УДК 517.938

Г.Ю. Мехтиева, М.Н. Иманова, В.Р. Ибрагимов.

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан; e-mail: bsu@mail.ru

Об одном решении задачи Коши методом конечных элементов *

Здесь для решения обыкновенных дифференциальных уравнений построен новый класс гибридных методов типа многошаговых. Учитывая, что неявные методы являются более точными, рассматриваем вопрос об определении неяности гибридных методов и построим методы с порядком точности $p = 6$ для $k = 2$.

Ключевые слова: задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения.

G.Yu. Mehdiyeva, M.N. Imanova, V.R. Ibrahimov

An application of the hybrid methods to the numerical solution of ordinary differential equations of second order

Here for solving ODE of the second order we construct a new class of hybrid methods of multistep type. Taking into account that implicit methods are more precise we consider a question on definition of implicit character of hybrid methods and construct methods with the order of accuracy $p = 6$ for $k = 2$.

Один из первых гибридных методов построен (см. [1]) на базе метода трапеции, который имеет четвертый порядок точности. Поскольку метод трапеции является одношаговым, гибридные методы, построенные в [1] отнесли к классу методов Рунге-Кутта. Развивая идеи, построения гибридных методов Гир и Батчер (см. [2], [3]) построили многошаговые гибридные методы. Гибридные методы типа многошаговых построены и в работах других авторов (см. напр. [4], [5], [6]). В последнее время гибридные методы начали применяться и к численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [7], [8]). Здесь построен один гибридный метод, который обобщает известные гибридные методы и построен конкретный гибридный метод для трех точек, имеющий восьмой порядок точности.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$y'' = F(x, y, y'),\ \ y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0. \tag{1}$$

Предположим, что задача (1) на отрезке $[x_0, X]$ имеет единственное решение. Для нахождения ее численного решения отрезок $[x_0, X]$ разбиваем на N равных частей. Обозначим через y_mи y'_m приближенные значения задачи (1) и ее первую производную в

*Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской республики № EIF-2011-1(3)-82/27/1

точке x_m $(m = 0, 1, 2, ...)$. С помощью значений величины N можно определить количество подинтервалов, на которое делится отрезок $[x_0, X]$ с постоянным шагом $h > 0$. Точки разбиения отрезка $[x_0, X]$ обозначим через $x_m = x_0 + mh \quad (m = 0, 1, ..., N)$.

Нетрудно показать, что к численному решению задачи (1) можно применить следующий многошаговый метод:

$$\sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \bar{\beta}_i y'_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^{k} \bar{\gamma}_i F_{n+i}. \tag{2}$$

Метод (2) хорошо исследован многими авторами (см. напр. [9], [10], [11]). Очевидно, что для определения значений $F_m = F(x_m, y_m, y'_m) \quad (m = 0, 1, 2, ...)$ потребуется определить значения величины $y'_m (m = 0, 1, 2, ...)$. Обычно с этой целью предлагают k-шаговый метод с постоянными коэффициентами, имеющий следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha'_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta'_i F_{n+i}. \tag{3}$$

Как известно, при применении методов (2) и (3) к решению задачи (1) порядок точности его равен $p + 1$. Здесь величина p является степенью метода (3). Отметим, что здесь понятие степени и устойчивости методов (2) и (3) определяется, как в [9] и [12].

Известно, что если метод (2) устойчив и имеет степень $\bar{p}$, то имеет место $\bar{p} \leq 2[k/2]+2$. Из этих оценок получаем, что для построения более точных методов для решения задачи (1) надо заменить метод (3) более точными устойчивыми методами. Здесь предлагается заменить метод (3) следующим:

$$\sum_{i=0}^{k} \bar{\alpha}_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \bar{\beta}'_i F_{n+i+l_i}, \quad (|l_i| < 1, \; i = 0, 1, ..., k)\,. \tag{4}$$

Известно, что при решении некоторых практических задач, функция $F(z, x, y)$ не зависит от z. В этом случае задача (1) приобретает следующий вид:

$$y'' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0. \tag{5}$$

Одним из эффективных методов для численного решения задачи (5) считается метод Штермера, который в общем случае записывается в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}. \tag{6}$$

Если в методе (2) положим $\beta_i = 0$ $(i = 0, 1, ..., k)$, то получим из него метод (6). Тогда можно считать, что методы типа (6) входят в класс методов типа (2). Однако, эти методы имеют разные свойства. Например, как понятие устойчивости.

