Модельная задача Веригина с малым параметром

Е.С. Алимжанов
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: aermek81@gmail.com

Аннотация

С помощью преобразования Лапласа найдено в явном виде решение модельной задачи Веригина с малым параметром, возникащей при решении нелинейной задачи с условием Веригина на свободной границе. Установлены равномерные относительно малого параметра оценки решения в пространстве Гельдера.

Задача Веригина описывает процесс нагнетания жидкости в пористую среду [1]. Такой процесс происходит, например, при затоплении нефтяных скважин водой, когда вода под давлением вытесняет значительно более вязкую нефть, или при нагнетании цементных, глинистых растворов, проводимом для увеличения прочности гидротехнических сооружений, при этом происходит вытеснение воды из пористой среды более вязкой жидкостью. Задача Веригина является задачей со свободной границей, так как неизвестна поверхность, разделяющая нагнетаемую и вытесняемую жидкости, неизвестным является также давление в жидостях.

В работе изучается задача с малым параметром в условии сопряжения для системы уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами, возникающая при решении нелинейной задачи со свободной границей. Двухфазная задача с малым параметром в условии Стефана для системы уравнении параболического типа рассматривалась в работе Г.И. Бижановой [2].

Пусть $\Omega_1 := \{x \,|\, x < 0\}$, $\Omega_2 = \{x \,|\, x > 0\}$, $\Omega_{jT} := \Omega_j \times (0,T)$, $j = 1,2$, $\sigma_T = (0,T)$. Требуется найти функции $u_j(x,t)$, $j = 1,2$ и $\rho(t)$, удовлетворяющие параболической системе уравнений

$$\partial_t u_j - a_j^2 \partial_x^2 u_j - \alpha_j D_t \rho = f_j(x,t) \quad \text{в } \ \Omega_{jT}, \ \ j = 1,2, \tag{1}$$

начальным условиям

$$\rho\big|_{t=0} = 0, \quad u_j\big|_{t=0} = 0, \quad \text{в } \ \Omega_j, \ \ j = 1,2, \tag{2}$$

условиям сопряжения на границе $x = 0$, $t \in \sigma_T$

$$u_1 - u_2 = \varphi_1(t), \quad \lambda_1 \partial_x u_1 = \lambda_2 \partial_x u_2 + \varphi_2(t) = -\varepsilon D_t \rho + \varphi_3(t), \tag{3}$$

где коэффициенты a_j, α_j, λ_j, $j = 1,2$ – положительные постоянные, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\partial_x^l = \partial^l / \partial x^l$, $\partial_t = \partial / \partial t$, $D_t = d/dt$.

В данной работе доказывается однозначная разрешимость задачи (1) – (3) в пространствах Гельдера $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \,t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_{jT})$, $j = 1,2$ и $\overset{\circ}{C}{}_t^{1+\alpha/2}(\bar{\sigma}_T)$ функций $v_j(x,t)$, $\rho(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\partial_t^i v_j\big|_{t=0} = 0, \quad j = 1,2, \qquad \frac{d^i \rho}{dt^i}\Big|_{t=0} = 0, \ \ i = 0,1,$$

и имеющих нормы

$$|v_j|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{jT}} := |v_j|_{\Omega_{jT}} + |\partial_t v_j|_{\Omega_{jT}} + |\partial_x v_j|_{\Omega_{jT}} + |\partial_x^2 v_j|_{\Omega_{jT}} + [\partial_t v_j]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{jT}} +$$
$$+ [\partial_t v_j]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{jT}} + [\partial_x^2 v_j]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{jT}} + [\partial_x^2 v_j]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{jT}} + [\partial_x v_j]^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{t,\Omega_{jT}}, \quad j = 1, 2,$$
$$|\rho|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} := \sup_{t\in\sigma_T} |\rho| + \sup_{t\in\sigma_T} |D_t\rho| + \sup_{t,t_1\in\sigma_T} \frac{|D_t\rho(t) - D_{t_1}\rho(t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha/2}}, \tag{4}$$

