Субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$

А.Д. Мажитова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz

Аннотация

В этой работе мы рассмотрим субриманову задачу на второй трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ согласно классификационной теореме Аграчева-Барилари [1]. Случай геометрии $SOLV^-$ мы рассмотрели в предыдущих работах [7],[8]. Различные аспекты интегрирования геодезических потоков на субримановых многообразиях активно изучались (см., например, [2],[9],[10]). Отметим, что геодезические ряда других трехмерных неразрешимых субримановых геометрий были описаны недавно в [4],[5], при этом геодезические задаются элементарным функциями.

Рассмотрим трехмерную группу Ли $SOLV^+$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; \quad [e_1, e_3] = e_1; \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Перейдем к новому базису так, чтобы через коммутаторы базисных векторов можно было получить все касательное пространство:

$$a_1 = e_1 + e_2; \quad a_2 = e_1 - e_2; \quad a_3 = e_3,$$

то есть

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

тогда для нового базиса коммутаторы следующие

$$[a_1, a_2] = 0; \quad [a_1, a_3] = -a_2; \quad [a_2, a_3] = a_1.$$

Рассмотрим левоинвариантную метрику на $SOLV^+$, которая в единице группы задается формой

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Группу $SOLV^+$ можно идентифицировать с пространством R^3 с помощью диффеоморфизма, который матрице (1) ставит в соответствие точку $q = (x, y, z)$ в R^3 . Итак, $q = (x, y, z)$ точка на группе $SOLV^+$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^+$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а векторы e_1, e_2, e_3 с помощью левых сдвигов переходят в следующие вектора

$$L_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos z \\ 0 & 0 & -\sin z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; L_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin z \\ 0 & 0 & \cos z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; L_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$L_q^*(e_1) = \cos z \cdot \partial_x - \sin z \cdot \partial_y, \quad L_q^*(e_2) = \sin z \cdot \partial_x + \cos z \cdot \partial_y, \quad L_q^*(e_3) = \partial_z. \tag{5}$$

Так как выбранная метрика левоинвариантна, то есть $< L_q^*(e_i), L_q^*(e_j) >= \delta_{ij}$, то мы имеем

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для нового базиса a_1, a_2, a_3 левые сдвиги следующие

$$\begin{array}{l} L_q^*(a_1) = (\cos z + \sin z) \cdot \partial_x + (\cos z - \sin z) \cdot \partial_y, \\ L_q^*(a_2) = (\cos z - \sin z) \cdot \partial_x - (\cos z + \sin z) \cdot \partial_y, \\ L_q^*(a_3) = \partial_z. \end{array} \tag{6}$$

Произведениям $< L_q^*(a_i), L_q^*(a_j) >$ соответствуют элементы матрицы Грамма для векторов a_1, a_2, a_3

$$< a_i, a_j >= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Пусть G - наша разрешимая трехмерная группа, а $\mathcal{G}$ ее алгебра Ли с базисными векторами a_1, a_2, a_3 согласно (3). Разобьем алгебру Ли $\mathcal{G}$ на сумму подпространств $p \bigoplus k$, где $p = \text{span}\{a_1, a_3\}$, $k = \text{span}\{a_2\}$. Теперь возьмем двумерное левоинвариантное распределение $\Delta = \text{span}\{a_1, a_3\}$ в касательном пространстве TG и левоинвариантную Риманову метрику, которая задана матрицей (8), тогда эта пара задает левоинвариантную метрику Карно-Каратеодори и можно записать следующее равенство

$$\widetilde{g}_{ij} = \widetilde{g}_p + t \cdot \widetilde{g}_k,$$

где $t \to \infty$. Таким образом, получим следующие компоненты метрики

$$\widetilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(1+t)+(1-t)\sin 2z}{2} & \frac{1-t}{2}\cos 2z & 0 \\ \frac{1-t}{2}\cos 2z & \frac{(1+t)-(1-t)\sin 2z}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратные элементы к ней будут

$$\widetilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(1+t)-(1-t)\sin 2z}{2t} & -\frac{1-t}{2t}\cos 2z & 0 \\ -\frac{1-t}{2t}\cos 2z & \frac{(1+t)+(1-t)\sin 2z}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем функцию Гамильтона $H = \dfrac{1}{2}\widetilde{g}^{ij}p_i p_j$ и получим для нашего случая при $t \to \infty$ следующий вид гамильтониана для нашей задачи

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2z)p_x^2 + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x p_y + \frac{1}{4}(1 - \sin 2z)p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2. \qquad (8)$$

Из известных равенств, выполняющихся для функции Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

где точка означает производную по t, выпишем уравнения Гамильтона для (8)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{1}{2}(1 + \sin 2z)p_x + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y \\ &\dot{y} = \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x + \frac{1}{2}(1 - \sin 2z)p_y \\ &\dot{z} = p_z \\ &\dot{p_x} = 0 \\ &\dot{p_y} = 0 \\ &\dot{p_z} = -\frac{1}{2}(\cos 2z)p_x^2 + (\sin 2z)p_x p_y + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Система (9) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y,$$

значит наша система дифференциальных уравнений (9) полностью интегрируема. Нахождением решений этой системы мы займемся в следующей работе.

Список литературы

[1] *A.Agrachev, and D. Barilari*, Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups, arXiv:1007, 4970.

[2] *А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков*, Геометрическая теория управления, - М.: Физматлит, 2005. - 392 с.

[3] *Е.П. Аксенов*, Специальные функции в небесной механике, - М: Наука, 1986. - 321 с.

[4] *U.Boscain, F.Rossi*, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces, - Preprint SISSA, 2007. - 24 p.

[5] *O.Calin, D.-Ch.Chang, I.Markina*, SubRiemannian geometry on the sphere S^3. //arxiv.org>math>arXiv:0804.1695, - 2008. - 13 p.

[6] *И.С. Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[7] *А.Д. Мажитова*, Суб-Риманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли, - Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика, № 2(65), 2010 г., Стр. 11-18.

[8] *А.Д. Мажитова*, Геодезический поток субримановой метрики на трехмерной разрешимой группе Ли SOLV. - Сборник материалов Международной научно-практической конференции "Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования 20 октября 2010 года, Тараз. - Стр.279-283.

[9] *Ю.Л. Сачков*, Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах.М: Физматлит, 2007.

[10] *I.A.Taimanov*, Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics. // J.Dynam. Control Sistem 3(1997), - 129-147 p.