Трехточечная краевая задача для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

А.Н. Азанова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: azanova_ alina@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена качественному исследованию асимптотического по малому параметру поведения решений трехточечной краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с интегральным оператором типа Фредгольма.

В работе [1] предложена конструктивная формула решения трехточечной краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения третьего порядка, получены асимптотические оценки решения и доказана сходимость решения сингулярно возмущенной задачи к решению невозмущенной краевой задачи.

В данной работе рассматривается на отрезке [0,1] линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)\big)\,dx \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$H_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad H_2 y(t,\varepsilon) \equiv y(t_0,\varepsilon) \equiv \beta, \quad H_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \quad (2)$$

где α, β, γ - некоторые известные постоянные, не зависящие от ε, а $0 < t_0 < 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I Функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $F(t)$ достаточно гладкие на отрезке $0 \le t \le 1$.

II Функция $A(t)$ удовлетворяет неравенству $A(t) \ge \overline{\gamma} = const > 0$, $0 \le t \le 1$.

III Функции $H_0(t,x)$, $H_1(t,x)$ в области $0 \le t \le 1$, $0 \le x \le 1$ являются непрерывными.

IV Число 1 не является собственным числом ядра

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1 \big(H_0(t,x)K_3(x,s,\varepsilon) + H_1(t,x)K_3'(x,s,\varepsilon)\big)\,dx.$$

V Справедливы неравенства:

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon) \\ y_1(t_0,\varepsilon) & y_2(t_0,\varepsilon) & y_3(t_0,\varepsilon) \\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & y_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix} \ne 0, \quad \omega(\varepsilon) = \begin{vmatrix} Q_1(0,\varepsilon) & Q_2(0,\varepsilon) & Q_3(0,\varepsilon) \\ Q_1(t_0,\varepsilon) & Q_2(t_0,\varepsilon) & Q_3(t_0,\varepsilon) \\ Q_1(1,\varepsilon) & Q_2(1,\varepsilon) & Q_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix} \ne 0.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (1):

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \cdot y''' + A(t)\cdot y'' + B(t)\cdot y' + C(t)\cdot y = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Если справедливы условия I и II, то фундаментальная система решений уравнения (3) на отрезке [0,1] существует и выражается формулами [2]:

$$
\begin{aligned}
&y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = e^{\int\limits_0^t \mu_i(x)dx}\left(y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon)\right), \quad i=1,2, \quad j=0,1,2;\\
&y_3^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_3(x)dx}\left(\mu_3^j(t) y_{30}(t) + O(\varepsilon)\right), \quad j=0,1,2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Функции $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, при $0 \le s \le t \le 1$, являющиеся решением задачи Коши

$$
\varepsilon \cdot K_i''' + A(t)\cdot K_i'' + B(t)\cdot K_i' + C(t)\cdot K_i = 0, \tag{5}
$$

$$
K_i^{(j)}(s,s,\varepsilon) = \begin{cases} 1, & j = i-1, \\ 0, & j \ne i-1. \end{cases}, \qquad i=1,2,3, \quad j=0,1,2 \tag{6}
$$

назовем начальными функциями.

Теорема 2. Если справедливы условия I и II, то решение задачи (5), (6) на [0,1] существует, единственно и выражается формулой:

$$
K_i(t,s,\varepsilon) = \frac{W_i(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \quad i=1,2,3, \tag{7}
$$

где $W(s,\varepsilon)$ - вронскиан, составленный из фундаментальной системы решений $y_1(s,\varepsilon)$, $y_2(s,\varepsilon)$, $y_3(s,\varepsilon)$ уравнения (3), а $W_i(t,s,\varepsilon)$ - определитель, полученный из $W(s,\varepsilon)$ заменой его i-ой строки на $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$.