где $|v|_{\Omega_{jT}} = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_{jT}} |v(x,t)|$, $\alpha \in (0,1)$,

$$[v]^{(\alpha)}_{t,\Omega_{jT}} = \sup_{\substack{(x,t)\in\Omega_{jT}\\ (x,t_1)\in\Omega_{jT}}} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha}}, \qquad [v]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{jT}} = \sup_{\substack{(x,t)\in\Omega_{jT}\\ (y,t)\in\Omega_{jT}}} \frac{|v(x,t)-v(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Теорема 1 *Пусть* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$. *Для любых функций* $f_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\bar\Omega_{jT})$, $j = 1, 2$, $\varphi_1(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_t(\bar\sigma_T)$, $\varphi_i(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_t(\bar\sigma_T)$, $i = 2, 3$, *задача* (1)-(3) *имеет единственное решение* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ \ t}(\bar\Omega_{jT})$, $j = 1, 2$, $\rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_t(\bar\sigma_T)$, $\varepsilon D_t\rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_t(\bar\sigma_T)$ *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{jT}} + |\rho|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |\varepsilon D_t\rho|^{\frac{1+\alpha}{2}}_{\sigma_T} \le C_1 \left(\sum_{j=1}^{2} |f_j|^{(\alpha)}_{\Omega_{jT}} + |\varphi_1|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + \sum_{i=2}^{3} |\varphi_i|^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\sigma_T} \right),$$

где постоянная C_1 *не зависит от* ε.

Преобразуем задачу (1) – (3). Для этого построим вспомогательные функции $V_j(x,t)$, $j = 1, 2$, которые являются решением следующей краевой задачи:

$$\partial_t V_j - a_j^2 \partial_x^2 V_j = f_j(x,t) \quad \text{в } \Omega_{jT}, \quad V_j\big|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega_j, \ \ j = 1, 2, \tag{5}$$

$$(V_1 - V_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \ \ \lambda_1 \partial_x V_1\big|_{x=0} = \lambda_2 \partial_x V_2\big|_{x=0} + \varphi_2(t), \ \ t \in \sigma_T. \tag{6}$$

Известно [3], что задача (5), (6) имеет единственное решение $V_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ \ t}(\bar\Omega_{jT})$, $j = 1, 2$, удовлетворяющее следующим оценкам:

$$|V_1|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{1T}} + |V_2|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{2T}} \le C_2 \left(|f_1|^{(\alpha)}_{\Omega_{1T}} + |f_2|^{(\alpha)}_{\Omega_{2T}} + |\varphi_1|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |\varphi_2|^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\sigma_T} \right). \tag{7}$$

С помощью замен

$$u_j(x,t) = v_j(x,t) + V_j(x,t) + \alpha_j \rho(t), \quad j = 1, 2 \tag{8}$$

получим следующую задачу для нахождения функций $v_j(x,t)$, $j = 1, 2$, $\rho(t)$:

$$\partial_t v_j - a_j^2 \partial_x^2 v_j = 0 \quad \text{в } \Omega_{jT}, \ \ j = 1, 2, \tag{9}$$

$$\rho\big|_{t=0} = 0, \quad v_j\big|_{t=0} = 0, \quad \text{в } \Omega_j, \ \ j = 1, 2, \tag{10}$$

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=0} = (\alpha_2 - \alpha_1)\rho(t), \quad \lambda_1 \partial_x v_1\big|_{x=0} = \lambda_2 \partial_x v_2\big|_{x=0} = -\varepsilon D_t \rho(t) + \Phi(t), \tag{11}$$

где $\Phi(t) = \varphi_3(t) - \lambda_1 \partial_x V_1\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{(1+\alpha)/2}(\bar\sigma_T)$ и подчиняется оценке

$$|\Phi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha)/2} \le C_3 \left(|f_1|_{\Omega_{1T}}^{(\alpha)} + |\varphi_1|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} + |\varphi_3|_{\sigma_T}^{(1+\alpha)/2} \right). \tag{12}$$

Лемма 1 *Пусть* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$. *Решение задачи* (9) – (11) *имеет вид*

