УДК 519.67

А.Н. Темирбеков
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: almas_tem@mail.ru

Математические вопросы разностной схемы для уравнений пограничного слоя атмосферы*

Разработана математическая модель для уравнений пограничного слоя атмосферы и уравнения переноса и трансформации примесей вредных веществ в атмосферном воздухе. Доказана разрешимость математической модели и изучены качественные своиства решений. Построены конечно-разностные схемы для двумерных и трехмерных уравнений ПСА. Для решения разностных уравнений получены априорные оценки. Исследованы математические вопросы разностных схем для уравнений пограничного слоя атмосферы. Доказана лемма для сеточных функции. С помощью доказанной леммы получили основные энергетические неравенства. В силу доказанной леммы и используя неравенство Коши-Буняковского оценены основные величины неравенств. Доказана теорема сходимости в нормах функциональных пространств. Получены основные априорные оценки для решения разностной задачи. Исследованы аппроксимационные свойства и доказана теорема сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Для доказательства теоремы и аппроксимационных свойств разностная задача рассматривалась в стационарном аналоге. Проведены методические численные расчеты.
Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, разностная схема, сила Кариолиса, уравнения пограничного слоя атмосферы, неравенство Коши-Буняковского.

А.Н. Темірбеков ,
Атмосфера қабатының теңдеуі үшін айырымдық сұлбалардың математикалық мәселелері

Атмосфера қабатының теңдеуі және атмосферада зиянды заттардың трансформациялануына математикалық модель құрылды. Математикалық модельдің шешімі болатындығы және модельдің сапалы қасиеттері зерттелді. Екі өлшемді және үш өлшемді атмосфера қабатының теңдеулері үшін ақырлы айырымдық сұлбалар құрылды. Ақырлы-айырымдық теңдеулердің шешімі априорлы бағаланды. Атмосфера қабатының теңдеуі үшін, жасалған айырымдық сұлбалар математика тұрғысынан зерттелді. Торлық функциялар үшін лемма дәлелденді. Дәлелденген лемма арқылы негізі энергетикалық теңсіздіктер алынды. Дәлелденген лемманы және Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып, негізгі шамаларға баға берілді. Функционалдық кеңістіктер нормасында жинақтылық теоремасы дәлелденді. Айырымдық есептің шешімі үшін, негізгі априорлы бағалар алынды. Дифференциалдық есептің шешімі жинақталатындығы туралы

*Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0558/ГФ, 2012г.-2014г

теорема дәлелденді және аппроксимациялық қасиеттері зерттелді. Аппроксимациялық қасиеттерді және теореманы дәлелдеу үшін, айырымдық есеп стационар үлгіде қарастырылды.

Түйін сөздер: Дифференциялдық теңдеулер, айырымдық сұлба, Кариолис күші, атмосфера қабатының теңдеуі, Коши-Буняковский теңсіздігі.

A.N. Temirbekov,

Mathematical problems in the difference scheme for equations of the atmosphere boundary layer

The mathematical model for the atmospheric boundary layer equations and the transport equation and transformation of pollutants harmful substances in the air. Proved the solvability of the mathematical model and studied qualitative Properties of solutions. The finite-difference scheme for two-and three-dimensional equations of ABL. To solve the differential equations, a priori estimates. Investigated mathematical questions of difference schemes for the equations of the boundary layer of the atmosphere. We prove the lemma for the grid function. With the help of this lemma have the basic energy inequality. By the lemma and using the Cauchy-Schwarz inequality to estimate the basic size. The convergence theorem in the rules of functional spaces. Obtain the basic a priori estimates for the solution of the difference problem. Studied approximation properties and prove the convergence of a solution of the problem to the solution of the differential problem. To prove the theorem and approximation properties of the difference problem is considered in a stationary analog. Conducted methodical numerical calculations.

Key words: Differential equations, difference scheme, Coriolis force, equations of the atmosphere boundary layer, the Cauchy-Schwarz inequality.

