УДК 517.95

Т.Ш. Кальменов[1], Д. Сураган[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; e-mail: kalmenov.t@mail.ru*

[2] *Механико-математический факультет, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; e-mail: suragan@list.ru*

# О некоторых неравенствах спектральной геометрии для потенциала Рисса*

В работе доказывается, что среди всех областей с одинаковой мерой шар максимизирует первое собственное значение потенциала Рисса. Показано, что сумма квадратов собственных значений в шаре также максимизируется среди всех областей с мерой равной мере шара. Результаты такого рода относятся к теории спектральной геометрии. Спектральная геометрия - сравнительно молодая и быстро развивающаяся математическая дисциплина, сочетающая в себе элементы дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории уравнений с частными производными и теории потенциала. Многие задачи спектральной геометрии мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики.

*Ключевые слова*: спектральная задача, собственные значения, спектральная геометрия, потенциал Рисса, потенциал ньютона.

*Т.Ш. Кәлменов, Д. Сұраған*

**Рисс потенциалына сай кейбір спектральдық геометрия теңсздіктері**

Бұл мақалада берілген шармен көлемі бірдей болатын барлық облыстардың арасында Рисс потенциалының бірінші меншікті мәні шарда ен үлкен мәнін қабылдайтындығы дәлелденген. Және Рисс потенциалының меншікті мәндерінін квадраттарынан құрастырылган қатар берілген шармен көлемі бірдей болатын барлық облыстардың арасында шарда ен үлкен мәніне жынықталатындығы көрсетілді.Осындай результатдар негізінен спектральдық геометрия пәніне тиісті. Спектальдық геометрия салыстырмала түрде жаңа жәнеде қарқында дамушы математикалық сала болып табылады. Негізінен спектальдық геометрия мәселелері акустика, кванттық механика және тағы басқа физикалық салалардағы есептерді шешуге бағытталған.

*Түйін сөздер*: спектральдық есеп, меншікті мәндер, спектральдық геометрия, Рисс потенциалы,ньютон потенциалы.

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0110/ГФ2, 2012г.-2014г.

*T.Sh. Kalmenov, D. Suragan,*

**On some inequalities of spectral geometry for Riesz potentials**

In this paper, it is proved that a ball maximizes the first eigenvalue of Riesz potential among domains of given volume. It is also shown that the sum of the squares of the Riesz potential eigenvalues is also maximized in a ball among all domains with the same volume as the ball. In the last section of the paper, authors give an application of the results for a boundary value problem of Laplacian. These results belong to spectral geometry. Spectral geometry is a relatively young and rapidly developing mathematical discipline which combines elements of differential geometry, functional analysis and partial differential equations. Many problems in spectral geometry motivated by issues arising in acoustics, quantum mechanics, and other fields of physics.

*Key words*: spectral problems, eigenvalues, spectral geometry, Riesz potential, Newton potential.

**Введение.** Исторически, минимизация первого собственного значения, возможно является одной из первых таких задач, которая появилась в научной литературе. В действительности, в известной книге Релея "Теория звуков"[1] (впервые была издана в 1877 году), которая посвящена некоторым явным вычислениям и физическим толкованиям, утверждается что круг из плоских областей является минимизирующей (среди областей одинаковой площади) первого собственного значения Лапласиана с граничным условием Дирихле. Музыкальная интерпретация этого результата следующая: среди всех барабанов с заданной площадью, кругообразный барабан производит самую низкую частоту. Доказательство этого предположения было получено лишь спустя 30 лет Г. Фабером и Е. Крахом одновременно и независимо друг от друга. Тем не менее, история минимизации первого собственного значения не закончена! Неравенства типа Релей - Фабер - Краха были расширены на многие другие случаи и операторы [2]. Результаты такого рода относятся к теории спектральной геометрии. Спектральная геометрия - сравнительно молодая и быстро развивающаяся математическая дисциплина, сочетающая в себе элементы дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории уравнений с частными производными и теории потенциала. Многие задачи спектральной геометрии мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики.

**1. Основные результаты**

В односвязной открытой ограниченной области $\Omega$ в $R^d, d > 1$, с липшицевой границей рассмотрим спектральную задачу на собственные значения потенциала Рисса

$$\lambda u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{u(y)}{C_\alpha |x-y|^{d-\alpha}} dy, 0 < \alpha < d, \tag{1}$$

где

$|x-y| = \left[\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ - расстояние между точками $x = (x_1, ..., x_d)$ и $y = (y_1, ..., y_d)$ в $d$-мерном Евклидовом пространстве $R^d$, $C_\alpha = \pi^{\frac{d}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{(d-\alpha)}{2})}$ и $\Gamma$ является гамма-функцией Эйлера.

