# Мощность множества счетных моделей универсальных предложений с двумя кванторами

А.М. Кунгожин
*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
*e-mail: kalmas@mail.ru*

**Аннотация**

Дана классификация универсальных предложений не более чем с двумя кванторами, по которой определяется мощность соответствующего множества счетных моделей.

## 1 Введение

Универсальные предложения являются самым хорошо изученным нетривиальным классом предложений. Тем не менее, открытыми остаются проблемы описания счетных моделей любого такого предложения даже для чисто предикатной конечной сигнатуры. По прежнему недоказанным остается аналог гипотезы Воота о том, что если такое предложение имеет несчетное число счетных моделей, то их – континуум.

По Мальцеву [2] выполнение в модели данного универсального предложения с $k$ кванторами эквивалентно невложимости в эту модель некоторых не более чем $k$-элементных структур. Это означает, что любая такая модель может быть построена из структур, не входящих в этот список. Если сигнатура этого предложения содержит хотя бы один предикат местности $l$ ($l > k$), то в любой не менее чем $l$-элементной структуре все $k$-элементные подструктуры которой удовлетворяют этому предложению на различных $l$-элементных кортежах, содержащих более $k$ различных координат, этот предикат может быть определен произвольным образом. Легко видеть, что в этом случае если это предложение имеет хотя бы одну счетную модель, то их число континуально. Поэтому в дальнейшем считаем, что сигнатура состоит из конечного числа предикатов местности не более чем 2.

Любое универсальное предложение в конечной сигнатуре можно свести к такому виду, в котором кванторы всеобщности будут находиться в начале, а оставшаяся часть будет представима в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (дизъюнкции диаграмм). В случае если рассматриваемое предложение содержит два квантора, то каждая диаграмма полностью описывает все возможные наборы свойств отдельных элементов и все возможные связи пар элементов. Таким образом, все модели универсального предложения можно считать полными графами, вершины которого раскрашены в один из цветов: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и попарно соединенными направленными или ненаправленными ребрами одного из цветов: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ .

## 2 Классификация

Заметим, что в произвольной конечной сигнатуре всего неизоморфных счетных моделей – континуум.

Следующая теорема выделяет большой класс предложений, которые имеют в точности континуум попарно неизоморфных счетных моделей.

**Теорема 1** *Если в некоторой модели универсального предложения с двумя кванторами содержится направленное ребро с концами одного цвета, то это предложение имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.*

**Доказательство**: Каждое такое предложение истинно для любого полного порядка, состоящего из счетного числа элементов одного цвета. Любой бесконечной последовательности нулей и единиц поставим в соответствие последовательность плотных и дискретных подпорядков. Так как для любых двух различных последовательностей нулей и единиц соответствующие им порядки будут неизоморфными, а таких последовательностей можно построить континуум, то искомое предложение имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.

Введем следующую классификацию универсальных предложений с двумя кванторами в виде дерева. Тогда на концах этого дерева (отмеченых *) будем определять количество счетных попарно неизоморфных моделей, в которых данное предложение истинно:

1.* В модели предложения отсутствуют ребра, концы которого имеют один цвет. Поскольку количество вершин счетного графа бесконечно, а количество различных цветов вершин конечно, то найдутся не менее двух вершин одного цвета. Следовательно, среди ребер графа найдется ребро, концы которого должны быть одного цвета.

2. В модели предложения присутствует хотя бы одно ребро, концы которого имеют один цвет.

2.1.* В модели предложения присутствует хотя бы одно направленное ребро, концы которого одного цвета. Тогда это предложение имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей. (Теорема 1).

2.2. В модели предложения отсутствуют направленные ребра, концы которых одного цвета.

2.2.1. В модели предложения присутствует одно ненаправленное ребро $(\alpha_1, \beta_{11}, \alpha_1)$.

2.2.1.1.* Другие ребра отсутствуют. Тогда такая модель единственна (Все вершины одного цвета $\alpha_1$ и все они соединены ребрами цвета $\beta_{11}$ ).

2.2.1.2.* Присутствует конечное число направленных ребер $(\alpha_1, \beta_{1i}, \alpha_i)$, где $2 \le i \le m$, и возможно присутствуют ребра вида $(\alpha_i, \beta_{ij}^k, \alpha_j)$, где $2 \le i < j \le m, k \le k_{ij}$. Модели этого предложения отличаются от предыдущего случая тем, что к ним добавляется конечное число вершин (все они разного цвета и по цвету отличаются от первого), которые между собой связаны направленными ребрами из конечного набора, а с вершинами первого цвета связаны единственно возможным способом). Таких неизоморфных моделей конечное число для каждого предложения ($\le \prod_{2\le i<j\le m}(k_{ij}+1)$).