Постановка задачи. Основу моделей описывающих мезометеорологические процессы и перенос примесей вредных веществ составляют уравнения пограничного слоя атмосферы.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = l\vartheta + \lambda\delta_x T + \Delta u, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = -lu + \lambda\delta_y T + \Delta\vartheta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Эти уравнения являются нелинейными и методы их решения имеют свои общие особенности с уравнениями гидродинамики. Широкое распространение при решении многомерных задач получили методы расщепления [1, 2]. В области Ω построим сетку

$\Omega_h,\ \Omega_h = \omega_h \bigcup G_h \bigcup Q_h$, где

$$\omega_h = \{(x_{1i}, x_{2j}),\ \ x_{1i} = ih_1,\ \ x_{2j} = jh_2,\ \ i = 0, 1, \ldots, N_1,$$

$$j = 0, 1, \ldots, N_2, h_1 = l_1/N_1,\ \ h_2 = l_2/N_2\},$$

$$G_h = \{(x_{1i+1/2}, x_{2j}),\ x_{1i+1/2} = (i + 1/2)h_1,\ x_{2j} = jh_2,\ i = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

$$j = 0, 1, \ldots, N_2, h_1 = l_1/N_1,\ h_1 = l_1/N_1,\ h_2 = l_2/N_2\},$$

$$Q_h = \{(x_{1i}, x_{2j+1/2}),\ x_{1i} = ih_1,\ x_{2j+1/2} = (j + 1/2)h_2,\ i = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

$$j = 0, 1, \ldots, N_2 - 1, h_1 = l_1/N_1,\ h_2 = l_2/N_2\}.$$

Как и в [1] в узлах с номерами $(i + 1/2, j)$ и $(i, j + 1/2)$ определяются значения соответственно продольной и поперечной компонент скорости, а в узлах с целыми номерами $(i, j)-$значения давления. Начальные условия при $t = 0$ в моделях пограничного слоя атмосферы задаются по данным измерений и, таким образом относится к числу входных параметров. При решении задач привязанной к конкретному физико-географическому району, целесообразно использовать начальные условия следующего вида:

$$u = u(x, y, z),\ \vartheta = \vartheta(x, y, z),\ \omega = \omega(x, y, z),\ \theta = \theta(x, y, z).$$

При изменении фонового ветра по времени на входных боковых границах, можно использовать следующие граничные условия.

$$u = f_1(y, z, t), \vartheta = f_2(y, z, t), \omega = f_3(y, z, t), \theta = f_4(y, z, t) \text{ при } x = 0, X,$$

$$u = f_1(x, z, t), \vartheta = f_2(x, z, t), \omega = f_3(x, z, t), \theta = f_4(x, z, t) \text{ при } y = 0, Y.$$

Граничные условия более наглядно графически представлены на рисунке 1.
Рассмотрим следующую разностную схему

$$\begin{gathered}\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^n_{i+1/2,j}}{\tau} + L^{(1)}_{1h} u^n_{i+1/2j} + P^{n+1}_{x,ij} = l\vartheta^{n+1}_{i+1/2,j} + ((u^n_{\overline{x},i+1/2,j})_x + (u^n_{y,i+1/2,j})_{\overline{y}}) + \\ +\lambda\delta_x T^{n+1}_{i+1/2,j}, \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1,\ j = 1, \ldots, N_2 - 1, \\ \frac{\vartheta^{n+1}_{i,j+1/2} - \vartheta^n_{ij+1/2}}{\tau} + L^{(2)}_{1h} \vartheta_{i,j+1/2} + P^{n+1}_{y,ij} = -lu^{n+1}_{i,j+1/2} + ((\vartheta^n_{\overline{y},i,j+1/2})_y + (\vartheta^n_{x,i,y+1/2})_{\overline{x}}) + \\ +\lambda\delta_y T^{n+1}_{i,j+1/2}, \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1,\ j = 1, \ldots, N_2 - 2.\end{gathered} \tag{2}$$

Уравнение неразрывности

$$\begin{gathered}div_h \nu^{n+1} = u^{n+1}_{\overline{x}_1,i+1/2j} + \upsilon^{n+1}_{\overline{x}_2,ij+1/2} = 0, \\ \frac{u^{n+1}_{i+1/2j} - u^{n+1}_{i-1/2j}}{h_1} + \frac{\vartheta^{n+1}_{ij+1/2} - \vartheta^{n+1}_{ij-1/2}}{h_2}.\end{gathered} \tag{3}$$