Отметим, что при $d \geq 3$ и $\alpha = 2$ потенциал Рисса совпадает с классическим ньютоновым потенциалом; при $d = 2$ и $\alpha \to 0$ (в предельном случае) потенциал Рисса в некотором смысле является логарифмическим потенциалом. Известно, что оператор Рисса является самосопряженным на $L_2(\Omega)$ [3]. Следовательно, собственные значения спектральной задачи (1) дискретные и вещественнозначные. Пусть $\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), ...$ являются собственными значениями оператора Рисса (1), и пусть они являются упорядоченными, в виде невозрастающей последовательности по модулю с учетом их кратности. Для спектральной задачи (1) получим следующие основные результаты:

**Теорема 1** *Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая односвязная ограниченная область и $\Omega^* \subset R^d$ – шар той же меры, что и $\Omega$, то есть $|\Omega^*| = |\Omega|$, тогда*

$$\lambda_1(\Omega^*) \geq \lambda_1(\Omega). \tag{2}$$

**Теорема 2** *Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая односвязная ограниченная область и $\Omega^* \subset R^d$ – шар той же меры, что и $\Omega$, то есть $|\Omega^*| = |\Omega|$, тогда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2(\Omega^*) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2(\Omega). \tag{3}$$

## 2. Предварительные леммы

Пусть $\Omega$ ограниченное измеримое множество в $R^d$. Его симметрическая перестановка $\Omega^*$ является открытым централизованным шаром, объем которого совпадает с объемом $\Omega$, т.е. $|\Omega^*| = |\Omega|$ и

$$\Omega^* \quad = \quad \left\{ x \in R^d \mid \omega_d |x|^d < |\Omega| \right\},$$

где $\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$-площадь единичной сферы в $R^d$. Пусть $u$ неотрицательная измеримая функция, равная нулю на бесконечности в том смысле, что все ее положительные уровневые множества имеют конечную меру:

$$Vol\left(\{x | f(x) > t\}\right) < \infty, \ (\forall t > 0).$$

Определим симметрическую невозрастающую перестановку $u^*$ функции $u$ через симметризацию уровневых множеств

$$u^*(x) = \int_0^{\infty} \chi_{\{u(x)>t\}^*} dt.$$

Тогда $u^*$ полунепрерывная снизу(следовательно, уровневые множества открытые) функция, которая единственным образом определяется через функцию распределения

$$\mu_u(t) = Vol\left\{x | u(x) > t\right\}.$$

По конструкции $u^*$ одинаковой меры с $u$, т.е. соответствующие уровневые множества двух функций имеют одинаковый объем

$$\mu_u(t) = \mu_{u^*}(t), \ (\forall t > 0). \tag{4}$$

В определении функции $u^*$ используется специальное layer-cake разложение, которое выражает неотрицательную функцию $u$ в терминах ее уровневых множеств, т.е.

$$u(x) = \int\limits_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}} dt$$

Заметим, что характеристическая функция $\chi_{\{u(x)>t\}}$ измерима по совокупности $x$ и $t$, когда функция $u$ измерима.

**Лемма 1** *(О сохранении норм перестановок в $L_2$). Для каждой неотрицательной функции $u$ из $L_2(\Omega)$*

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} = \| u^* \|_{L_2(\Omega^*)} .$$

**Доказательство**. Применяя layer-cake разложение, теорему Фубини и формулу (4), запишем

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx = \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \chi_{\{u^2(x)>t\}} dt dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty Vol\left(\left\{u^2(x) > t\right\}\right) dt = \int\limits_0^\infty Vol\left(\{u(x) > s\}\right) 2s ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mu_u(s) 2s ds = \int\limits_0^\infty \mu_{u^*}(s) 2s ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty Vol(\{u^*(x) > s\}) 2s ds = \int\limits_0^\infty Vol(\{{u^*}^2(x) > t\}) dt =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \chi_{\{{u^*}^2(x)>t\}} dt dx = \int\limits_\Omega |u^*(x)|^2 dx.$$

Утверждение леммы следует из того, что функция $u^*$ равноизмерима с функцией $u$.