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Phi(\tau) G(t-\tau)\, d\tau \\ &= (-1)^{j+1}\frac{2a_j^2}{\varepsilon}\int_0^t \Phi(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \partial_x \Gamma_j(a_j k z/\varepsilon + (-1)^j x, t-\tau-z)\big|_{x=0} dz,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}v_j(x,t) &= \frac{k}{\varepsilon b_j}\int_0^t \Phi(\tau) G_j(x, t-\tau)\, d\tau \\ &= (-1)^{j+1}\frac{2a_j^2 k}{\varepsilon b_j}\int_0^t \Phi(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \partial_x \Gamma_j(a_j k z/\varepsilon + (-1)^j x, t-\tau-z) dz, \\ &\qquad j = 1, 2,\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$b_j = \frac{\lambda_j}{a_j} > 0, \;\; j = 1, 2, \qquad k = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1 \lambda_2}{a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1} > 0, \tag{15}$$

$$G(t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_x \Gamma_j(a_j k z/\varepsilon + (-1)^j x, t - z)\big|_{x=0} dz, \;\; j = 1, 2, \tag{16}$$

$$G_j(x,t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_x \Gamma_j(k a_j z/\varepsilon + (-1)^j x, t - z)\, dz, \;\; j = 1, 2, \tag{17}$$

$$\Gamma_j(x,t) = \frac{1}{2a_j\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a_j^2 t}}, \; -$$

фундаментальное решение параболического уравнения (9).

Доказательство. Применим к задаче (9) – (11) преобразование Лапласа по переменной t

$$\tilde F(p) \equiv L[F] = \int_0^\infty F(t) e^{-pt}\, dt.$$

Общее решение полученного обыкновенного дифференциального уравнения будет в следующем виде:

$$\tilde v_1(x,p) = A_1 e^{\sqrt{p}\, x/a_1}, \quad x < 0, \qquad \tilde v_2(x,p) = A_2 e^{-\sqrt{p}\, x/a_2}, \quad x > 0.$$

Здесь $A_j = A_j(p)$, $j = 1, 2$ – функции, подлежащие определению. Из условий (11), записанных в области изображений Лапласа

$$\tilde v_1 - \tilde v_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)\tilde\rho(p), \quad \lambda_1 \partial_x \tilde v_1 = \lambda_2 \partial_x \tilde v_2 = -\varepsilon p \tilde\rho(p) + \tilde\Phi(p),$$

найдем функции A_1 и A_2, затем $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ и $\tilde{\rho}$

$$\tilde{\rho}(p) = \frac{1}{\varepsilon}\,\tilde{\Phi}(p)\tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{p + k/\varepsilon\sqrt{p}}\,, \tag{18}$$

$$\tilde{v}_j(x,p) = (-1)^{j+1}\frac{b_j}{\varepsilon k}\,\tilde{\Phi}(p)\tilde{G}_j(x,p), \quad j = 1,2, \tag{19}$$

$$\tilde{G}_j(x,p) = \frac{e^{-\sqrt{p}\,|x|/a_j}}{p + k/\varepsilon\sqrt{p}}\,, \tag{20}$$

Так как $Re(p+k\sqrt{p}/\varepsilon) > 0$ при $k > 0$ и $\varepsilon > 0$, функции $\tilde{G}(p)$, $\tilde{G}_j(x,p)$ можем представить в виде:

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty e^{-(p+k\sqrt{p}/\varepsilon)z}\,dz, \quad \tilde{G}_j(x,p) = \int_0^\infty e^{-pz}e^{-\sqrt{p}\,(kz/\varepsilon+|x|/a_j)}dz, \quad j = 1,2,$$

k и b_j, $j = 1,2$ постоянные определяемые формулами (15), $|x| = (-1)^j x$, так как $x < 0$ при $j = 1$ и $x > 0$ при $j = 2$.

