $h$  – коэффициент конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающим воздухом;  $q$  – интенсивность потока тепла, действующего на тело;  $T_B$  – температура внешнего воздуха;  $\lambda = \rho c$  – объемная теплоемкость материалов. В последнем произведении величины  $c$  и  $\rho$  соответствуют плотности и массовой теплоемкости материала. Приведенный функционал (2) отличается от функционала для уравнения стационарной теплопроводности лишь наличием видоизмененной составляющей  $-2(Q - \lambda \frac{\partial T}{\partial t})$ , включающей производную по времени. В конечноэлементной интерпретации часть функционала, относящаяся указанной составляющей, рассматривается отдельно [1]:

$$\chi_Q = \sum_{e=1}^E \left( \lambda [N^{(e)}] \{T\} [N^{(e)}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} - [N^{(e)}] \{T\} Q \right) dV. \quad (3)$$

и после дифференцирования на множестве узловых значений искомой температуры  $\{T\}$  принимает вид:

$$\frac{\partial \chi_Q}{\partial \{T\}} = - \sum_{e=1}^E \int_V [N^{(e)}]^T Q dV + \sum_{e=1}^E \left( \int_V \lambda [N^{(e)}] [N^{(e)}] dV \right) \frac{\partial \{T\}}{\partial t}. \quad (4)$$

Процесс минимизации функционала уравнения нестационарной теплопроводности на множестве  $\{T\}$  приводит к системе линейных дифференциальных уравнений:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K] \{T\} + \{F\} = 0. \quad (5)$$

Здесь доля каждого конечного элемента в матрицах  $[K]$ ,  $[C]$  и  $\{F\}$  вычисляется по формулам [1]:

$$[c^{(e)}] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV, \quad (6)$$

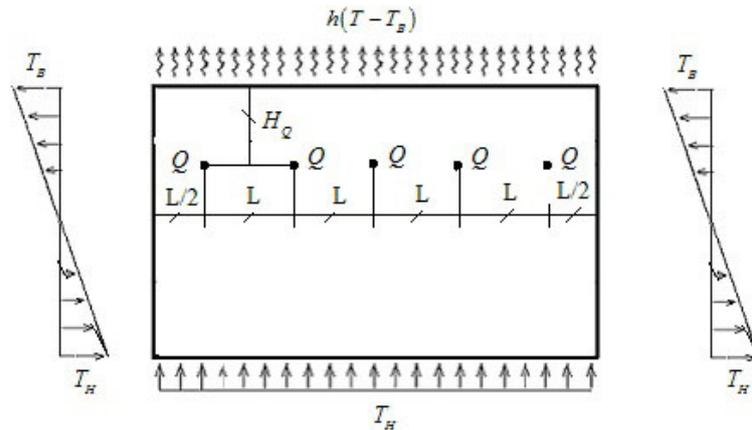


Рисунок 1. Расчетная схема

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_2} h [N]^T [N] dS, \quad (7)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_V Q [N]^T dV + \int_{S_1} q [N]^T dS - \int_{S_2} h T_B [N]^T dS. \quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений (5), после замены производной по времени конечно-разностным аналогом, приводится к системе линейных алгебраических уравнений [1]:

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T\}_1 = \left( [K] - \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T\}_0 - 2 \{F\}^*. \quad (9)$$

Здесь вектор  $\{T\}_0$  - начальное решение задачи Коши для момента времени  $t$  в итерационном процессе решения уравнения (1). Решение  $\{T\}_1$  для момента времени  $t + \Delta t$  получится из уравнения (9). Здесь временной интервал  $\Delta t$  назначается путем деления всего времени развития нестационарного процесса теплообмена в рассматриваемой области на конечное число отрезков. Вектор-столбец  $\{F\}^*$  определяется граничными условиями задачи и учитывает начальное и конечное состояния граничных условий в начале и конце каждого временного интервала  $\Delta t$ . Матрица  $[C]$  обычно называется матрицей демпфирования [1].

В качестве области исследования рассматривается двухслойное изотропное тело прямоугольного поперечного сечения (рисунок 1).