2.2.1.3.* Присутствует конечное число направленных ребер $(\alpha_1, \beta_{1i}^k, \alpha_i)$, где $2 \le i \le n$, $1 \le k \le k_{1i}$, причем среди них есть ребро, где $k \ge 2$, и возможно присутствуют ребра вида $(\alpha_i, \beta_{ij}^k, \alpha_j)$, где $2 \le i < j \le n$, $k \le k_{ij}$. Каждый из наборов ребер $\beta_{1i}^1, \beta_{1i}^2, \ldots, \beta_{1i}^{k_{1i}}$, разбивает множество вершин цвета $\alpha_1$ на $k_{1i}$ конечных и счетных подмножеств. Различных неизоморфных разбиений будет счетное количество. Конечное декартовое произведение счетных подмножеств образует счетное множество. Следовательно, неизоморфных моделей данного предложения – счетное число.

2.2.2. В модели предложения присутствует более одного ненаправленных ребер.

2.2.2.1.* Среди этих ребер имеются ребра вида: $(\alpha_1, \beta_{11}^k, \alpha_1)$, где $n \ge 2$, $1 \le k \le n$. Даже если вершины цвета $\alpha_1$ соединены ненаправленными ребрами всего двух цветов, то таких неизоморфных моделей можно построить континуум: Любой последовательности из нулей и единиц поставим в соответствие набор полных подграфов, соединенных ребрами первого цвета, все остальные ребра второго цвета. Причем, если на $n$-том месте последовательности стоит 1, то в графе присутствует один полный подграф из $n$ вершин, в противном случае такой подграф отсутствует. Ясно, что таких последовательностей, в которых количество единиц бесконечно много – континуум, тогда соответствующих им неизоморфных счетных моделей также континуум.

2.2.2.2. Все ненаправленные ребра имеют вид: $(\alpha_i, \beta_{ii}, \alpha_i)$, где $1 \le i \le n$.

2.2.2.2.1.* Отсутствуют направленные ребра. Модели данного предложения могут состоять только из счетного вершин одного цвета $\alpha_i$, соединенные только ребрами цвета $\beta_{ii}$. Таких неизоморфных моделей конечное число.

2.2.2.2.2.* Все направленные ребра имеют вид $(\alpha_i, \beta_{ij}, \alpha_j)$, где $1 \leq i < j \leq n$. Модели данного предложения могут состоять из конечного числа счетных и конечных наборов вершин одного цвета, цвета ребер между которыми однозначно определяются концевыми вершинами. Таких неизоморфных моделей счетное число.

2.2.2.2.3.* Все направленные ребра имеют вид $(\alpha_i, \beta_{ij}^k, \alpha_j)$, где $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq k_{ij}$, причем среди них есть направленное ребро, где $k \geq 2$. В этом случае можно построить континуум неизоморфных моделей из счетного набора вершин цвета $\alpha_i$ и $\alpha_j$, а также направленных ребер двух цветов $\beta_{ij}^1$ и $\beta_{ij}^2$. Любой последовательности из нулей и единиц поставим в соответствие распределение ребер цветов $\beta_{ij}^1$ и $\beta_{ij}^2$: если на $n$-том месте последовательности стоит 1, то в модели найдется одна вершина $\alpha_i$, которая соединена с точностью $n$ вершинами цвета $\alpha_j$ ребром цвета $\beta_{ij}^1$, а с другими вершинами цвета $\alpha_j$ ребром цвета $\beta_{ij}^2$, в противном случае такая вершина отсутствует. Причем каждая вершина цвета $\alpha_j$ соединена ребром цвета $\beta_{ij}^1$ только с одой из вершин цвета $\alpha_i$. Ясно, что таких последовательностей, в которых количество единиц бесконечно число – континуум, тогда соответствующих им неизоморфных счетных моделей также континуум.

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

**Теорема 2** *Любое универсальное предложение с двумя кванторами, сигнатура которого состоит только из предикатных символов местности не более чем 2, может иметь либо конечное, либо счетное, либо континуальное число попарно неизоморфных счетных моделей.*

## Список литературы

[1] *Hodges W.,* Model theory, Camdridge Univ. Press, 1993.

[2] *Мальцев А.И.,* Универсально–аксиоматизируемые подклассы локально–конечных классов моделей, Сиб. мат. ж., 1967., Т.8, №5., с. 1005-1014.

[3] *Marker D.,* Model Theory: An Introduction. – Berlin: Springer – Verlag, 2002.