Найдем обратное преобразование Лапласа $L^{-1}[\tilde{\rho}(p)] = \rho(t)$ функции $\tilde{\rho}(p)$. Для этого запишем функцию $G(t) = L^{-1}[\tilde{G}(p)]$, используя формулу свертки,

$$G(t) = L^{-1}\left[\int_0^\infty e^{-(p+k\sqrt{p}/\varepsilon)z}\,dz\right] = \int_0^\infty dz\int_0^t L^{-1}[e^{-pz}](\tau)L^{-1}[e^{-k\sqrt{p}\,z/\varepsilon}](t-\tau)\,d\tau.$$

Применим формулы обратных преобразований Лапласа [4]

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[e^{-k\sqrt{p}\,z/\varepsilon}\right](t-\tau) &= \frac{a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x}{2a_j\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\,e^{-\frac{(a_jkz/\varepsilon+(-1)^{j+1}x)^2}{4a_j^2(t-\tau)}}\Big|_{x=0} \\ &= (-1)^{j+1}2a_j^2\partial_x\Gamma_j(a_jkz/\varepsilon + (-1)^{j+1}x, t-\tau)\big|_{x=0}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$L^{-1}\left[e^{-p\,z}\right](\tau) = \eta(\tau - z)\,\delta(\tau - z), \tag{22}$$

где $\Gamma_j(x,t)$, $j = 1,2$ – фундаментальное решение параболического уравнения (9), $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака, $\eta(t-\tau)$ – функция Хевисайда, тогда найдем

$$\begin{aligned} G(t) &= (-1)^{j+1}2a_j^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty \eta(\tau-z)\,\delta(\tau-z)\partial_x\Gamma_j(a_jkz/\varepsilon + (-1)^{j+1}x, t-\tau)\big|_{x=0}\,dz \\ &= (-1)^{j+1}2a_j^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau \delta(\tau-z)\partial_x\Gamma_j(a_jkz/\varepsilon + (-1)^{j+1}x, t-\tau)\big|_{x=0}\,dz. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} G(t) &= (-1)^{j+1}2a_j^2\int_0^t dz\int_z^\tau \delta(\tau-z)\partial_x\Gamma_j(a_jkz/\varepsilon + (-1)^{j+1}x, t-\tau)\big|_{x=0}\,d\tau = \\ &= (-1)^{j+1}2a_j^2\int_0^t \partial_x\Gamma_j(a_jkz/\varepsilon + (-1)^{j+1}x, t-z)\big|_{x=0}\,dz. \end{aligned} \tag{23}$$

Теперь вычислим обратные преобразования $L^{-1}[\tilde{v}_j(x,p)] = v_j(x,t)$. Привлекая соотношения (21), (22) и формулу свертки, найдем обратное преобразование Лапласа функций Грина

$$G_j(x,t) = \int_0^{\infty} L^{-1}\left[e^{-pz} e^{-\sqrt{p}(kz/\varepsilon+(-1)^j x/a_j)}\right] dz$$
$$= \int_0^t \frac{a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x}{2a_j\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\, e^{-\frac{(a_j kz/\varepsilon+(-1)^{j+1}x)^2}{4a_j^2(t-\tau)}} dz$$
$$= (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_x \Gamma_j(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-z)\, dz, \quad j = 1,2. \tag{24}$$

Как видно из формул (23), (24), справедливо равенство

$$G(t) \equiv G_j(x,t)\big|_{x=0}, \quad j = 1,2. \tag{25}$$

Из (18), (19), (23), (24) и формулы свертки получим решение (13), (14) задачи (9) – (11). □

Лемма 2 *Пусть* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$. *Для функций* $G(t)$, $G_j(x,t)$, $j = 1,2$, *определяемых формулами* (16), (17), *справедливы оценки при* $t \in (0,T)$*:*

$$\left|\partial_t^l \partial_x^m G_j(x,t)\right| \le C_5 \left(\frac{\varepsilon}{t^{\frac{1+2l+m}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}} + \frac{e^{-\frac{(ka_j t)^2+\varepsilon^2 x^2}{8a_j^2\varepsilon^2 t}}}{\left(\left(\frac{kt}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{x^2}{a_j^2}\right)^{\frac{2l+m}{2}}} \right), \ \ j = 1,2, \tag{26}$$
$$\left|D_t^l G(t)\right| \le C_4 \left(\frac{\varepsilon}{t^{(1+2l)/2}} + \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{2l} e^{-\frac{k^2 t}{8\varepsilon^2}} \right), \tag{27}$$

где постоянные C_4, C_5 *не зависят от* ε, k *определяется формулой* (15).

