К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных

С.А. Айсагалиев, А.П. Белогуров , И.В. Севрюгин
Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби
г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: aisagaliev@kazsu.kz

Аннотация

Предлагаются методы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода для искомой функции от нескольких переменных.

Постановка задачи. Рассматривается интегральное уравнение следующего вида

$$\Lambda u = \int_a^b \int_c^d \Lambda(t,\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau = f(t),\ t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $\Lambda(t,\xi,\tau) = \|\lambda_{ij}(t,\xi,\tau)\|,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ - известная матрица порядка $n \times m$, элементы матрицы $\Lambda(t,\xi,\tau)$, функции $\lambda_{ij}(t,\xi,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на множестве

$$\Omega = \{(t,\xi,\tau)\ \in\ R^3\ /\ t_0 \le t \le t_1,\ a \le \tau \le b,\ c \le \xi \le d\},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \int_c^d |\lambda_{ij}(t,\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau dt < \infty,$$

функция $f(t) \in L_2(I, R^n),\ I = [t_0, t_1]$ - задана, $u(\xi,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ - искомая функция, $Q = \{(\xi,\tau)/\ c \le \xi \le d,\ a \le \tau \le b\}$, величины t_0, t_1, a, b, c, d - фиксированы, оператор $\Lambda : L_2(Q, R^m) \to L_2(I, R^n),\ \Lambda u = f$.

В статье предлагается метод решения интегрального уравнения (1) путём сведения его к интегральному уравнению вида

$$Ku = \int_a^b \int_c^d K(t,\tau) u(t,\tau) d\tau dt = \overline{a},\ \overline{a} \in R^n, \tag{2}$$

где $K(t,\tau) = \|K_{ij}(t,\tau)\|,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ - известная матрица порядка $n \times m$, элементы матрицы $K(t,\tau)$, функции $K_{ij}(t,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на квадрате

$$Q = \{\ (t,\tau)\ /\ a \le t \le b,\ c \le \tau \le d\},\ \int_a^b \int_c^d |K_{ij}(t,\tau)|^2 d\tau dt < \infty,$$

$a \in R^n$ - заданный вектор, $u(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ - искомая функция, величины a, b, c, d - заданы, оператор $K : L_2(Q, R^m) \to R^n$, $Ku = a$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 . *Найти необходимое и достаточное условие существования решения интегрального уравнения (2) для любого $a \in R^n$.*

Задача 2 . *Найти общее решение интегрального уравнения (2).*

Задача 3 . *Пусть элементы матрицы $\Lambda(t,\xi,\tau)$, $(t,\xi,\tau)\epsilon\Omega$ функции $\lambda_{ij}(t,\xi,\tau) \in L_2(\Omega, R^1)$ имеют следы $\lambda_{ij}(\cdot,\xi,\tau) \in L_2(I, R^1)$ непрерывные в метрике $L_2(I, R^1)$ т.е.*

$$\lim_{\substack{\xi\to\xi_* \\ \tau\to\tau_*}} \int_{t_0}^{t_1} |\lambda_{ij}(t,\xi,\tau) - \lambda_{ij}(t,\xi_*,\tau_*)|^2 dt = 0,$$

при всех $(\xi_*,\tau_*) \in Q$. Необходимо найти приближённое решение $\overline{u}(\xi,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ уравнения (1). Найти оценку $\|u_* - \overline{u}\|_{L_2}$, где $u_* = u_*(\xi,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ - решение уравнения (1).

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода от искомой функции нескольких переменных относится к числу малоисследованных проблем интегральных уравнений. Интегральное уравнение Фредгольма с искомой функцией от одной переменной с замкнутым симметричным ядром исследовано в работе Пикара [1,2]. Применение метода последовательных приближений для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода проведено в [3]. Как показано в работах [4-7] решение проблем управляемых динамических систем сводится к существованию и построению решения интегрального уравнения вида (1). Поэтому исследование свойств решения интегрального уравнения (1) является актуальным.

