

УДК 517.938

Е.К. УТЕБАЕВ

Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан; e-mail: zhas_double-k@mail.ru

Динамический синтез механизма шарнирного четырехзвенника

Рассматривается задача определения параметров машинного агрегата, состоящего из асинхронного двигателя и простого механизма шарнирного четырехзвенника, из условия минимума среднеквадратической величины суммы моментов движущих сил, сил сопротивления и сил инерции, приведенных к оси вращения кривошипа, для положений механизма. При динамическом синтезе довольно часто приходится учитывать различного рода основные и дополнительные критерии. Эти критерии, как правило, формирует заказчик модели проектируемого механизма. Знание всесторонних критериев качества позволит оптимально и с наименьшими затратами проектировать простые и сложные схемы механизмов. Для решения динамического синтеза кривошипно-ползунного механизма расчеты проводились в системе Maple.

Ключевые слова: Расчеты в системе Maple, Динамический синтез, Шарнирный четырехзвенник, механизм переменной структуры

Е.К. УТЕБАЕВ

Төрт буынды топсалы тетіктің динамикалық синтезі

Есепте асинхрондық қозғалтқыштан және қарапайым төрт буынды топсалы тетіктен тұратын машинаның агрегатының қозғаушы күш моменттерінің сомаларының орташа квадраттық шамасының минимум шартынан, кедергі күші және инерция күштерінің механизмнің n -жағдайы үшін кривошиптың айналу өсіне келтірілгендегі параметрлерін анықтау. Динамикалық синтезде есепке жиі әр түрлі негізгі және қосымша белгілерді алады. Бұл жобаланатын белгілер тетіктің үлгісінің тапсырма берушісі қалыптастырады. Жан-жақты сапа белгілерін білген, ең кіші шығындармен бос тұруларды және күрделі тетіктердің схемаларын жобалауға ең жақсы мүмкіндік береді. Кривошип-жорғалағыш тетіктің динамикалық синтезінің есептеулері Maple жүйесінде жүргізілді.

Y. K. UTEBAYEV

Cauchy problem for one class of third order ordinary differential equations

The problem of determining the parameters of the machine aggregate consisting of an induction motor and a simple mechanism of hinge four-link chain is considered by minimizing the mean-square value of the sum of the moments of the driving forces, the resistance forces and inertia forces leading to the axis of rotation of the crank for N provisions of the mechanism. During the dynamic synthesis it is often needed to consider the different types of major and minor

criteria. These criteria are generally formed by customer of the model of designed mechanism. Knowledge of comprehensive quality criteria will allow to design simple and complex circuits mechanisms optimally and with lowest cost. Calculations were made in the system Maple to solve the dynamic synthesis of slider-crank mechanism.

Схема рассматриваемого машинного агрегата изображена на рисунке:

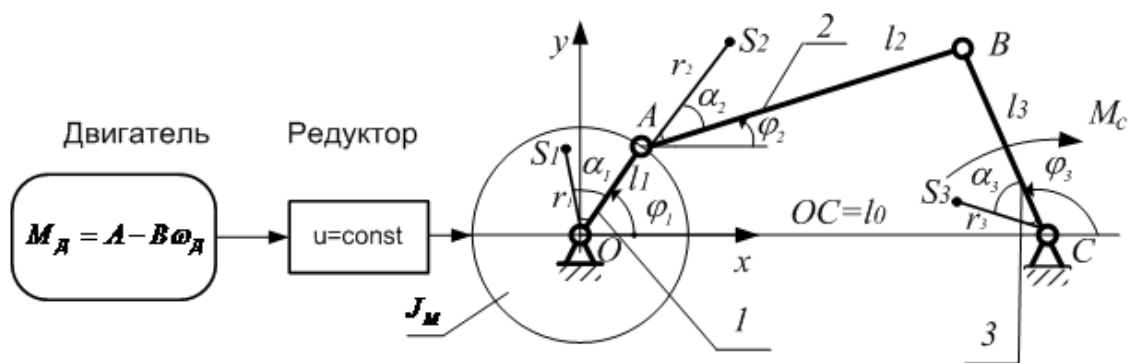


Рис. 1: Схема машинного агрегата

Из решения задачи кинематического анализа механизма, имеем

$$\begin{cases} tg \frac{\varphi_2}{2} = \frac{L_y \pm \sqrt{L_x^2 + L_y^2 - D^2}}{D + L_x}, \\ tg \varphi_3 = \frac{L_y + l_2 \sin \varphi_2}{L_x + l_2 \cos \varphi_2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2), \\ y_{S_2} = l_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2) \\ x_{S_3} = l_0 + r_3 \cos(\varphi_3 + \alpha_3), \\ y_{S_3} = r_3 \sin(\varphi_3 + \alpha_3) \end{cases} \quad (1)$$