Доказательство. Из представлений (16), (17) производные функций $G(t)$, $G_j(x,t)$, $j = 1,2$ будут в следующем виде:

$$\partial_t^l \partial_x^m G_j(x,t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_t^l \partial_x^{m+1} \Gamma_j(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-z)\, dz, \ \ j = 1,2,$$
$$D_t^l G(t) = (-1)^{j+1} 2a_j^2 \int_0^t \partial_t^l \partial_x \Gamma_j(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-z)\big|_{x=0}\, dz,$$

Используя оценку фундаментального решения уравнения теплопроводности

$$|\partial_t^l \partial_x^m \Gamma_j(x,t)| \le \frac{C_6}{t^{(1+2l+m)/2}}\, e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}}, \ \ j = 1,2, \tag{28}$$

оценим производную $\partial_t^l \partial_x^m G_j(x,t)$

$$\left|\partial_t^l \partial_x^m G_j(x,t)\right| \le C_7 \int_0^t \frac{e^{-\frac{(a_j kz/\varepsilon+(-1)^j x)^2}{8a_j^2(t-z)}}}{(t-z)^{\frac{2+2l+m}{2}}}\, dz \le C_8 \int_0^t \frac{1}{(t-z)^{\frac{2+2l+m}{2}}}\, e^{-\frac{(a_j kz/\varepsilon)^2+x^2}{8a_j^2(t-z)}} dz$$
$$\equiv C_8 \left(\int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t \right) \frac{1}{(t-z)^{\frac{2+2l+m}{2}}}\, e^{-\frac{(a_j kz/\varepsilon)^2+x^2}{8a_j^2(t-z)}} dz. \tag{29}$$

Применяя неравенства в экспоненте $1/(t-z) \geq 1/t$ и $1/(t-z) \leq 2/t$ в дроби, и произведя замену переменных $\frac{kz}{\varepsilon\sqrt{8t}} = \xi$ в первом интеграле, а во втором – замену $A^2/(t-z) = 2\xi^2$, $A^2 = \frac{(a_j kt/2\varepsilon)^2 + x^2}{8a_j^2}$, для $2l + m > 0$ получим

$$\left|\partial_t^l \partial_x^m G_j(x,t)\right| \leq C_9 \int_0^{t/2} \left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{2+2l+m}{2}} e^{-\frac{(ka_j z/\varepsilon)^2 + x^2}{8a_j^2 t}} dz + \frac{C_{10}}{A^{2l+m}} \int_{A/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{2l+m-1} e^{-2\xi^2} d\xi$$
$$\leq \frac{C_{11}\varepsilon}{t^{\frac{1+2l+m}{2}}} e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}} \int_0^{\frac{k\sqrt{t}}{2\sqrt{8}\varepsilon}} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{C_{12}}{A^{2l+m}} e^{-A^2/t} \int_0^{\infty} \xi^{2l+m-1} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Из (29) и последнего неравенства следует оценка (26). В дальнейшем нам потребуется оценка интеграла (29) при $2l + m = 1$:

$$\int_0^t \frac{1}{(t-z)^{3/2}} e^{-\frac{(ka_j z/\varepsilon)^2 + x^2}{8a_j^2 (t-z)}} dz \leq \frac{C\varepsilon}{t} e^{-\frac{x^2}{8a_j^2 t}}. \tag{30}$$

Учитывая соотношение (25), из (26) сразу получим оценку производных (27) функции $G(t)$. □

Теорема 2 *Пусть* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$. *Для любой функции* $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{(1+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$, *задача* (9)-(11) *имеет единственное решение* $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_{jT})$, $j = 1, 2$, $\rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{1+\alpha/2}(\bar{\sigma}_T)$, $\varepsilon D_t \rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{(1+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$ *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} |v_j|_{\Omega_{jT}}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} + |\varepsilon D_t \rho|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leq C_{13} |\Phi|_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \tag{31}$$

где постоянная C_{13} *не зависит от* ε.