Внутренние источники тепла мощности  $Q$  расположены на глубине  $H_Q$  на равном расстоянии  $L$  друг от друга [3]. На поверхности исследуемой области происходит конвективный теплообмен с окружающим воздухом по закону  $h(T - T_B)$ . Здесь  $h$ - коэффициент конвективного теплообмена размерности Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $T_B$  - температура воздуха. По боковым поверхностям задается температура, изменяющаяся по линейному закону от  $T_B$  до постоянной температуры  $T_H$  на основании исследуемой области, на глубине  $H$ .

По условию задачи, требуется установить минимальное значение мощности  $Q$  для обеспечения формирования положительного температурного поля вблизи поверхности

исследуемой области при заданных значениях:  $T_B = -5^\circ\text{C}$ ;  $T_H = +10^\circ\text{C}$ ;  $H_Q = 20$  см;  $L = 50$  см;  $h = 0.23$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C). На рисунке 2 приведена картина развития нестационарного температурного поля на глубине 20 см при  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C).

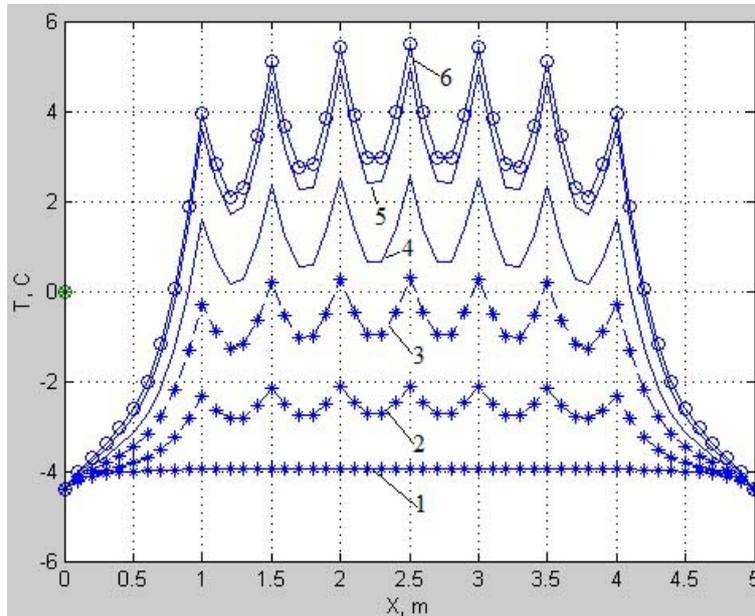


Рисунок 2. Динамика развития нестационарного температурного поля на глубине 20 см при  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C)

Здесь графики 1 и 6 соответствуют решению стационарной задачи теплопроводности при значениях  $Q = 0$  и  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C) соответственно.

Графики 2-5 показывают рост температуры в горизонтальном сечении на глубине  $H = 20$  см при каждом приращении мощности  $Q$  на  $\Delta Q = 10$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C), что соответствует изменению времени на 1 час. При этом каждый предыдущий график соответствует начальному решению задачи Коши для текущего интервала времени. А в самом начале итерационного процесса за начальное решение задачи берется решение стационарной задачи теплопроводности при  $Q = 0.0$ . Из рисунка видно, что уровень графика 5 несколько не достигает уровня графика 6, хотя оба они соответствуют значению мощности внутренних источников тепла  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C). Это объясняется тем, что график 6 является решением стационарной задачи, когда время устремляется к бесконечности, тогда как график 5 соответствует конечному значению времени.

Полученное численное решение показывает, что принятое значение мощности  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C) удовлетворяет условию задачи с избытком, так как уже на третьем шаге итерации температура на глубине  $H = 20$  см становится положительной. Об этом же свидетельствует и картина изотерм температурного поля в исследуемой области, что приведена на рисунке 3. Здесь нулевой уровень изотермы вплотную подходит к верхней границе области. Однако, контрольный расчет, проведенный при  $Q = 30$  Вт/(м<sup>3</sup>·°C)