Теорема 3. Пусть справедливы условия I и II. Тогда для начальных функций $K_i(t,s,\varepsilon)$ при $0 \le s \le t \le 1$ справедливы следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
&\left|K_i^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C, \qquad i=1,2, \quad j=0,1,2,\\
&\left|K_3^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\cdot\varepsilon, \quad j=0,1, \qquad \left|K_3^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\cdot\left(\varepsilon + e^{-\gamma\cdot\frac{t-s}{\varepsilon}}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Функции $\Phi_i(t,\varepsilon$, $i=1,2,3$, являющиеся, при $0 \le t \le 1$, решением однородного дифференциального уравнения

$$
\varepsilon\cdot\Phi_i''' + A(t)\cdot\Phi_i'' + B(t)\cdot\Phi_i' + C(t)\cdot\Phi_i, \quad i=1,2,3 \tag{9}
$$

с краевыми условиями

$$
H_i\Phi_j(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, & j=i, \\ 0, & j\ne i \end{cases}, \qquad i=1,2,3, \quad j=0,1,2 \tag{10}
$$

назовем граничными функциями.

Теорема 4. Если справедливы условия I, II и V, то решение задачи (9), (10) на [0,1] существует, единственно и выражается формулой:

$$
\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad i=1,2,3 \tag{11}
$$

где $\Delta(\varepsilon)$ - определитель из условия V, а $\Delta_i(t,\varepsilon)$ - определитель, полученный из $\Delta\varepsilon)$ заменой его i-ой строки на фундаментальную систему решений $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$.

Теорема 5. Пусть функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ удовлетворяют условиям I, II и V. Тогда для граничных функций $\Phi_i(t,\varepsilon)$ при $0 \le t \le 1$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left|\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{1}{\varepsilon^j} C \cdot e^{-y\cdot\frac{t}{\varepsilon}}, \qquad j = 0,1,2, \\ &\left|\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{C}{\varepsilon^j}\left(\varepsilon^j + e^{-y\cdot\frac{t}{\varepsilon}}\right), \quad i = 2,3, \quad j = 0,1,2. \end{aligned} \tag{12}$$

Введем обозначение:

$$z(t,\varepsilon) = F(t) + \int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)\big)\, dx. \tag{13}$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \cdot y''' + A(t)\cdot y'' + B(t)\cdot y' + C(t)\cdot y = z(t,\varepsilon). \tag{14}$$

Решение задачи (14), (2) будем искать в виде:

$$y(t,\varepsilon) = C_1\Phi_1(t,\varepsilon) + C_2\Phi_2(t,\varepsilon) + C_3\Phi_3(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_3(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds. \tag{15}$$

Очевидно, что формула (15) удовлетворяет уравнению (14). Подставляя (15) в (13) и применяя формулу Дирихле, получим:

$$\begin{aligned} z(t,\varepsilon) = F(t) &+ C_1\int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)\Phi_1(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Phi_1'(x,\varepsilon)\big)\, dx + \\ &+ C_2\int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)\Phi_2(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Phi_2'(x,\varepsilon)\big)\, dx + \\ &+ C_3\int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)\Phi_3(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Phi_3'(x,\varepsilon)\big)\, dx + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1\int\limits_s^1 z(s,\varepsilon)\big(H_0(t,x)K_3(x,s,\varepsilon) + H_1(t,x)K_3'(x,s,\varepsilon)\big)\, dxds. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\varphi_i(t,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)\Phi_i(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Phi_i'(x,\varepsilon)\big)\, dx; \tag{16}$$

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1 \big(H_0(t,x)K_3(x,s,\varepsilon) + H_1(t,x)K_3'(x,s,\varepsilon)\big)\, dx. \tag{17}$$

Отсюда

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+C_1\varphi_1(t,\varepsilon)+C_2\varphi_2(t,\varepsilon)+C_3\varphi_3(t,\varepsilon)+\int\limits_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds. \qquad (18)$$