Доказательство. Оценим норму (4) функции $\rho(t)$, определяемой формулой (13). Поменяв порядок интегрирования и произведя замену $\tau + z = \tau_1$ в интеграле по τ, получим выражения

$$\rho(t) = (-1)^{j+1} \frac{2a_j^2}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \Phi(\tau - z) \partial_x \Gamma_j(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-\tau)\big|_{x=0} dz, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} D_t \rho(t) = (-1)^{j+1} \frac{2a_j^2}{\varepsilon} \Bigg\{ &\int_0^t d\tau \int_0^\tau [\Phi(\tau - z) - \Phi(t-z)] \times \\ &\times \partial_t \partial_x \Gamma(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-\tau)\big|_{x=0} dz \\ &+ \int_0^t \Phi(t-z) \partial_x \Gamma_j(a_j kz/\varepsilon + (-1)^j x, t-z)\big|_{x=0} dz \Bigg\}, \end{aligned} \tag{33}$$

где вместо τ_1 мы снова записали τ.

Для функции $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{(1+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$ справедливы следующие неравенства:

$$N = [\Phi]_{\sigma_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \quad |\Phi(t) - \Phi(t_1)| \leq N|t - t_1|^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad |\Phi(t)| \leq N t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \tag{34}$$

которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Применим оценку (28) для $\Gamma_j(x,t)$, $j = 1,2$, неравенства (34), затем произведем замену $\frac{kz}{\varepsilon\sqrt{8(t-\tau)}} = z_1$ в формуле (32) и в первом интеграле по z в (33), а во втором интеграле в (33) применим оценку (30), в результате получим

$$\begin{aligned}
|\rho(t)| &\le \frac{C_{14}N}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-z)^{(1+\alpha)/2}}{t-\tau}\, e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-\tau)}}dz \\
&\le C_{15}N\int_0^t \frac{\tau^{(1+\alpha)/2}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \int_0^\infty e^{-z_1^2}dz_1 = C_{16}Nt^{1+\alpha/2}, \\
|D_t\rho(t)| &\le \frac{C_{17}N}{\varepsilon}\left(\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha-3)/2}d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-\tau)}}dz + \right. \\
&\left. + \frac{C_{18}N}{\varepsilon}\int_0^t \frac{(t-z)^{1+\alpha/2}}{(t-z)^{3/2}} e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-z)}}dz \le C_{19}Nt^{\alpha/2}, \right.
\end{aligned} \tag{35}$$

где постоянные C_{16} и C_{19} не зависят от ε.

Приняв $0 < t_1 < t < T$ для определенности, запишем разность производных $D_t\rho(t) - D_{t_1}\rho(t_1)$, определямых по формуле (33), в виде

$$\begin{aligned}
\Delta = D_t\rho(t) - D_{t_1}\rho(t_1) = \frac{1}{\varepsilon}&\left(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau [\Phi(\tau-z)-\Phi(t-z)]\partial_t\partial_x\Gamma(\cdot,t-\tau)\big|_{x=0}dz \right. \\
&+ \int_0^{t_1} d\tau \int_0^\tau [\Phi(\tau-z)-\Phi(t_1-z)]dz \int_{t_1}^t \partial_{t_2}^2\partial_x\Gamma(\cdot,t_2-\tau)\big|_{x=0}dt_2 \\
&+ \int_{t_1}^t \Phi(t-z)\partial_x\Gamma(\cdot,t-z)\big|_{x=0}dz + \int_0^{t_1}[\Phi(t-z)-\Phi(t_1-z)]\partial_x\Gamma(\cdot,t-t_1)\big|_{x=0}dz \\
&\left. + \int_0^{t_1}\Phi(t_1-z)dz\int_{t_1}^t \partial_{t_2}\partial_x\Gamma(\cdot,t_2-z)\big|_{x=0}dt_2\right).
\end{aligned}$$