Отметим, что из метода (6) при $k = 2$ и при $k = 3$ получаем следующий метод Штермера

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n)/12,$$

который устойчив и имеет степень $p = 4$ (см. [13]).

Метод (4) является гибридным. Отметим, что с помощью подбора значений величин $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, l_i$ $(i = 0, 1, 2, ..., k)$ можно построить устойчивый метод со степенью $p = 2k+2$ (см. [14]). Таким образом, для решения задачи (1) можно построить метод на базе методов (2) и (4), имеющий порядок точности $2k+2$. Однако, использование таких методов более сложно, чем известные многошаговые методы.

Определение 1 *Метод (6) называют устойчивым, если корни многочлена $\bar{\rho}(\alpha) = \bar{\alpha}_k\lambda^k + \bar{\alpha}_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + \lambda_0$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней за исключением двукратного корня $\lambda = 1$.*

Однако, метод (2) является устойчивым, если корни многочлена $\bar{\rho}(\alpha) = \bar{\alpha}_k\lambda^k + \bar{\alpha}_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + \lambda_0$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней. Следовательно, нельзя рассматривать метод (6) как подкласс метода (2), поскольку каждый из них является самостоятельным объектом исследований.

В работе [7] к численному решению задачи (5) применен следующий метод:

$$\sum_{i=0}^{k} \hat{\alpha}_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\beta}_i f_{n+i} + h^2 \beta_{i+s} f_{n+1+s} + h^2 \beta_{1-s} f_{n+1-s}. \tag{7}$$

Этот метод является симметричным гибридным методом, который в одном варианте можно обобщить в следующем виде (см. [8]):

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i+l_i}, \quad (|l_i| < 1)\,. \tag{8}$$

Отметим, что из (8) можно получить метод со степенью $p = 3k$. Понятие степени для метода (8) определяется в следующей форме.

Определение 2 *Предположим, что функция $y(x)$ достаточно гладкая. Тогда целозначная величина $p > 0$ называется степенью метода (8), если имеет место:*

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\alpha_i y(x + ih) - h^2 \beta_i y''(x + (i + l_i)h)\right) = O(h^{p+2}), \quad h \to 0. \tag{9}$$

В этой работе исследуем следующий метод

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^{k} \gamma_i f_{n+i+\nu_i}, \quad (|\nu_i| < 1)\,, \tag{10}$$

который является более общим, чем метод (8). При $k = 2$ построен устойчивый гибридный метод со степенью $p = 8$.

1. Построение гибридного метода типа (10)

Как было показано в [8], метод (8) является более точным, чем метод Штермера. Отметим, что при построении конкретных гибридных методов получилось так, что в гибридных методах рядом со значением функции $f(x, y)$ в промежуточных точках участвует еще значения функции $f(x, y)$ в узловых точках разбиений. Учет этих значений в более общей форме привело к построению методов типа (10). Как известно, свойства численных методов определяются по значениям их коэффициентов. Поэтому рассмотрим некоторые условия, налагаемые на коэффициенты метода (10), которые являются необходимым условием при его исследовании

A. Величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \nu_i$ $(i = 0, 1, ..., k)$ – некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$.

B. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i; \quad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^{i+\nu_i};$$

не имеют общих множителей, отличных от константы.

C. Имеет место: $\sigma(1) + \gamma(1) \neq 0$ и $p \geq 1$.

Необходимость условий A очевидна.

Поэтому рассмотрим условие B и предположим обратное. Тогда обозначая через $\varphi(\lambda) \neq const$ общий множитель для этих многочленов, имеем:

$$\rho(\lambda) = \varphi(\lambda)\rho_1(\lambda), \quad \sigma(\lambda) = \varphi(\lambda)\sigma_1(\lambda), \quad \gamma(\lambda) = \varphi(\lambda)\gamma_1(\lambda).$$

С помощью оператора сдвига $E^\alpha y(x) = y(x + \alpha h)$ метод (10) можем переписать в виде следующего разностного уравнения:

$$\varphi(E)(\rho_1(E)y_n - h^2\sigma_1(E)y_n'' - h^2\gamma_1(E)y_n'') = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_1(E)y_n - h^2\sigma_1(E)y_n'' - h^2\gamma_1(E)y_n'' = 0. \tag{11}$$