Знак \pm соответствует сборкам механизма. В формулах (1) введены обозначения

$$L_x = l_1 \cos \varphi_1 - l_0, \quad L_y = l_1 \sin \varphi_1, \quad D = (l_3^2 - L_x^2 - L_y^2 - l_2^2)/(2l_2) \quad (2)$$

После дифференцирования (1) по обобщенной координате φ_1 получим аналоги скоростей

$$\begin{cases} \varphi_2' = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}, \\ \varphi_3' = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_{S_2} = -l_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2) \cdot \varphi_2', \\ y'_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2) \cdot \varphi_2' \\ x'_{S_3} = -r_3 \sin(\varphi_3 + \alpha_3) \cdot \varphi_3', \\ y'_{S_3} = r_3 \cos(\varphi_3 + \alpha_3) \cdot \varphi_3' \end{cases} \quad (3)$$

Входными параметрами синтеза машинного агрегата являются: сила технологического сопротивления M_C , закон движения $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ кривошипа 1, соответствующий рабочему ходу ползуна, геометрические размеры звеньев l_1, l_2, l_3 и l_0 , передаточное отношение $u = \omega/\omega_1$ передачи.

Выходными параметрами синтеза являются: m_1, m_2, m_3 – массы соответствующих звеньев; $a_i = r_i \cos \alpha_i, b_i = r_i \sin \alpha_i, i = 1, 2, 3$ – координаты центров масс соответствующих звеньев; J – момент инерции ротора электродвигателя; J_M – момент инерции маховика, если таковой устанавливается на оси кривошипа; J_1, J_2, J_3 – моменты инерций звеньев относительно осей их вращений (для шатуна относительно центра масс).

Параметры машинного агрегата определяются из условия минимума среднеквадратической величины суммы моментов движущих сил, сил сопротивления и сил инерции, отнесенных к оси кривошипа, для n положений механизма.

Этот критерий имеет следующий вид

$$\mathfrak{K} = \sum_{i=1}^n \left[J_n \ddot{\varphi}_{1i} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_n}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_{1i}^2 - Q_i \right]^2. \quad (4)$$

В выражении (4) приведенный момент инерции машинного агрегата имеет вид

$$J_n = Ju^2 + J_M + J_1 + J_3 \varphi_3'^2 + m_2(x_{S_2}'^2 + y_{S_2}'^2) + J_2 \varphi_2'^2, \quad (5)$$

Производная от приведенного момента инерции по обобщенной координате φ_1 равна:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_n}{\partial \varphi_1} = J_3 \varphi_3' \varphi_3'' + m_2(x_{S_2}' x_{S_2}'' + y_{S_2}' y_{S_2}'') + J_2 \varphi_2' \varphi_2'', \quad (6)$$

Обобщенная сила определяется следующим образом

$$Q = Mu - M_C \varphi_3' - m_1 g(a_1 \cos \varphi_1 - b_1 \sin \varphi_1) - m_2 g y_{S_2}' - m_3 g y_{S_3}', \quad (7)$$

Величину M_D выразим через параметры A и B статической характеристики асинхронного электродвигателя. Тогда

$$Q = (A - Bu \dot{\varphi}_1)u - M_C \varphi_3' - g(m_1 a_1 + m_2 l_1) \cos \varphi_1 + g m_1 b_1 \sin \varphi_1 - g m_2 a_2 \cos \varphi_2 \cdot \varphi_2' + g m_2 b_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' - g m_3 a_3 \cos \varphi_3 \cdot \varphi_3' + g m_3 b_3 \sin \varphi_3 \cdot \varphi_3' \quad (8)$$

Подставим выражения аналогов скоростей в формулу (5), тогда для приведенного момента инерции можно записать

$$J_n = J_0 + J_B \varphi_2'^2 + 2m_2 l_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2' - 2m_2 l_1 b_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2' + J_3 \varphi_3'^2 \quad (9)$$