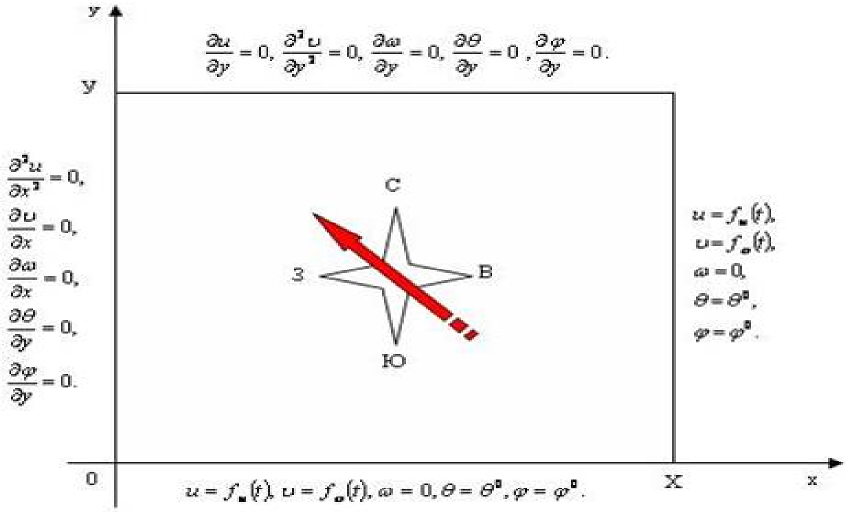


Рисунок 1. Граничные условия при ветре с юго-восточной стороны

Операторы $L_{1h}^{(i)}$, $i = 1, 2$ соответствуют разностной аппроксимации конвективных членов и определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
&L_{1h}^{(1)} u_{i+1/2j}^n = \tfrac{1}{4h_1}((u_{i+3/2j}^n + u_{i+1/2j}^n)^2 - (u_{i+1/2j}^n + u_{i-1/2j}^n)^2) + \\
&+ \tfrac{1}{4h_2}((\upsilon_{i+1j+1/2}^n + \upsilon_{ij+1/2}^n)(u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n) - \\
&(\upsilon_{i+1j-1/2}^n + \upsilon_{ij-1/2}^n)(u_{i+1/2j}^n + u_{i+1/2j-1}^n)), \\
&L_{1h}^{(2)} \upsilon_{ij+1/2}^n = \tfrac{1}{4h_1}((u_{i+1/2j+1}^n + u_{i+1/2j}^n)(\upsilon_{i+1j+1/2}^n + \upsilon_{ij+1/2}^n) - \\
&-(u_{i-1/2j+1}^n + u_{i-1/2j}^n)(\upsilon_{ij+1/2}^n + \upsilon_{i-1,j+1/2}^n)) + \\
&+ \tfrac{1}{4h_2}((\upsilon_{ij+3/2}^n + \upsilon_{ij+1/2}^n)^2 - (\upsilon_{ij+1/2}^n + \upsilon_{ij-1/2}^n)^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

На границе сеточной области Ω_h

$$\begin{aligned}
&\upsilon_{0j+1/2}^n = \upsilon_{N_1,j+1/2}^{n+1} = u_{1/2j}^{n+1} = u_{N_1-1/2,j}^{n+1} = 0, \\
&\upsilon_{i,1/2}^{n+1} = \upsilon_{N_1,j-1/2}^{n+1} = u_{i+1/2,0}^{n+1} = u_{i+1/2,N_2}^{n+1} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для однозначного определения давления потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\textstyle\sum_{\bar{x} \in \omega_h^{(1)}} p(\bar{x}) h_1 h_2 = 0. \tag{6}$$

где $\omega^{(1)} \subseteq \omega_h$.