В статье приведены результаты исследования по решению задач 1-3.

Существование решения интегрального уравнения. Рассмотрим решение задачи 1 для интегрального уравнения вида (2). Ниже приведено условие разрешимости уравнения (1) для любого постоянного вектора $a \in R^n$.

Теорема 1 . *Для существования решения интегрального уравнения (2) для любого $\overline{a} \in R^n$ необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$T(a,b,c,d) = \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dt \tag{3}$$

порядка $n \times n$ была положительно определённой.

Док-во. Необходимость. Пусть интегральное уравнение (2) имеет решение. Покажем, что матрица $T(a,b,c,d) > 0$. Как следует из формулы (2) для любого вектора $y \in R^n$ квадратичная форма

$$y^*T(a,b,c,d)y = \int_a^b \int_c^d y^*K(t,\tau)K^*(t,\tau)y d\tau dt = \int_a^b \int_c^d < K^*(t,\tau)y, K^*(t,\tau)y > d\tau dt \geq 0.$$

Отсюда следует, что матрица $T(a,b,c,d) \geq 0$. Тогда для доказательства $T(a,b,c,d) > 0$ достаточно показать, что $T(a,b,c,d)$ - неособая.

Предположим противное, т.е. матрица $T(a,b,c,d)$ особая. Тогда найдётся вектор $\overline{c} \in R^n$ такой, что $\overline{c}^*T(a,b,c,d)\overline{c} = 0$, $\overline{c} \neq 0$. Пусть вектор функция $w(t,\tau) = K^*(t,\tau)\overline{c}$, $(t,\tau) \in Q$, $w(\cdot) \in L_2(Q, R^m)$. Тогда

$$\int_a^b \int_c^d w^*(t,\tau)w(t,\tau)d\tau dt = \overline{c}^* \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dt\overline{c} = \overline{c}^*T(a,b,c,d)\overline{c} = 0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что функция $w(t,\tau) \equiv 0$, $\forall(t,\tau) \in Q$.

Поскольку интегральное уравнение (2) имеет решение для любого вектора $\overline{a} \in R^n$, то, в частности, при $\overline{a} = \overline{c} \in R^n$ существует вектор функция $v(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ такая, что

$$\int_a^b \int_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt = \overline{c},\ c \neq 0. \tag{5}$$

Так как вектор $\overline{c} \neq 0$, то $v(t,\tau) \neq 0$. Из (4), (5) имеем

$$\int_a^b \int_c^d w^*(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt = \overline{c}^* \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt = \overline{c}^*\overline{c} = 0.$$

Это противоречит тому, что $\overline{c} \neq 0$. Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица $T(a,b,c,d)$ особая. Следовательно, матрица $T(a,b,c,d) > 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть матрица $T(a,b,c,d) > 0$. Покажем, что интегральное уравнение (1) имеет решение. Так как $T(a,b,c,d) > 0$, то существует обратная матрица $T^{-1}(a,b,c,d)$. Пусть вектор-функция

$$u(t,\tau) = K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a},\ (t,\tau) \in Q,\ u(t,\tau) \in L_2(Q, R^m).$$

Тогда

$$Ku = \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau dt = \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dt T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} =$$

$$= T(a,b,c,d)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} = \overline{a}.$$

Следовательно, в случае, когда матрица $T(a,b,c,d) > 0$, интегральное уравнение (1) имеет, по крайней мере, одно решение $u(t,\tau) = K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}$, $\forall \overline{a} \in R^n$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Общее решения интегрального уравнения. Рассмотрим решение задачи 2 для интегрального уравнения вида (2).