Очевидно, что если обозначим через k_1 порядок разностного уравнения (11), то имеем $k_1 \leq k - 1$. Нетрудно понять, что разностные уравнения (10) и (11) эквивалентны и для того, чтобы разностное уравнение имело единственное решение, нужно задать $k_1 \leq k-1$ начальные данные. Следовательно, если задано k_1 начальных данных, то k-го порядка разностное уравнение (10) должно иметь единственное решение. Однако, из теории разностных уравнений известно, что если количество начальных данных меньше, чем порядок линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, то количество решений разностного уравнения больше одного. Отсюда получаем, что многочлены $\rho(\lambda)$,$\sigma(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$не имеют общих множителей, отличных от константы. Тогда переходя к пределу в равенстве (10) при $h \to 0$ имеем:

$$\rho(1)y(x) = 0, \;\; (x = x_0 + nh). \tag{12}$$

Отсюда получаем, что

$$\rho(1) = 0. \tag{13}$$

Учитывая условие (13) в (11), получим:

$$\rho_1(E)(y_{j+1} - y_j) - h^2\sigma(E)y_j'' - h^2\gamma(E)y_j'' = 0, \tag{14}$$

где $\rho_1(\lambda) = \lambda(x)/(\lambda - 1)$.

По теореме Лагранжа можно написать:

$$y_{j+1} - y_j = hy'_j + O(h^2),$$

с учетом которого в (14) имеем:

$$\rho_1(E)y'_j - h\sigma(E)y''_j - h\gamma(E)y''_j = O(h). \tag{15}$$

Переходя здесь к пределу $h \to 0$ имеем:

$$\rho_1(1) = \rho'(1) = 0. \tag{16}$$

Таким образом получили, что $\rho(1) = \rho'(1) = 0$ является необходимым условием сходимости метода (10).

Рассмотрим следующие разложения:

$$\rho(\lambda) = \rho(1) + \rho'(1)(\lambda - 1) + \frac{1}{2}\rho''(1)(\lambda - 1)^2 + O((\lambda - 1)^3),$$

$$\sigma(\lambda) = \sigma(1) + \sigma'(1)(\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2),$$

$$\gamma(\lambda) = \gamma(1) + \gamma'(1)(\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2),$$

$$y_{i+1} - y_i = hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + O(h^3).$$

С учетом условий (16) и этих разложений в (14) имеем:

$$\rho(1)(y_{j+1} - y_j) - h(\gamma(1) + \sigma(1))y''_j + \frac{1}{2}\rho''(1)(y'_{j+1} - y'_j) = O(h^2).$$

Суммируя равенство (17) по j от 0 до n имеем:

$$\rho''(1)(y'_{n+1} - y'_0) = 2(\gamma(1) + \sigma(1))\sum_{j=0}^{n} hy''_j + O(h).$$

Переходя здесь к пределу при $h \to 0$ имеем:

$$\rho''(1)(y'(x) - y'_0) = 2(\gamma(1) + \sigma(1))\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{17}$$

А из задачи (5) можем написать

$$y'(x) = y'_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{18}$$

Сравнивая равенства (17) и (18) и учитывая, что решение задачи (5) единственно, получим:

$$\rho''(1) = 2(\gamma(1) + \sigma(1)).$$

Отсюда следует, что если $\gamma(1)+\sigma(1)=0$, то $\rho''(1)=0$. В асимптотическом равенстве (15) используем замены $z(x)=y'(x)$. Тогда имеем:

$$\rho_1(E)z_j - h(\sigma(E)+\gamma(E))z'_j = O(h). \tag{19}$$

Легко заметить, что из условий $\rho''(1)=0$, следует, что $\lambda=1$ является двукратным корнем многочлена $\rho_1(\lambda)$. Однако асимптотическому равенству (19) можно рассматривать как аппроксимации разностного метода

$$\sum_{i=0}^{k}\bar{\alpha}_i z_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}(\beta_i z'_{n+i} + \gamma_i z'_{n+i+\nu_i}),$$

который при $\gamma(1)+\sigma(1)=0$ или $\rho'_1(1)=0$ является неустойчивым. Следовательно

$$\rho''(1) = 2(\gamma(1)+\sigma(1)) \neq 0.$$

Таким образом доказали, что если метод (10) сходится, то $\gamma(1)+\sigma(1)\neq 0$. Теперь докажем, что если метод (10) сходится, то $p\geq 1$. Допустим, что метод (10) имеет степень p. Тогда имеет место асимптотическое равенство (9), которое с помощью выше полученных можно переписать в виде:

$$h^2\rho''(1)y''_j - h^2 2(\gamma(1)+\sigma(1))y''_j + O(h) = O(h^{p+2}), \quad h\to 0. \tag{20}$$

Отсюда следует условие $p\geq 1$, что и требовалось доказать.