Разностная задача (2)-(6) может быть реализован как схема расщепления по физическим процессам, которую в векторной форме можно представить в следующем виде

$$\frac{V^{n+1/2}-V^{n}}{\tau}+L_hV^n=f_h(\overrightarrow{x}),\overrightarrow{x}\in\Omega_h,$$

$$\frac{V^{n+1}-V^{n+1/2}}{\tau}+\nabla_h p^{n+1}=V^{n+1}, \tag{7}$$

$$div_h V^{n+1}=0.$$

Лемма. Для любых сеточных функций $u_{i+1/2j}\in G_h$, $\upsilon_{ij+1/2}\in Q_h$ удовлетворяющая условиям (3), (5) справедливы тождества

$$(L^{(1)}_{1h})u_{i+1/2j},u_{i+1/2j})=(L^{(2)}_{1h}\upsilon_{ij+1/2},\upsilon_{ij+1/2})=0. \tag{8}$$

где суммирование производится по внутренним узлам сетки $G\bigcup Q_h$.
Доказательство. Докажем, что $(L^{(1)}_{1h}u_{i+1/2j},\,u_{i+1/2j})=0$

$$(L^{(1)}_{1h}u_{i+1/2j},\,u_{i+1/2j})=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{M-1}[(u_{i+3/2j}+u_{i+1/2j})^2u_{i+1/2j}-$$

$$-(u_{i+1/2j}-u_{i-1/2j})^2u_{i+1/2j}+(\upsilon_{i+1,j+1/2}+\upsilon_{ij+1/2})\cdot \tag{9}$$

$$\cdot(u_{i+1/2j+1}+u_{i+1/2j})u_{i+1/2j}-(\upsilon_{i+1j-1/2}+\upsilon_{ij-1/2})\cdot$$

$$\cdot(u_{i+1/2j}+u_{i+1/2j-1})u_{i+1/2j}]h_1h_2.$$

Для любых сеточных функций φ и ψ имеем

$$(\varphi_i\psi_i\psi_{i-1})_x=(\varphi_i\psi_i)_x\psi_i+\varphi_i\psi_i(\psi_{i-1})_x=\varphi_{ix}\psi_i^2+(\varphi_{i+1}\psi_{ix}+\varphi_i\psi_{i-1,x})\psi_i$$

Используя эту формулу и (4), преобразуем все слагаемые (9)

$$(u_{i+3/2j}(u_{i+1/2j})_{x_1}+u_{i+1/2j}(u_{i+1/2j})_{\bar{x}_1})u_{i+1/2j}=$$

$$=(u_{i+1/2j}u_{i+1/2j}u_{i-1/2j})_{x_1}-(u_{i+1/2j})_x\cdot u^2_{i+1/2j.}$$

$$(u_{i+1/2j}(u_{i+1/2j})_{x_1}+u_{i-1/2}(u_{i+1/2j})_{\bar{x}_1})u_{i+1/2j}= \tag{10}$$

$$(u_{i-1/2j}u_{i+1/2j}u_{i-1/2j})_{x_1}-(u_{i-1/2j})_{x_1}\cdot u^2_{i+1/2j}$$

$$(\upsilon_{i+1,j+1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2}+\upsilon_{i+1,j-1/2}(u_{i+1/2j})_{\bar{x}_2})u_{i+1/2j}=$$

$$=(\upsilon_{i+1,j-1/2}u_{i+1/2j}u_{i+1/2j-1})_{x_2}-(\upsilon_{i+1,j-1/2})_yu^2_{i+1/2j}$$

$$(\upsilon_{ij+1/2}(u_{i+1/2j})_{x_2}+\upsilon_{ij-1/2}(u_{i+1/2j})_{\bar{x}_2})u_{i+1/2j}= \tag{11}$$

$$=(\upsilon_{ij-1/2}u_{i+1/2j}u_{i+1/2j-1})_{x_2}-(\upsilon_{ij-1/2})_{x_2}u^2_{i+1/2j}$$

