# Задача Трикоми и ее сопряженная для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров одного класса

*А.В. Роговой*
*Южно-Казахстанский гуманитарный институт имени М. Сапарбаева*

**Аннотация**

Работа посвящена установлению свойств задачи Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров одного класса. Для задачи Трикоми построена сопряженная задача. Получены разрывные нетривиальные решения обеих задач. Доказано условие непрерывности решения задачи Трикоми для любых контуров рассматриваемого класса через разрывное решение однородной сопряженной задачи.

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ - характеристиками $AC$ : $x + y = 0$ и $BC$ : $x - y = 1$, а при $y > 0$ - кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x,y): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2,\ y > 0 \right\},$$

рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$sgn\ y\ u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия "склеивания"решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x,+0) = u(x,-0), \tag{3}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{4}$$

Обозначим угол подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения, то есть угол между касательной к кривой в точках $A$ или $B$ и отрезком $AB$, следующим образом

$$\gamma_\delta = arcctg 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \tag{5}$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1** *Существует бесконечное множество разрывных в точке $B(1,0)$ решений однородной ($f \equiv 0$) задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1)–(2)), причем выполнены условия (3)–(4). Данные решения определяются по формуле*

$$u_k(x,y) = \begin{cases} Re\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1\right)^\alpha + Im\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1\right)^\alpha, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^\alpha, & y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

*где*

$$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

*а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.*

**Доказательство.** Обозначим

$$w(x,y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1\right)^{\alpha}, \tag{8}$$

то есть

$$u(x,y) = Rew(x,y) + Imw(x,y), \quad y > 0. \tag{9}$$

Докажем, что функция (6) удовлетворяет соотношениям (1)–(4).
**1.** При $y < 0$ уравнение (1) записывается в виде

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (6) при $y < 0$

$$u(x,y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha},$$

имеем

$$u_{xx}(x,y) = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} +$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3};$$
$$u_{yy}(x,y) = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} +$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3}.$$

Следовательно,

$$u_{xx} - u_{yy} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} +$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} -$$
$$-\alpha(\alpha-1)\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} -$$
$$-\alpha\left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} = 0,$$

так как $x + y \neq 1$ в $\Omega^-$.

Таким образом, функция (6) удовлетворяет уравнению (1) при $y < 0$.
При $y > 0$ уравнение (1) записывается в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Согласно (6), имеет место следующее представление функции $u_k(x,y)$ при $y>0$

$$u(x,y) = Re\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha + Im\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha.$$

Предварительно вычислим значение выражения

$$w_{xx}+w_{yy}, \qquad w(x,y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha.$$

Имеем

$$w_{xx} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-2}\times$$
$$\times\frac{(1-x)^4+4(1-x)^3yi-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3i+y^4}{((1-x)^2+y^2)^4}+$$
$$+\alpha\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-1}\frac{2(1-x)^3+6(1-x)^2yi-6(1-x)y^2-2y^3i}{((1-x)^2+y^2)^3};$$
$$w_{yy} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-2}\times$$
$$\times\frac{-(1-x)^4-4(1-x)^3yi+6(1-x)^2y^2+4(1-x)y^3i-y^4}{((1-x)^2+y^2)^4}+$$
$$+\alpha\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-1}\frac{-2(1-x)^3-6(1-x)^2yi+6(1-x)y^2+2y^3i}{((1-x)^2+y^2)^3}.$$

Таким образом, $w_{xx}+w_{yy}=0$, так как $(1-x)^2+y^2\neq 0$ в $\Omega^+$, следовательно,

$$Re\,(w_{xx}+w_{yy}) + Im\,(w_{xx}+w_{yy}) = 0 \quad\Rightarrow\quad u_{xx}+u_{yy}=0.$$

В итоге, функция (6) удовлетворяет уравнению (1) как при $y>0$, так и при $y<0$.
**2.** При $y<0$ краевое условие (2) примет вид

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0.$$

Учитывая представление функции (6) при $y<0$

$$u(x,y) = \left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^\alpha = \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^\alpha,$$

имеем

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^\alpha\Bigg|_{x+y=0} = 0,$$

так как $\alpha>0$. Таким образом, функция (6) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2).