Теорема 2 . *Пусть матрица $T(a,b,c,d) > 0$. Тогда общее решение интегрального уравнения (1) определяется по формуле*

$$\begin{gathered} u(t,\tau) = v(t,\tau) + K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} - K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\times \\ \times \int_a^b \int_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt,\ (t,\tau) \in Q, \end{gathered} \tag{6}$$

где $v(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ - произвольная функция, $\overline{a} \in R^n$ - любой вектор.

Доказательство. Введём следующие множества

$$W = \{u(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)\ /\int_a^b \int_c^d K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau dt = a\}, \tag{7}$$

$$U=\{u(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)\ /\ u(t,\tau)=v(t,\tau)+K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}-$$
$$-K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau dt,\ \forall v,\ v(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)\},\tag{8}$$

где множество W содержит все решения интегрального уравнения (2). Теорема утверждает, что функция $u(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ принадлежит множеству W тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству U т.е $W=U$.

Докажем,что $W=U$. Для этого достаточно показать, что: а)$U\subseteq W$; б)$W\subseteq W$. Покажем, что $U\subseteq W$. В самом деле, если $u(t,\tau)\in U$, то как следует из соотношения (8), верно равенство

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau dt=\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)[v(t,\tau)+K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}-$$
$$-K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt]d\tau dt=\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)\times$$
$$\times v(t,\tau)d\tau dt+\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dtT^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}-$$
$$-\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dtT^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt=\overline{a}.$$

Отсюда следует, что $u(t)\in W$. Следовательно, множество $U\subseteq W$.

Покажем, что $W\subseteq U$. Пусть $u_*(t,\tau)\in W$ т.е. для функции $u_*(t,\tau)\in W$ выполнено равенство (см.(7))

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau dt=\overline{a}.$$

Заметим, что в соотношении (7) функция $v(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $v(t,\tau)=u_*(t,\tau),(t,\tau)\in Q$. Теперь функция $u(t,\tau)\in U$ запишется в виде

$$u(t,\tau)=u_*(t,\tau)+K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}-K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\times$$
$$\times\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau dt=u_*(t,\tau),\ (t,\tau)\in Q.$$

Следовательно, $u_*(t,\tau)=u(t,\tau)\in U$. Отсюда следует, что $W\subseteq U$. Из включения $U\subseteq W,W\subseteq U$ следует, что $W=U$. Теорема доказана.

Основные свойства решения. Общее решение интегрального уравнения (6) обладает следующими свойствами.

1. Функция $u(t,\tau)$, $(t,\tau)\in Q$ из (5) может быть представлена в виде $u(t,\tau)=u_1(t,\tau)+u_2(t,\tau)$, где

$$u_1(t,\tau)=K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}\in L_2(Q,R^m)$$

- частное решение интегрального уравнения (1), а функция

$$u_2(t,\tau) = v(t,\tau) - K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt \in L_2(Q,R^m)$$

-решение однородного интегрального уравнения

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau dt = 0.$$

В самом деле,

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u_1(t,\tau)d\tau dt = \int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dt T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} = \overline{a},$$

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau dt = \int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt - \int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau dt\times$$

$$\times T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt = 0$$

для любой функции $v(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$.

2. Функции $u_1(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$, $u_2(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ ортогональны $u_1 \perp u_2$ в $L_2(Q,R^m)$. Действительно

$$< u_1, u_2 >_{L_2} = \int\limits_a^b\int\limits_c^d u_1^*(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau dt = \overline{a}^*T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)\times$$

$$\times[v(t,\tau) - K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt]d\tau dt =$$

$$\overline{a}^*T^{-1}(a,b,c,d)[\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt - \int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt] = 0.$$

3. Функция $u_1(t,\tau) = K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} \in L_2(Q,R^m)$ является решением интегрального уравнения (1) с минимальной нормой в $L_2(Q,R^m)$. В самом деле, норма $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$. Отсюда следует, что $\|u\|^2 \geq \|u_1\|^2$. Если функция $v(t,\tau) \equiv 0$, то функция $u_2(t,\tau) \equiv 0$. Тогда $u(t,\tau) = u_1(t,\tau)$, $\|u\|^2 = \|u_1\|^2$.