Далее получим

$$(L_{1h}^{(1)}u_{i+1/2j},u_{i+1/2j})=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{M-1}[(u_{i+1/2j}u_{i+1/2j}u_{i-1/2j})_{x_1}-$$

$$-(u_{i+1/2j})_{x_1}u_{i+1/2j}^2+(u_{i-1/2j}u_{i+1/2j}u_{i-1/2j})_{x_1}$$

$$-(u_{i-1/2j})_{x_1}u_{i+1/2j}^2+(\upsilon_{i+1j-1/2}u_{i+1/2j}u_{i+1/2j-1})_{x_2}$$

$$-(\upsilon_{i+1,j-1/2})_{x_2}u_{i+1/2j}^2+(\upsilon_{ij-1/2}u_{i+1/2j}u_{i+1/2j-1})_{x_2}$$

$$-(\upsilon_{ij-1/2})_{x_2}u_{i+1/2j}^2]h_1h_2$$

С учетом граничных условий (3) и уравнения неразрывности (5) имеем

$$(L_{1h}^{(1)}u_{i+1/2j},u_{i+1/2j})=\frac{1}{4h_1}\sum_{j=1}^{M-1}[-u_{3/2j}u_{3/2j}u_{1/2j}+u_{N-1/2j}u_{N-1/2j}u_{N-3/2j}-$$

$$-u_{1/2j}u_{3/2j}u_{1/2j}+u_{N-3/2j}u_{N-1/2j}u_{N-3/2j}]h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{4h_2}\sum_{i=1}^{N-2}[-\upsilon_{i+1,3/2}u_{i+1/2,1}u_{i+1/2,0}+\upsilon_{i+1,M-1/2}u_{i+1/2,M}u_{i+1/2,M-1}-$$

$$-\upsilon_{i,1/2}u_{i+1/2,1}u_{i+1/2,0}+\upsilon_{iM-1/2}u_{i+1/2M}u_{i+1/2M-1}]h_1h_2=0.$$

Используем неравенство Коши-Буняковского

$$|2\tau^2(L_{1h}V^n,V_t^n)|\le\frac{3\sqrt{2\tau^2}}{h}\left\{\sum\nolimits_{\omega_h}[(u_{i+1/2j}^n)^2+(\upsilon_{ij+1/2}^n)^2]^2h_1h_2\right\}^{1/2},$$

$$\|V_t^n\|=\frac{3\sqrt{2}\tau^2}{h}\left\||V^n|^2\right\|\cdot\|V_t^n\|.$$

Величина $||\,|V^n|^2\,||$ оценивается так

$$\left\||V^n|^2\right\|\le\sqrt{2}\,\|V^n\|\cdot\|grad_hV^n\|.$$

тогда

$$\left\|\vec{V}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{V}^n\right\|^2+\left\|\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^n\right\|^2-\frac{\tau^2}{2}\left\|\vec{V}_t^n\right\|^2-\frac{C_1^2}{2}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\left\|\vec{V}^n\right\|^2\cdot\left\|grad_h\vec{V}^n\right\|^2+$$
$$+2\tau\cdot\left(\left\|grad_h\vec{V}^n\right\|^2+\left\|grad_h\vec{V}^{n+1}\right\|^2-\left\|grad_h\left(\vec{V}^{n+1}-\vec{V}^n\right)\right\|^2\right)\le2\tau\left|\left(\vec{f},^n\vec{V}^{n+1}\right)\right|. \qquad (12)$$

где

$$C_1=6,\|grad_hV\|^2=\|grad_hu\|_{(1)}^2+\|grad_h\upsilon\|_{(2)}^2.$$

Используя (12) имеем

$$\left\|\vec{V}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\vec{V}^{n}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n}\right\|^2 + \left(2\tau - \frac{C_1^2}{2}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \left\|\vec{V}^{n}\right\|^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left\|grad_h\vec{V}^{n}\right\|^2 + 2\tau\left\|grad_h\vec{V}^{n+1}\right\|^2 \le 2\tau\left\|grad_h\left(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n}\right)\right\|^2 + 2\tau\left|\left(\vec{f}^{n}, \vec{V}^{n+1}\right)\right| \qquad (13)$$

Используя неравенство

$$\left\|grad_h\left(V^{n+1} - V^{n}\right)\right\|^2 \le \frac{8}{h^2}\left\|V^{n+1} - V^{n}\right\|^2$$