Отметим, что необходимое условие сходимости (20) можно написать в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i = 0; \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k}\frac{i^2}{2!}\alpha_i = \sum_{i=0}^{k}(\beta_i+\gamma_i). \tag{21}$$

Используя связь между коэффициентами и степенью метода (10) можно доказать, что из выполнения условий (21) следует $p\geq 1$.

Отметим, что при исследовании метода (10) свойства его зависят от значений параметров $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \nu_i$ $(i=0,1,...,k)$. Поэтому рассмотрим определение значений параметров $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \nu_i$ $(i=0,1,...,k)$. С этой целью используем метод неопределенных коэффициентов и рассмотрим следующие разложения:

$$y(x+ih) = y(x) + ihy'(x) + \frac{(ih)^2}{2!}y''(x) + ... + \frac{(ih)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2}), \tag{22}$$

$$y''(x+l_ih) = y''(x) + l_ihy'''(x) + \frac{(l_ih)^2}{2!}y^{IV}(x) + ... + \frac{(l_ih)^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p+1)}(x) + O(h^p). \tag{23}$$

Здесь величины $l_i = i+\nu_i$ $(i=0,1,2,...,k)$.

В предположении достаточной гладкости функции $y(x)$ величины $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,l_i$ $(i=0,1,2,...,k)$ подбираем так, чтобы метод (10) имел степень p. Для этого равенства (22) и (23) учтем в равенстве (9). Тогда для определения значений величин $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,l_i$ $(i=0,1,2,...,k)$ получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i = 0; \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{k}(\frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\beta_i+\frac{l_i^{l-1}}{(l-1)!}\gamma_i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{i^{l+1}}{(l+1)!}\alpha_i\ \ (l=1,2,...,p),\ \ 0!=1. \tag{24}$$

В системе (24) количество неизвестных равно $4k+4$, а количество уравнений равно $p+2$. Очевидно, что эта система всегда имеет нулевое решение, однако нас интересует ненулевое (нетривиальное) решение. А для этого между количеством уравнений и неизвестных система (24) должна иметь следующее соотношение: $p+2<4k+4$.

Отсюда следует, что $p_{\max}=4k+1$. Легко заметить, что если рассмотрим случай $\nu_i=0$ $(i=0,1,...,k)$ то из метода (10) следует метод (6), для которого получаем, что$p_{\max}=2k$. Следовательно, метод (10) является более точным, чем метод (6). Для иллюстрации полученного результата построим конкретный метод и рассмотрим построение некоторых конкретных методов. В случае $k=1$ не существуют методы типа (10) (см.[12]), поэтому положим $k=2$. В этом случае для определения коэффициентов получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{gathered}\beta_2+\beta_1+\beta_0+\gamma_2+\gamma_1+\gamma_0=1,\\ 2\beta_2+\beta_1+l_2\gamma_2+l_1\gamma_1+l_0\gamma_0=1,\\ 2\beta_2+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{l_2^2}{2}\gamma_2+\frac{l_1^2}{2}\gamma_1+\frac{l_0^2}{2}\gamma_0=\frac{7}{12},\\ \frac{4}{3}\beta_2+\frac{1}{6}\beta_1+\frac{l_2^3}{6}\gamma_2+\frac{l_1^3}{6}\gamma_1+\frac{l_0^3}{6}\gamma_0=\frac{1}{4},\\ \frac{2}{3}\beta_2+\frac{1}{24}\beta_1+\frac{l_2^4}{24}\gamma_2+\frac{l_1^4}{24}\gamma_1+\frac{l_0^4}{24}\gamma_0=\frac{31}{360},\\ \frac{4}{15}\beta_2+\frac{1}{120}\beta_1+\frac{l_2^5}{120}\gamma_2+\frac{l_1^5}{120}\gamma_1+\frac{l_0^5}{120}\gamma_0=\frac{1}{40},\\ \frac{4}{45}\beta_2+\frac{1}{720}\beta_1+\frac{l_2^6}{120}\gamma_2+\frac{l_1^6}{120}\gamma_1+\frac{l_0^6}{120}\gamma_0=\frac{127}{20160},\\ \frac{8}{315}\beta_2+\frac{1}{5040}\beta_1+\frac{l_2^7}{5040}\gamma_2+\frac{l_1^7}{5040}\gamma_1+\frac{l_0^7}{5040}\gamma_0=\frac{17}{12096}.\end{gathered} \tag{25}$$