Для доказательства теоремы будем пользоваться теоремой Ф. Рисса [4,5]

**Теорема Рисса Ф.**

$$\int_\Omega \int_\Omega f(y) g(x-y) h(x) dy dx \leq \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} f^*(y) g^*(x-y) h^*(x) dy dx, \tag{5}$$

где $f^*, g^*$ и $h^*$ симметрические невозрастающие перестановки положительных измеримых функций $f, g$ и $h$ соответственно.

## 3. Доказательства теоремы 1 и теоремы 2

### Доказательство теоремы 1

Так как симметричное полярное ядро потенциала Рисса (1) положительно (по теореме Енча [6]), то наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_1$- положительное и простое; соответствующая собственная функция $u_1(x)$ положительна в $\Omega$.

Обозначим через $\varepsilon_{d,\alpha}(x-y) := \frac{1}{C_\alpha |x-y|^{d-\alpha}}$. Из неравенства (5) и учитывая, что $\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)$ – положительная невозрастающая функция, следует

$$\int_\Omega \int_\Omega u_1(y)\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)u_1(x)dydx \leq \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)u_1^*(x)dydx.$$

Отсюда учитывая лемму 1 и вариоционный принцип для $\lambda_1(\Omega^*)$, имеем

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega \int_\Omega u_1(y)\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)u_1(x)dydx}{\int_\Omega (u_1(x))^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)u_1^*(x)dydx}{\int_{\Omega^*} (u_1^*(x))^2 dx} \leq$$

$$\leq \sup_{v \in L_2(\Omega^*)} \frac{\int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} v(y)\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)v(x)dydx}{\int_{\Omega^*} (v(x))^2 dx} = \lambda_1(\Omega^*).$$

Теорема 1 доказана полностью.

**Замечание 1.** Мы можем задаться вопросом, является ли шар единственной максимизирующей областю собственного значения $\lambda_1$? На самом деле нет, например диск после удаления конечного числа точек также является максимизирующей областю, а так как пространство $L_2(\Omega)$ не изменится, если мы удалим из $\Omega$ множества $\Omega_0$ меры нуль, то любая область вида $\Omega \setminus \Omega_0$ также максимизирует значение $\lambda_1$.

### Доказательство теоремы 2

Используя билинейное разложение повторных ядер, получаем формулу

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2(\Omega) = \int_\Omega \int_\Omega |\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2 dxdy \tag{6}$$

Из неравенства (5) и того, что $|\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2$ – положительная невозрастающая функция следует

$$\int_\Omega \int_\Omega |\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2 dxdy = \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} |\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2 dxdy$$

Тогда учитывая полученное, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2(\Omega) = \int_\Omega \int_\Omega |\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2 dxdy \leq \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} |\varepsilon_{d,\alpha}(x-y)|^2 dxdy = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2(\Omega^*)$$

Теорема 2 доказана.

**Замечание 2.** Можно обобщить теорему 2 записав ее в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n(\Omega^*) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n(\Omega), \tag{7}$$

но, очевидно, что в этом случае нам понадобятся некоторые ограничения на $n$ в зависимости от размерности $d$ евклидового пространства.

### 4. Об одном применении теорем 1-2 для краевой задачи Лапласиана

Пусть $d \geq 3$ и $\alpha = 2$. В этом случае потенциал Рисса совпадает с классическим ньютоновым потенциалом, т.е. ядро потенциала равно $\varepsilon_d(x-y) = \frac{1}{C_2|x-y|^{d-2}}$

**Лемма 2** *Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, $suppf \subset \Omega$ Ньютоновый потенциал*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy, \tag{8}$$

*удовлетворяет граничным условиям*

$$-u(x) + 2\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y)ds_y - 2\int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} ds_y = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

*Обратно, если функция $u \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению*

$$-\triangle u(x) = f(x),\ x \in \Omega \tag{10}$$

*и граничным условиям (9), тогда функция $u(x)$ есть Ньютоновый потенциал (8). Здесь $\frac{\partial}{\partial n_y}$ означает внешную нормальную производную.*

**Доказательство.** Предположим, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Непосредственными вычислениями для любого $x \in \Omega$, получим

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy = -\int\limits_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)\triangle_y u(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(-\varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} + \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y}u(y)\right) dS_y -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \triangle_y \varepsilon_d(x-y)u(y)dy = u(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) dS_y,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + n_d\frac{\partial}{\partial y_d}$ - внешняя нормальная производная и $n_1, ..., n_d$ - компоненты единичной нормали.