из (13) получим

$$\left\|V^{n+1}\right\|^2 - \left\|V^{n}\right\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{8\tau}{h^2}\right)\cdot\left\|V^{n+1} - V^{n}\right\|^2 +$$
$$+\tau\left(1 - \frac{C_1^2}{2}\frac{\tau}{h^2}\left\|V^{n}\right\|^2\right)\cdot\left\|grad_h V^{n}\right\|^2 + \qquad (14)$$
$$+\tau\left\|grad_h V^{n+1}\right\|^2 \le 2\tau\left\|\vec{f}^{n}\right\|\cdot\left\|V^{n+1}\right\|$$

Наложим на h, τ условие

$$\frac{1}{2} - \frac{8\tau}{h^2} \equiv \delta > 0 \qquad (15)$$

Тогда получим неравенство

$$\left\|V^{n+1}\right\|^2 - \left\|V^{n}\right\|^2 + \tau\left(1 - \frac{C_1^2}{2}\frac{\tau}{h^2}\left\|V^{n}\right\|^2\right)\cdot\left\|grad_h V^{n}\right\|^2 +$$
$$\tau\left\|grad_h V^{n+1}\right\|^2 \le 2\tau\left\|\vec{f}^{n}\right\|\cdot\left\|V^{n+1}\right\|. \qquad (16)$$

Которое позволяет оценить $\left\|V^{n}\right\|$, $\left\|grad_h V^{n}\right\|$ если $\frac{\tau}{h^2}$ взять достаточно малым. Действительно, до тех пор, пока коэффициент при неотрицателен, имеем

$$\left\|V^{n+1}\right\|^2 - \left\|V^{n}\right\|^2 \le 2\tau\left\|\vec{f}^{n}\right\|\cdot\left\|V^{n+1}\right\|,$$

$$\left(\left\|V^{n+1}\right\| - \left\|V^{n}\right\|\right)\cdot\left(\left\|V^{n+1}\right\| + \left\|V^{n}\right\|\right) \le 2\tau\left\|\vec{f}^{n}\right\|\left\|V^{n+1}\right\|,$$

$$\left\|V^{n+1}\right\| \le \left\|V^{n}\right\| + 2\tau\left\|\vec{f}^{n}\right\|.$$

Отсюда получим

$$\left\|V^{n+1}\right\| \le \left\|V^{0}\right\| + 2\tau\sum_{k=0}^{n}\left\|\vec{f}^{k}\right\|. \qquad (17)$$

Поэтому, если τ/h^2 подчинить еще условию

$$1-\frac{C_1^2}{2}\frac{\tau}{h^2}\left(\left\|V^0\right\|^2+2\tau\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\vec{f}^k\right\|\right)^2\equiv\delta_1>0 \tag{18}$$

Тогда из (16) и (17) выведем оценку

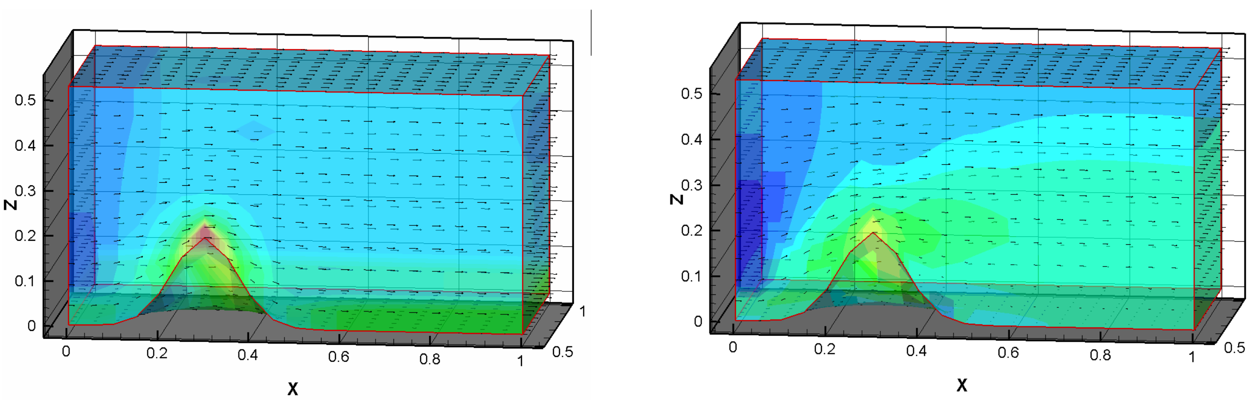
$$\begin{gathered}\left\|V^{n+1}\right\|^2+\tau\delta_1\sum_{k=0}^n\left\|grad_hV^k\right\|^2+\tau\sum_{k=0}^n\left\|grad_hV^{k+1}\right\|^2\le\\ \le\left\|V^0\right\|^2+2\left(\tau\sum_{k=0}^n\left\|\vec{f}^k\right\|\right)\cdot\left(\left\|V^0\right\|+2\tau\sum_{k=0}^n\left\|\vec{f}^k\right\|\right)\le\\ \le2\left\|V^0\right\|^2+5\left(\tau\sum_{k=0}^n\left\|\vec{f}^k\right\|\right)^2\end{gathered} \tag{19}$$