4. Множество решений интегрального уравнения (2) является выпуклым. Как следует из доказательства теоремы 2, множеством всех решений уравнения (2) является U. Покажем, что $U-$ выпуклое множество.

Пусть $u(t,\tau) \in U$, $w(t,\tau) \in U$, $u_\alpha(t,\tau) = \alpha u(t,\tau) + (1-\alpha)w(t,\tau)$, $\alpha \in [0,1]$. Легко убедиться в том, что $u_\alpha(t,\tau) \in U$ при всех α, $\alpha \in [0,1]$. В самом деле,

$$u(t,\tau) = K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a} + v(t,\tau) - K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt,$$

$$w(t,\tau)=K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}+\eta(t,\tau)-K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)\eta(t,\tau)d\tau dt$$

$$v(t,\tau)\in L_2(Q,R^m),\ \eta(t,\tau)\in L_2(Q,R^m).$$

Тогда

$$u_\alpha(t,\tau)=\alpha u(t,\tau)+(1-\alpha)w(t,\tau)=K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}+v_\alpha(t,\tau)-$$

$$-K^*(t,\tau)T^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(t,\tau)v_\alpha(t,\tau)d\tau dt\in U,$$

где $v_\alpha(t,\tau)=\alpha v(t,\tau)+(1-\alpha)\eta(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)$.

Построение приближённого решения интегрального уравнения. Рассмотрим решение задачи 3 для интегрального уравнения вида (1). Пусть в L_2 дана полная система, в частности, $1,t,t^2,\ldots$, а соответствующая полная ортогональная система $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots$. Пусть выполнены условия теоремы Фубини т.е.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(\int\limits_a^b\int\limits_c^d\lambda_{ij}(t,\xi,\tau)u_j(\xi,\tau)d\xi d\tau)\varphi_k(t)dt=\int\limits_a^b\int\limits_c^d(\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_{ij}(t,\xi,\tau)\varphi_k(t)dt)u_j(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int\limits_a^b\int\limits_c^d l_{ijk}(\xi,\tau)u_j(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},\ k=1,2,\ldots\ ,$$

$\int\limits_{t_0}^{t_1}f_i(t)\varphi_k(t)dt=a_{ik}$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, где $f_i(t)\in L_2(I,R^1)$, $i=\overline{1,n}$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(\int\limits_a^b\int\limits_c^d\Lambda(t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau)\varphi_k(t)dt=$$

$$\left(\begin{array}{l}\int\limits_a^b\int\limits_c^d(\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_{11}(t,\xi,\tau)\varphi_k(t)dt)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \int\limits_a^b\int\limits_c^d(\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_{n1}(t,\xi,\tau)\varphi_k(t)dt)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}+\int\limits_a^b\int\limits_c^d(\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_{1m}(t,\xi,\tau)\varphi_k(t)dt)u_m(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\int\limits_a^b\int\limits_c^d(\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_{nm}(t,\xi,\tau)\varphi_k(t)dt)u_m(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\int\limits_a^b\int\limits_c^d l_{11k}(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\int\limits_a^b\int\limits_c^d l_{1mk}(\xi,\tau)u_m(\xi,\tau)d\xi d\tau\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \int\limits_a^b\int\limits_c^d l_{n1k}(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\cdots+\int\limits_a^b\int\limits_c^d l_{nmk}(\xi,\tau)u_m(\xi,\tau)d\xi d\tau\end{pmatrix}=\int\limits_a^b\int\limits_c^d K_k(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$k=1,2,\dots,\ \ a_k=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\varphi_k(t)dt=\begin{pmatrix}\int\limits_{t_0}^{t_1} f_1(t)\varphi_k(t)dt\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f_n(t)\varphi_k(t)dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1k}\\ \vdots\\ a_{nk}\end{pmatrix},\ k=1,2,\dots.$$