В формуле (9) введены обозначения

$$J_0 = Ju^2 + J_M + J_1 + m_2 l_1^2, \quad J_B = J_2 + m_2(a_2^2 + b_2^2).$$

Частная производная от приведенного момента инерции примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_n}{\partial \varphi_1} = J_B \varphi_2' \varphi_2'' + m_2 l_1 a_2 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2'' - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_2' - 1) \varphi_2'] - m_2 l_1 b_2 [\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2'' + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_2' - 1) \varphi_2'] + J_3 \varphi_3' \varphi_3'' \quad (10)$$

Если ввести обозначения $F_a(\varphi_1) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2'$ и $F_b(\varphi_1) = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \varphi_2'$, то выражения (9) и (10) могут быть записаны

$$J_n = J_0 + J_B \varphi_2'^2 + 2m_2 l_1 a_2 F_a(\varphi_1) - 2m_2 l_1 b_2 F_b(\varphi_1) + J_3 \varphi_3'^2 \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_n}{\partial \varphi_1} = J_B \varphi_2' \varphi_2'' + m_2 l_1 a_2 F_a'(\varphi_1) - m_2 l_1 b_2 F_b'(\varphi_1) + J_3 \varphi_3' \varphi_3'' \quad (12)$$

Выражение, заключенное в квадратных скобках условия (5), называется функцией отклонения Δ . Она с учетом соотношений (8)-(12) получает вид

$$\Delta = J_0\ddot{\varphi}_1 + J_B(\varphi_2'^2\ddot{\varphi}_1 + \varphi_2'\varphi_2''\dot{\varphi}_1^2) + m_2a_2[2l_1F_a(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + l_1F'_a(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + g\cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'] - m_2b_2[2l_1F_b(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + l_1F'_b(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + g\sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'] + J_3(\varphi_3'^2\ddot{\varphi}_1 + \varphi_3'\varphi_3''\dot{\varphi}_1^2) + g(m_1a_1 + m_2l_1)\cos\varphi_1 - gm_1b_1\sin\varphi_1 + gm_3a_3\cos\varphi_3 \cdot \varphi_3' - gm_3b_3\sin\varphi_3 \cdot \varphi_3' - Au + Bu^2\dot{\varphi}_1 + M_C\varphi_3' \quad (13)$$

Функция отклонения Δ представляется в виде обобщенного полинома [2]

$$\Delta_i = [P_1f_1(\varphi_{1i}) + P_2f_2(\varphi_{1i}) + \dots + P_{11}f_{11}(\varphi_{1i}) - F(\varphi_{1i})]^2 \quad (14)$$

Тогда критерий оптимальности (??) машинного агрегата принимает вид

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^n [P_1f_1(\varphi_{1i}) + P_2f_2(\varphi_{1i}) + \dots + P_{11}f_{11}(\varphi_{1i}) - F(\varphi_{1i})]^2 \quad (15)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} P_1 = J_0, P_2 = m_1b_1, P_3 = J_B, P_4 = m_2a_2, P_5 = m_2b_2, P_6 = Au, \\ P_7 = Bu^2, P_8 = m_1a_1 + m_2l_1, P_{11} = J_3, P_9 = m_3a_3, P_{10} = m_3b_3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$F(\varphi_1) = -M_C\varphi_3' \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1) = \ddot{\varphi}_1, f_3(\varphi_1) = \varphi_2'^2\ddot{\varphi}_1 + \varphi_2'\varphi_2''\dot{\varphi}_1^2, f_6(\varphi_1) = -1, f_7(\varphi_1) = \dot{\varphi}_1, f_8(\varphi_1) = g\cos\varphi_1, \\ f_{11}(\varphi_1) = \varphi_3'^2\ddot{\varphi}_1 + \varphi_3'\varphi_3''\dot{\varphi}_1^2, f_2(\varphi_1) = -g\sin\varphi_1, f_9(\varphi_1) = g\cos\varphi_3 \cdot \varphi_3', \\ f_{10}(\varphi_1) = -g\sin\varphi_3 \cdot \varphi_3', f_4(\varphi_1) = 2l_1F_a(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + l_1F'_a(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + g\cos\varphi_2 \cdot \varphi_2', \\ f_5(\varphi_1) = -2l_1F_b(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - l_1F'_b(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 - g\sin\varphi_2 \cdot \varphi_2' \end{aligned} \quad (18)$$

Условия минимума функции (15) дают систему уравнений, из которой определяются коэффициенты P_1, P_2, \dots, P_{11}

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial P_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 11 \quad (19)$$