При $y>0$ краевое условие (2) примет вид

$$u|_{\sigma_\delta}=0.$$

Представление функции (6) при $y>0$ следующее

$$u(x,y)=Rew(x,y)+Imw(x,y),$$

где

$$w(x,y)=\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha=\left(\frac{1-x+iy-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha=$$

$$=\left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha.$$

Преобразованное выражение для контура $\sigma_\delta$ имеет вид:

$$2y\delta=(1-x)-(1-x)^2-y^2.$$

Таким образом, краевое условие запишется как

$$u|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta}=0.$$

Имеем, учитывая определение (5) числа $\gamma_\delta$:

$$w(x,y)|_{\sigma_\delta}=\left.\left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha\right|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta}=$$

$$=\left(\frac{2y\delta+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha(2\delta+i)^\alpha=$$

$$=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha(ctg\gamma_\delta+i)^\alpha=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha\left(\frac{\cos\gamma_\delta+i\sin\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta}\right)^\alpha=$$

$$=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta}\right)^\alpha(\cos\alpha\gamma_\delta+i\sin\alpha\gamma_\delta);$$

следовательно,

$$u|_{\sigma_\delta}=(Rew(x,y)+Imw(x,y))|_{\sigma_\delta}=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta}\right)^\alpha(\cos\alpha\gamma_\delta+\sin\alpha\gamma_\delta);$$

но, согласно условию (7),

$$\alpha=\frac{\frac{3\pi}{4}+\pi k}{\gamma_\delta}\quad\Rightarrow\quad\alpha\gamma_\delta=\frac{3\pi}{4}+\pi k\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha\gamma_\delta+\sin\alpha\gamma_\delta=0.$$

Таким образом,

$$u|_{\sigma_\delta}=0.$$

Таким образом, краевое условие (2) выполнено полностью для функции (6).

**3.** Для проверки условий (3)–(4) получим из представления функции (6)

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^{\alpha},$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \alpha \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2},$$

и условия (3)–(4) выполнены.

В итоге, функция (6) является решением однородной задачи Трикоми (1)–(2), причем выполнены условия (3)–(4). Но, как легко видеть, функция (6) является разрывной в точке $B(1,0)$. **Лемма 1 доказана.**

Для задачи, сопряженной к задаче (1)–(4), а именно для задачи

$$sgn\, y\, v_{xx} + v_{yy} = g(x,y), \tag{1*}$$

$$v|_{\sigma_\delta \cup BC} = 0, \tag{2*}$$

$$v(x,+0) = v(x,-0), \tag{3*}$$

$$v_y(x,+0) = v_y(x,-0) \tag{4*}$$

имеет место следующая лемма, аналогичная лемме 1 для задачи (1)–(4).

**Лемма 2** *Существует бесконечное множество разрывных в точке $A(0,0)$ решений однородной ($g \equiv 0$) сопряженной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1*)–(2*)), причем выполнены условия (3*)–(4*). Данные решения определяются по формуле*

$$v_k(x,y) = \begin{cases} Re\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1\right)^{\alpha} + Im\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1\right)^{\alpha}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{x-y} - 1\right)^{\alpha}, & y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

*где $\alpha$ находится из соотношения (7), а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.*

Доказательство леммы 2 полностью аналогично доказательству леммы 1.

Перейдем к задаче Трикоми для неоднородного уравнения (1). Основным результатом работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1** *Необходимым и достаточным условием существования непрерывного решения неоднородной задачи Трикоми для любой правой части является условие*

$$\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4}. \tag{11}$$

*При его невыполнении на правую часть уравнения должно быть наложено условие*

$$\iint\limits_{\Omega} v_0(x,y) f(x,y) dxdy = 0 \tag{12}$$

*(функция $v_0$ получается из формулы (10) с учетом значения соотношения (7) при $k = 0$). Иными словами, скалярное произведение по области $\Omega$ правой части $f(x,y)$ уравнения (1) и соответствующего разрывного решения сопряженной задачи $v_0(x,y)$ должно быть равно нулю.*

**Теорема 2** *Необходимым и достаточным условием существования непрерывного решения неоднородной сопряженной задачи Трикоми для любой правой части является условие (11). При его невыполнении для существования непрерывного решения скалярное произведение по области $\Omega$ правой части $g(x,y)$ уравнения (1*) и соответствующего разрывного решения исходной задачи $u_0(x,y)$ должно быть равно нулю.*

Доказательство проведем для теоремы 1. Для теоремы 2 оно полностью аналогично.
**Доказательство:** обозначим

$$u(x,0)=\tau(x), \tag{13}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x). \tag{14}$$

Используем замену переменных

$$x=\frac{r^2+r\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}, \quad y=\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}, \tag{15}$$

откуда

$$r=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}}, \quad \varphi=\arctan\frac{y}{x(1-x)-y^2}, \tag{16}$$