Для оценки Δ используем неравенства (28) и (34), тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
|\Delta| \le \frac{C_{20}N}{\varepsilon}&\left(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{(1+\alpha)/2}}{(t-\tau)^2}\, e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-\tau)}}dz \right. \\
&+ \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{(1+\alpha)/2}}{(t_2-\tau)^3}d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t_2-\tau)}}dz + \int_{t_1}^t \frac{(t-z)^{(1+\alpha)/2}}{t-z}\, e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-z)}}dz \\
&\left. +(t-t_1)^{(\alpha-1)/2}\int_0^{t_1} e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-t_1)}}dz + \int_0^{t_1}(t_1-z)^{(1+\alpha)/2}dz\int_{t_1}^t \frac{e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t_2-z)}}}{(t_2-z)^2}\, dt_2\right).
\end{aligned}$$

Применив неравенства $t_1 - \tau \le t_2 - \tau$ во втором, $(t-z)^{1+\alpha/2} \le t(t-t_1)^{\alpha/2}$ – в третьем и $(t_1-z)^{1/2} \le (t_2-z)^{1/2}$, $(t_1-z)^{\alpha/2} \le t_2^{\alpha/2}$ – в последнем интегралах и проинтегрировав первый и четвертый интегралы, найдем

$$|\Delta| \le \frac{C_{21}N}{\varepsilon}\left((t-t_1)^{\alpha/2}\left[\varepsilon + t\int_0^t \frac{e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t-z)}}}{(t-z)^{3/2}}\, dz\right] + \int_{t_1}^t t_2^{\alpha/2}\int_0^{t_2}\frac{e^{-\frac{k^2z^2}{8\varepsilon^2(t_2-z)}}}{(t_2-z)^{3/2}}\, dz\right).$$

Воспользуемся в интегралах по z оценкой (30), тогда получим

$$|\Delta| \leq C_{22}N(t-t_1)^{\alpha/2}, \quad [D_t\rho(t)]^{(\alpha/2)}_{t,\sigma_T} \leq C_{22}N, \tag{36}$$

здесь постоянная C_{22} не зависит от ε.

Из оценок (35), (36) следует, что $\rho(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_t(\bar{\sigma}_T)$ и

$$|\rho(t)|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} \leq C_{23}|\Phi(t)|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_t}, \tag{37}$$

где C_{23} не зависит от ε. Из формул (13) и (14) видно, что $v_j(x,t)\big|_{x=0} = (-1)^{j+1}\frac{k}{b_j}\rho(t)$, $j=1,2$, следовательно,

$$|v_j(0,t)|^{(1+\alpha/2)}_{\bar{\sigma}_T} \leq C_{24}|\rho(t)|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}, \quad j=1,2.$$

Тогда функция $v_j(x,t)$, $j=1,2$, как решение первой краевой задачи для параболического уравнения (9) в Ω_{jT} со следом на $x=0$ из пространства $\overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_t(\bar{\sigma}_T)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(\bar{\Omega}_{jT})$, $j=1,2$ (см., напр. [5]), и в силу (37) удовлетворяет неравенству

$$|v_j|^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}_{jT}} \leq C_{25}|v_j\big|_{x=0}|^{(1+\alpha/2)}_{\bar{\sigma}_T} \leq C_{26}|\Phi|^{(1+\alpha)/2}_{\bar{\sigma}_T},$$

где C_{26} не зависит от ε. Из всего этого и второго равенства в (11) получаем, что $\varepsilon\rho_t(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_t(\bar{\sigma}_T)$ и выполняется неравенство $|\varepsilon\rho_t(t)|^{(1+\alpha)/2}_{\bar{\sigma}_T} \leq C_{27}|\Phi|^{(1+\alpha)/2}_{\bar{\sigma}_T}$ и оценка (31). $\square$

Из формул (8) и неравенства (7), а также из теоремы 2 и оценки (12) следует теорема 1.

Список литературы

[1] *Веригин Н.Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы с целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений // Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, 1952. – С. 674-687.

[2] *Bizhanova G.I.* Uniform estimates of the solution to the linear two-phase Stefan problem with a small prameter // Math. Journal, 1 (2005). – С. 19-28.

[3] *Бижанова Г.И.* Оценки решения $n-$мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах, I, II. // Известия АН РК, сер. физ.-мат. № 5 (1992). – С. 7-13; № 1 (1993), – С. 11-17.

[4] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 344 с.

[5] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.