Эта система уравнений в развернутой форме имеет вид:

$$\begin{cases} C_{11}P_1 + C_{12}P_2 + \dots + C_{1,11}P_{11} = \sigma_1 \\ C_{21}P_1 + C_{22}P_2 + \dots + C_{2,11}P_{11} = \sigma_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{11,1}P_1 + C_{11,2}P_2 + \dots + C_{11,11}P_{11} = \sigma_{11} \end{cases}, \quad (20)$$

Где

$$C_{jk} = C_{kj} = \sum_{i=1}^n f_j(\varphi_{1i})f_k(\varphi_{1i}), \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^n F(\varphi_{1i})f_k(\varphi_{1i}), \quad j, k = 1, 2, \dots, 11 \quad (21)$$

После нахождения коэффициентов P_1, P_2, \dots, P_{11} определяются физические параметры из соотношений (16).

Обычно момент инерции выходного звена J_3 задается исходя из технологических требований. В этом случае порядок системы линейных уравнений уменьшается на 1, т.е. $k = 1, 2, \dots, 10$ и окончательная система примет вид

$$\sum_{j=1}^{10} C_{kj} P_j = \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, 10,$$

Где

$$C_{jk} = C_{kj} = \sum_{i=1}^n f_j(\varphi_{1i}) f_k(\varphi_{1i}), \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^n F(\varphi_{1i}) f_k(\varphi_{1i}), \quad j, k = 1, 2, \dots, 10$$

В нашем случае изменится только выражение для функции $F(\varphi_1)$

$$F(\varphi_1) = -M_C \varphi_3' - J_3 (\varphi_3'^2 \ddot{\varphi}_1 + \varphi_3' \varphi_3'' \dot{\varphi}_1^2) \quad (22)$$

Формирование коэффициентов C_{jk} , σ_k и решение системы уравнений осуществлялось в интегрированной среде Maple.

Был выполнен синтез машинного агрегата по следующим исходным данным:

$J_3 = 0.2 \text{ кгм}^2$, $l_1 = 0.04 \text{ м}$, $l_2 = 0.12 \text{ м}$, $l_3 = 0.1 \text{ м}$, $l_0 = 0.16 \text{ м}$, $M_C = 2 \text{ Нм}$, $u = 5$, $\omega_c = 20 \text{ с}^{-1}$.

Коэффициенты полинома (??) для $\nu_1 = 7\pi/9$ равны:

$$P_1 = 54.755, P_2 = 119.49, P_3 = 0.383, P_4 = 16.91, P_5 = -78.713, P_6 = -574.25, \\ P_7 = 19.055, P_8 = 124.86, P_9 = -20.422, P_{10} = 2.36$$

Физические параметры машинного агрегата:

$$J_0 = 2.1022 \text{ кгм}^2, S_{1x} = 1.2619 \text{ кгм}, J_B = 0.02478 \text{ кгм}^2, S_{2y} = 0.1263 \text{ кгм},$$

$$S_{2x} = 0.2023 \text{ кгм}, A = 304.56 \text{ Нм}, B = 2.015 \text{ Нмс}, S_{1y} + m_2 l_1 = -8.1963 \text{ кгм}.$$

Угловая скорость холостого хода электродвигателя $\omega_o = 151,15 \text{ 1/с}$, число оборотов электродвигателя в минуту $n_o = 1443 \text{ об/мин}$. Принимаем $n_o = 1500 \text{ об/мин}$, $\omega_o = \frac{1500 \cdot \pi}{30} = 157 \text{ 1/с}$. Номинальная угловая скорость вала электродвигателя $n_n = 1390 \text{ об/мин}$, $\omega_n = 145,5 \text{ 1/с}$. Номинальный момент электродвигателя $M_n = A - B \cdot \omega_n = 11,38 \text{ Н·м}$. Номинальная мощность электродвигателя $P_n = M_n \cdot \omega_n \cdot 10^{-3} = 1,655 \text{ кВт}$.

Список литературы

- [1] *Burmester L.* Lehrbuch der Kinematic, Leipzig, 1888.
- [2] *Schoenflies A.* Geometrie der Bewegung in Synthetischer Darstellung. Leipzig, 1886. – 194.
- [3] *Добровольский В.В.* О точках Бурместера в сферическом движении. ПММ, 1945, т. IX, №6. – С. 480-491.
- [4] *Добровольский В.В.* Синтез сферических механизмов. В кн.: Труды семинара по ТММ. М.: Изд-во АН СССР. – Т. 1, вып. 1. – С. 5-20.

Поступила в редакцию 12 ноября 2012 года