Это означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0,\ x \in \Omega. \tag{11}$$

Применяя свойства потенциалов двойного и простого слоя к формуле (11) при $x \to \partial\Omega$ получим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{12}$$

т.е. (12) является граничным условием для Ньютонова потенциала (8). Далее, легко показать переходя к пределу, что соотношение (12) остается в силе для всех $u \in H^2(\Omega)$. Таким образом, Ньютоновый потенциал (8) удовлетворяет граничному условию (9).

Наоборот, если функция $g \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $-\Delta g = f$ и граничному условию (9), то совпадает с Ньютоновым потенциалом (8). На самом деле, если это не так, то функция $v = u - g \in H^2(\Omega)$, где $u$ является потенциалом Ньютона (8), удовлетворяет однородному уравнению $\Delta v = 0$ с граничным условием

$$0 = -\frac{v(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}) dS_y, x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Как и выше, применяя формулу Грина к $v \in H^2(\Omega)$ мы увидим, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)\Delta_y v(y)dy =$$

$$= -v(x) - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0, \forall x \in \Omega.$$

Переходя к пределу при $x \to \partial\Omega$, получим

$$-v(x) + \frac{v(x)}{2} - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} v(y) - \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0.$$

Из (13) придем к

$$v(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{14}$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа следует, что $v(x) = u(x) - g(x) = 0$ для любого $x \in \Omega$, то есть $g = u, g$ совпадает с Ньютоновым потенциалом. Это завершает доказательство леммы 2.

Из леммы 2 следует, что спектральная задача на собственные значения Ньютонова потенциала (8) эквивалентна следующей спектральной граничной задаче

$$-\Delta u = \lambda u, \ x \in \Omega, \tag{15}$$

$$-u(x) + 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - 2\int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \tag{16}$$

В итоге, используя теорему 1, получаем аналог теоремы Релей-Крах-Фабера [7] для краевой задачи Лапласиана (15)-(16)

**Утверждение 1.** Среди всех областей с одинаковой мерой шар минимизирует первое собственное значение для Лапласиана (15) со специальным граничным условием нелокального типа (16).

Из теоремы 2 получаем следующий аналогичный результат как в [8]

**Утверждение 2.** Ряд квадратов обратных собственных значений задачи (15)-(16)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

в шаре минимизируется среди всех областей с одинаковой мерой такой же как и у шара.

Отметим, что в работе [9] в случае двухмерного круга и трехмерного шара найдены все собственные значении ньютоного потенциала.

**Заключение.** В работе мы доказали, что среди всех областей с одинаковой мерой шар максимизирует первое собственное значение потенциала Рисса. Показано, что сумма квадратов собственных значений в шаре также максимизируется среди всех областей с мерой равной мере шара. Результаты такого рода относятся к теории спектральной геометрии. Спектральная геометрия - сравнительно молодая и быстро развивающаяся математическая дисциплина, сочетающая в себе элементы дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории уравнений с частными производными и теории потенциала. Многие задачи спектральной геометрии мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики.

## Список литературы

[1] *Rayleigh J.W.S.* The theory of sound. – New York: Dover Pub., 1945. - 451 p.

[2] *Henrot A.* Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. – Basel: Birkhäuser, 2006. - 351 p.

[3] *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. – Москва: Наука, 1966. – С. 351.

[4] *Riesz F.* Sur une inr̆egalitr̆e intr̆egrale // J. London Math. Soc. - 1930. - Vol. 5. -P. 162–168.

[5] *Burchard A.* A Short Course on Rearrangement Inequalities [Электрон. ресурс]. - 2009. - URL: http://www.math.toronto.edu/almut/rearrange.pdf (дата обращения: 12.12.2012)

[6] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – С. 511.

[7] *Daners D.* A Faber - Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // Math. Ann. – 2006. - Vol. 335. - P. 767–785.

[8] *Dittmar B.* Sums of reciprocal eigenvalues of the Laplacian // Math. Nachr.– 2002. - Vol. 237. - P. 45-61.

[9] *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // Докл. РАН. – 2009. – №1(428). - С. 16–19.

*Поступила в редакцию 13 ноября 2012 года*