Теперь для каждого индекса k имеем $\int\limits_a^b\int\limits_c^d K_k(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau=a_k$, $k=1,2,\dots$, где $K_k(\xi,\tau)$ матрица порядка $n\times m,\ a_k\in R^n$. Усечённое уравнение для значений $k=1,2,\dots,N$ имеет вид

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(\xi,\tau)\overline{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau=\overline{a}, \tag{9}$$

где $K(\xi,\tau)=\begin{pmatrix}K_1(\xi,\tau)\\ \dots\\ K_N(\xi,\tau)\end{pmatrix}$, $\overline{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}$, $\overline{u}(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ – решение интегрального уравнения (9).

Теорема 3 . *Пусть матрица*

$$T_1(a,b,c,d)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(\xi,\tau)K^*(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{10}$$

порядка $N_n\times N_n$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (9) имеет вид

$$\begin{gathered}\overline{u}(\xi,\tau)=K^*(\xi,\tau)T_1^{-1}(a,b,c,d)\overline{a}+w_1(\xi,\tau)-\\ -K^*(\xi,\tau)T_1^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(\xi,\tau)w_1(\xi,\tau)d\xi d\tau,\end{gathered} \tag{11}$$

где $w_1(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ - произвольная функция.

Доказательство теоремы следует из теоремы 1,2.
Вычислим функцию $f_1(t,w_1)$ по формуле

$$f_1(t,w_1)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d \Lambda(t,\xi,\tau)\overline{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ t\in I=[t_0,t_1],$$

где $\overline{u}(\xi,\tau)$ определяется по формуле (11). Тогда разность $u_*(\xi,\tau)-\overline{u}(\xi,\tau)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d \Lambda(t,\xi,\tau)[u_*(\xi,\tau)-\overline{u}(\xi,\tau)]d\xi d\tau=f(t)-f_1(t,w_1),\ t\in I, \tag{12}$$

где $u_*(\xi,\tau)$ - решение интегрального уравнения (1). Обозначим через $\Delta u(\xi,\tau)=u_*(\xi,\tau)-\overline{u}(\xi,\tau),\ \Delta f_1(t)=f(t)-f_1(t,w_1),\ t\in I$. Теперь уравнение (12) относительно искомой функции

$\Delta u(\xi,\tau)$ запишется в виде

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d \Lambda(t,\xi,\tau)\Delta u(\xi,\tau)d\xi d\tau = \Delta f_1(t),\ t\in I, \tag{13}$$

где $\Delta f_1(t)\in L_2(I,R^n)$ - известная функция. Как в предыдущем случае, уравнение (13) может быть приведено к усечённому уравнению

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d K(\xi,\tau)\Delta\overline{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau = \Delta\overline{a},$$

где $\Delta\overline{a} = (\Delta a_1,\ldots,\Delta a_n),\ \Delta a_k = (\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta f_{11}(t)\varphi_k(t)dt,\ldots,\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta f_{1n}(t)\varphi_k(t)dt),$
$\Delta f_1(t) = (\Delta f_{11}(t),\ldots,\Delta f_{1n}(t)).$

Теорема 4 . *Пусть матрица $T_1(a,b,c,d)$ определяемая по формуле (10) положительно определенная. Тогда справедлива оценка*

$$||\Delta\overline{u}(\xi,\tau)||^2 = \int\limits_a^b\int\limits_c^d |K^*(\xi,\tau)T_1^{-1}(a,b,c,d)\Delta\overline{a}|^2 d\xi d\tau.$$

Доказательство теоремы следует из теорем 1,2 и свойства 3.

Рассмотрим другой метод приближённого решения интегрального уравнения (1) ориентированный на применение компьютеров. Отрезок $[t_0,t_1]$ разобьём на N_1 частей и рассмотрим интегральное уравнение (1) для моментов времени $t_k\in I,\ k=\overline{0,N_1},\ t_{N_1}=t_1$.