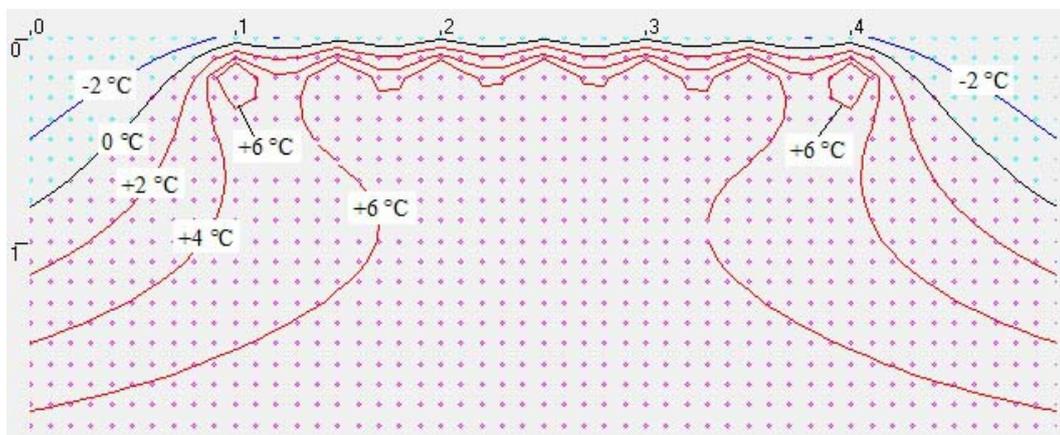


Рисунок 3. Изотермы температурного поля при  $Q = 40 \text{ Вт/ (м}^3 \cdot \text{°C)}$

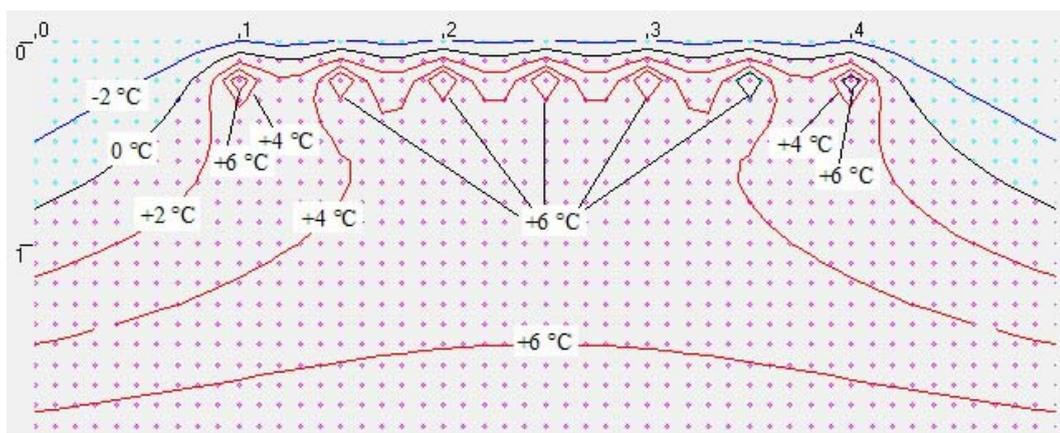


Рисунок 4. Изотермы температурного поля при  $Q = 30 \text{ Вт/ (м}^3 \cdot \text{°C)}$

показал (рисунок 4), что необходимым минимальным значением мощности внутренних источников тепла все же является величина  $Q = 40$  Вт/(м<sup>3</sup>·°С), так как при  $Q = 30$  Вт/(м<sup>3</sup>·°С) вблизи верхней границы исследуемой области появляются изотермы отрицательного знака. Серия расчетов, выполненных при различных значениях температуры наружного воздуха позволит установить связь вида  $Q = f(T_B)$ , где  $Q$  – оптимальная мощность внутренних источников тепла.

### Список литературы

- [1] *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.:Мир, 1979. – 392 с.
- [2] *Эльсгольц Л.Э.* // Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.—М., 1965. - 424 с.
- [3] *Айтбаев Қ., Қаныбекова А.А.* Бейстационар жылу өткізгіштік есептерінің қойылымының ерекшеліктері// Вестник МКТУ им. А.Ясави, серия естественные науки. – 2012. – №3(78). - С. 46-49.

*Поступила в редакцию 18 ноября 2012 года*