а также преобразование Меллина $F(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ начальных и искомых данных задачи

$$\overline{\tau}(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\tau\left(\frac{x}{1+x}\right)dx, \tag{17}$$

$$\overline{\nu}(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\cdot x\frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^2}dx, \tag{18}$$

$$\overline{F}_1(s)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^{s-1}dx\int\limits_0^{\frac{x}{1+x}}d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{\frac{x}{1+x}}f\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right)d\eta_1, \tag{19}$$

$$\overline{f}(s,\varphi)=\int\limits_0^\infty r^{s-1}\frac{r^2}{(1+2r\cos\varphi+r^2)^2}f\left(\frac{r^2+r\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2},\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}\right)dr, \tag{20}$$

$$\overline{u}(s,\varphi)=\int\limits_0^\infty r^{s-1}u(r,\varphi)dr. \tag{21}$$

Кроме того, обозначим

$$\overline{u}_1(s,\varphi)=\sin s\varphi, \tag{22}$$

$$\overline{u}_2(s,\varphi)=\cos s\varphi-\sin s\varphi\cdot ctgs\gamma_\delta. \tag{23}$$

Тогда решение задачи Трикоми выписывается следующим образом [1]:

$$y<0: \quad u(x,y)=\int\limits_0^{x+y}\nu(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{x-y}f\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right)d\eta_1, \tag{24}$$

$$y>0: \quad \overline{u}(s,\varphi)=\overline{\tau}(s)\cdot\overline{u}_2(s,\varphi)-\frac{1}{s}\overline{u}_1(s,\varphi)\int\limits_{\varphi}^{\gamma_\delta}\overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt-$$

$$-\frac{1}{s}\overline{u}_2(s,\varphi)\int\limits_0^{\varphi}\overline{u}_1(s,t)\overline{f}(s,t)dt, \tag{25}$$

а функции $\overline{\tau}(s)$ и $\overline{\nu}(s)$ определяются из следующих соотношений

$$\overline{\tau}(s)=\frac{s\overline{F}_1(s)+\int\limits_0^{\gamma_\delta}\overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt}{s(1-ctgs\gamma_\delta)}, \tag{26}$$

$$\overline{\nu}(s)=\frac{-ctgs\gamma_\delta\cdot s\cdot\overline{F}_1(s)-\int\limits_0^{\gamma_\delta}\overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt}{s(1-ctgs\gamma_\delta)}, \tag{27}$$

причем правые части соотношений (26) и (27) должны быть непрерывны при

$$-1<s<0.$$

(В этом случае соответствующие функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ также непрерывны).

Отсюда видно, что необходимым и достаточным условием непрерывности решения задачи Трикоми для любой гладкой правой части является условие (11).

Предположим, что условие (11) не выполнено. Это означает, что при

$$s=-\alpha=-\frac{3\pi}{4\gamma_\delta}\in(-1,0)$$

знаменатель в (26) обращается в нуль. Поэтому мы должны потребовать (для непрерывности решения), чтобы и числитель был равен нулю

$$\left(s\overline{F}_1(s)+\int\limits_0^{\gamma_\delta}\overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt\right)\Bigg|_{s=-\alpha}=0, \tag{28}$$

то есть наложить некоторое условие на правую часть уравнения (1).

Используя свойство преобразования Меллина [2, с. 567]

$$g(s)=\int\limits_0^{\infty}x^{s-1}f(x)dx \quad\Rightarrow\quad sg(s)=-\int\limits_0^{\infty}x^{s-1}\cdot xf'(x)dx,$$

учитывая формулу [3, с. 206]

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv, \qquad (29)$$

проводя последовательно замены $\frac{x}{1+x} = t$ и $t = x-y$, $\xi_1 = x+y$, получим из соотношения (26)

$$\overline{\tau}(s) = \frac{\iint\limits_{\Omega^-} \left(\frac{x-y}{1-(x-y)}\right)^s f(x,y)dxdy + \int\limits_0^{\gamma_\delta} (\cos st - \sin st \cdot ctgs\gamma_\delta)\overline{f}(s,t)dt}{s(1-ctgs\gamma_\delta)}. \qquad (30)$$

При $s = -\alpha$, сделав обратную замену переменных по формулам (15)–(16) и перейдя к переменным $x$, $y$, получим из соотношения (28) с учетом формул (7), (10), (20), (23), (29), (30)

$$\left.\left(s\overline{F}_1(s) + \int\limits_0^{\gamma_\delta} \overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt\right)\right|_{s=-\alpha} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega^-} \left(\frac{1-(x-y)}{x-y}\right)^\alpha f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega^+} v_0(x,y)f(x,y)dxdy =$$

$$\iint\limits_{\Omega^-} v_0(x,y)f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega^+} v_0(x,y)f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} v_0(x,y)f(x,y)dxdy = 0,$$

то есть мы получили условие (12). **Теорема 1 доказана полностью.**

## Список литературы


[1] Роговой А.В. Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина, автореферат диссертации ... кандидата физико-математических наук, Шымкент, 2004, 26с.

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: "Наука 1965, 716с.

[3] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: Физматгиз, 1966, 656с.