В результате имеем $\int\limits_a^b\int\limits_c^d \Lambda(t_k,\xi,\tau)\overline{\overline{u}}(\xi,\tau)d\xi d\tau = f(t_k),\ k=\overline{0,N}.$

Введём следующие матрицы и векторы $\overline{K}(\xi,\tau) = \begin{pmatrix}\Lambda(t_0,\xi,\tau)\\ \Lambda(t_1,\xi,\tau)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Lambda(t_{N_1},\xi,\tau)\end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} f(t_0)\\ f(t_1)\\ \ldots\ldots\\ f(t_{N_1})\end{pmatrix}$, где $\overline{K}(\xi,\tau)$ матрица порядка $n(N_1+1)\times m,\ \overline{b}\in R^{n(N_1+1)}$.

Тогда приближённое интегральное уравнение запишется в виде

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d \overline{K}(\xi,\tau)\overline{\overline{u}}(\xi,\tau)d\xi d\tau = \overline{b}. \tag{14}$$

Теорема 5 . *Пусть матрица*

$$T_2(a,b,c,d) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d \overline{K}(\xi,\tau)\overline{K}^*(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

порядка $n(N_1+1)\times n(N_1+1)$ положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (14) определяется по формуле

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{u}}(\xi,\tau) = \overline{K}^*(\xi,\tau)T_2^{-1}(a,b,c,d)\overline{b} + w_2(\xi,\tau)-\\ &-\overline{K}^*(\xi,\tau)T_2^{-1}(a,b,c,d)\int\limits_a^b\int\limits_c^d \overline{K}(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau)d\xi d\tau,\end{aligned} \tag{15}$$

где $w_2(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ - произвольная функция.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть $\Delta\overline{\overline{u}}(\xi,\tau) = u_*(\xi,\tau) - \overline{\overline{u}}(\xi,\tau)$. Функция $\Delta\overline{\overline{u}}(\xi,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ являются решением интегрального уравнения

$$\int_a^b\int_c^d \Lambda(t,\xi,\tau)\Delta\overline{\overline{u}}(\xi,\tau)d\xi d\tau = \Delta f_2(t),\ t\in I, \tag{16}$$

где $\Delta f_2(t) = f(t) - f_2(t,w_2),\ \int_a^b\int_c^d \Lambda(t,\xi,\tau)\overline{\overline{u}}(\xi,\tau)d\xi d\tau = f_2(t,w_2)$.

Теорема 6 . *Пусть матрица* $T_2(a,b,c,d) > 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$||\Delta\overline{\overline{u}}||_{L_2} = \int_a^b\int_c^d |\overline{K}^*(\xi,\tau)T_2^{-1}(a,b,c,d)\Delta\overline{b}|^2 d\xi d\tau,$$

где $\Delta\overline{b} = (\delta b_1,\dots,\Delta b_n),\ \Delta b_k = (\int_{t_0}^{t_1}\Delta f_{21}(t)\varphi_k(t)dt,\dots,\int_{t_0}^{t_1}\Delta f_{2n}(t\varphi_k(t)dt)),$
$\Delta f_2(t) = (\Delta f_{21}(t),\dots,\Delta f_{2n}(t)),\ t\in I.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

Список литературы

[1] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1989, -623 с.

[2] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. -М.: Наука, 1975, -303 с.

[3] *Фридман В.М.* Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. УМН XI, вып. 1, 1956.

[4] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. 1991. -т.27, №9. -с.1475-1486.

[5] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений. //Дифференциальные уравнения. 1993. -т.29, №4. -с.555-567.

[6] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закреплёнными концами траектории и ограниченным управлением. //Дифференциальные уравнения. 1996. -т.32, №6. -с.1-7.

[7] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление нелинейных систем. //Известия Российской академии наук, сер. теория систем управления. 1993. -№3. -с.87-99.