Решая эту систему получаем разные гибридные методы с разными свойствами. Например, при $\bar{\gamma}_i=i$ решая систему (25) получаем следующий метод:

$$y_{n+2}-5y_{n+1}-y_n+h^2(f_n+10f_{n+1}+f_{n+2})/12, \tag{26}$$

который входит в класс методов Штермера, имеет степень $p=4$ и известен, как метод Нумерова (см. напр. [13, стр.443]). Этот метод интересен тем, что, решая систему (25) при $k=3$ и $\gamma_i=i$ $(i=1,2,3,)$ также получаем метод (26).

Теперь рассмотрим решение системы (25) в случае $k=2$ для произвольного l_i. Тогда получим следующее решение:

$$\beta_0=\beta_2=\frac{19}{1740},\ \ \beta_1=\frac{1}{2},\ \ \gamma_0=1-\sqrt{\frac{13}{42}},\quad \gamma_2=1+\sqrt{\frac{13}{42}},\ \ \gamma_1=1,$$

$$\gamma_0=\gamma_2=\frac{441}{1885},\ \ \gamma_1=\frac{2}{195}.$$

С учетом следующего метода, который устойчив и имеет степень $p = 8$, в формуле (10) получим:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2(19f_{n+2} + 870f_{n+1} + 19f_n)/1740+$$

$$+h^2(441 \cdot 39f_{n+\gamma_2} + 2 \cdot 377f_{n+\gamma_1} + 441 \cdot 39f_{n+\gamma_0})/39 \cdot 1885.$$

Список литературы

[1] *Hammer P.C., Hollingsworth J.W. Trapezoildal methods of approximating solution of differential equations // MTAC-vol.9.- 1955.- P.92-96.*

[2] *Gear C.S. Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations // SIAM, J. Numer. Anal. -v. 2.- 1965.- P. 69-86.*

[3] *Butcher J.C. A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations // J. Assoc. Comput. Math.- v.12.- 1965.- P.124-135.*

[4] *Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р. Построение гибридных методов с помощью методов Рунге-Кутты // Вестник БГУ. -2006.- № 3.- P.17-22.*

[5] *Ибрагимов В.Р. Один нелинейный метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Диф. урав. и применения Труды докл. Второй международ. конф. Руссе. Болгария. -1982. -P.310-319.*

[6] *Bokhoven W.M.G. Efficient higher order imlicit one-step methods for integration of stiff differ. eq-s // BIT.20.-1980.- P.34-43.*

[7] *Ehigie J.O., Okunuga S.A., Sofoluwe A.B., Akanbi M.A. On generalized 2-step continuous linear multistep method of hybrid type for the integration of second order ordinary differential equations // Archives of Applied Research. -2(6),-2010.-P.362-372.*

[8] *Mehdiyeva G.Yu., Imanova M.N., Ibrahimov V.R. On an application of hybrid method to solving second ordinary differential equations The international conference on applied mathematics, modeling And computational science // Waterloo, Canada. -July 25 - 29. -2011. - P. 363.*

[9] *15. Dahlquist, G. Stability and Error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations // Uppsala, Almqvist and Wiksells boktr, No.13. -1959. P.5-92.*

[10] *Enrite W.H. Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations // SIAM, J.Numer.Anal. -1974. -№2. -P.321-332.*

[11] *Ибрагимов В.Р. Об одной связи между порядком и степенью для устойчивой формулы с забеганием вперед // Ж.Вычис. мат. и мат. физ. -№7.- 1990.- С.1045-1056.*

[12] *Ibrahimov V.R. On the maximum degree of the k-step Obrechkoff's method // Bulletin of Iranian Mathematical Society. -Vol. 20. -2002. -No.1, P.1-28.*

[13] *Hairier E., Norsett S.P., Wanner G.Solving ordinary differential equations //M., Mir. -1990. - P. 512.*

[14] *Mehdiyeva G.Yu., Imanova M.N., Ibrahimov V.R. On one generalization of hybrid methods. Proceedings of the 4th international conference on approximation methodsn and numerical modeling in environment and natural resources // Saidia, Morocco.- may 23-26. -2011. -P.543-547.*

Поступила в редакцию 05 декабря 2012 года