А из (17) и (20) оценку

$$\begin{gathered}\left\|V^{n+1}\right\|^2+\delta\sum_{k=0}^n\left\|V^{k+1}-V^k\right\|^2+\tau\delta_1\sum_{k=0}^n\left\|grad_hV^k\right\|^2+\\ +\tau\sum_{k=0}^n\left\|grad_hV^{k+1}\right\|^2\le\left\|V^0\right\|^2+5\left(\tau\sum_{k=0}^n\left\|\vec{f}^k\right\|\right)^2\end{gathered} \tag{20}$$

Итак, при выполнении условий (18) и (19) верна оценка (20) правая часть которой не превосходит известной нам величины.

Заключение. Для проверки эффективности построенной разностной схемы решена трехмерная тестовая задача в области с криволинейной нижней границей. На рисунке 2 приведены численные результаты методических расчетов в виде вихри и поля вектора скорости. Все численные результаты модельных задач совпадают с результатами прежних работ. Из рисунков заметны влияние температуры, т.е. от нагрева постилающей поверхности образуются мало заметные, сравнительно со скоростью в горизонтальном направлении, вертикальные течения.



а) без учета изменения температуры б) с учетом изменения температуры

Рисунок 2. Трехмерное векторное поле и ротор вектора скорости на сечениях

Список литературы

[1] *Beloserkovskiy O.M.* Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred - M.:Nauka, -1984.- S 520.

[2] *Yanenko N.N.* Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki -Novosibirsk, -1967.- S 197.

[3] *Anderson D.A., Tannehil J.C. and Pletcher R.H.* // Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer - Neshh Jork: McGrashh-Hill, 1984. - P 814.

[4] *Temam R.* Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz -M.: Mir, - 1981. - S 408.

[5] *Smagulov Sh. S., N. T. Danaev, N. M. Temirbekov* Modelirovanie kraevykh usloviy dlya davleniya i polnogo napora v zadachakh gidrodinamiki s pomosh'yu metoda fiktivnykh oblastey // DAN Rossii.- Moskva.- 2000. - T. 374.- № 5.- S. 333-335

[6] *Smagulov Sh., Zhumagulov B.T., Danaev N.T., Temirbekov N.T.* Numerical methods of solution of Navier-Stokes equation in intricate regions // III international seminar of flame structure. - Alma-Ata. - 18-20 September, 1990.- P. 8-18.

[7] *Abdibekov U.S., Zhumagulov B. T., Hikmetov A. K.* Modelirovanie rasprostraneniya primesi v svobodnoi atmosfere // Zhurnal "Vychislitel'nye tehnologiy Novosibirsk, 2003. T. 8, - S. 25-35.

[8] *Bakirbaev B.* Chislennaya model' pogranichnogo sloya sredy, prednaznachennaya dlya lo- kal'nogo rassejaniya primesey // Mekhanika i modelirovanie protsessov tekhnologiy.- 1994 .- №2 .- S. 132-139.

[9] *Kuttykozhaeva Sh.N.* Ob odnom priblizhennom metode resheniya uravneniya Nav'e-Stoksa // Vestnik KazGU, ser. mekh. mat. i inf., 1998.- № 14.- S.163-172.

Поступила в редакцию 15 декабря 2012 года