Таким образом, получили неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $H(t,s,\varepsilon)$. Так как ядро $H(t,s,\varepsilon)$ в области $0\le t\le 1$, $0\le x\le 1$ и $F(t)$, $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2$ непрерывны по совокупности переменных и число 1 не является собственным значением ядра $H(t,s,\varepsilon)$, то интегральное уравнение на отрезке $0\le t\le 1$ имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} z(t,\varepsilon)= \ & F(t)+C_1\varphi_1(t,\varepsilon)+C_2\varphi_2(t,\varepsilon)+C_3\varphi_3(t,\varepsilon)+\\ & +\int\limits_0^1 R(t,s,\varepsilon)\left[F(s)+C_1\varphi_1(s,\varepsilon)+C_2\varphi_2(s,\varepsilon)+C_3\varphi_3(s,\varepsilon)\right]ds, \end{aligned} \qquad (19)$$

где $R(t,s,\varepsilon)$ - резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$.

Подставляя (19) в (15), получим следующее представление для $y(t,\varepsilon)$:

$$y(t,\varepsilon)=C_1\Phi_1(t,\varepsilon)+C_2\Phi_2(t,\varepsilon)+C_3\Phi_3(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_3(t,s,\varepsilon)\left\{F(s)+C_1\varphi_1(s,\varepsilon)+\right.$$

$$+C_2\varphi_2(s,\varepsilon)+C_3\varphi_3(s,\varepsilon)+\int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)\left[F(p)+C_1\varphi_1(p,\varepsilon)+C_2\varphi_2(p,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.\left.+C_3\varphi_3(p,\varepsilon)\right]dp\right\}ds$$

или

$$y(t,\varepsilon)=C_1Q_1(t,\varepsilon)+C_2Q_2(t,\varepsilon)+C_3Q_3(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \qquad (20)$$

где функции $Q_i(t,\varepsilon)$ являются решением однородного интегро-дифференциального уравнения, а $P(t,\varepsilon)$ - решение неоднородного интегро-дифференциального уравнения, и выражаются формулами:

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_3(t,s,\varepsilon)\left[\varphi_i(s,\varepsilon)+\int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)\varphi_i(p,\varepsilon)dp\right]ds,\quad i=1,2,3; \qquad (21)$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_3(t,s,\varepsilon)\left[F(s)+\int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)F(p)dp\right]ds. \qquad (22)$$

Подставляя (20) в краевые условия (2), получаем относительно следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$y(0,\varepsilon)=C_1Q_1(0,\varepsilon)+C_2Q_2(0,\varepsilon)+C_3Q_3(0,\varepsilon)+P(0,\varepsilon)=\alpha,$$

$$y(t_0,\varepsilon)=C_1Q_1(t_0,\varepsilon)+C_2Q_2(t_0,\varepsilon)+C_3Q_3(t_0,\varepsilon)+P(t_0,\varepsilon)=\beta,$$

$$y(1,\varepsilon)=C_1Q_1(1,\varepsilon)+C_2Q_2(1,\varepsilon)+C_3Q_3(1,\varepsilon)+P(1,\varepsilon)=\gamma.$$

Так как по условию V определитель $\omega(\varepsilon) \neq 0$, то из данной системы однозначно определяются коэффициенты C_1, C_2, C_3. Подставляя их в формулу (20), для решения $y(t,\varepsilon)$ получим:

$$y(t,\varepsilon) = \frac{1}{\omega(\varepsilon)} \begin{vmatrix} \alpha - P(0,\varepsilon) & Q_2(0,\varepsilon) & Q_3(0,\varepsilon) \\ \beta - P(t_0,\varepsilon) & Q_2(t_0,\varepsilon) & Q_3(t_0,\varepsilon) \\ \gamma - P(1,\varepsilon) & Q_2(1,\varepsilon) & Q_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot Q_1(t,\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\omega(\varepsilon)} \begin{vmatrix} Q_1(0,\varepsilon) & \alpha - P(0,\varepsilon) & Q_3(0,\varepsilon) \\ Q_1(t_0,\varepsilon) & \beta - P(t_0,\varepsilon) & Q_3(t_0,\varepsilon) \\ Q_1(1,\varepsilon) & \gamma - P(1,\varepsilon) & Q_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot Q_2(t,\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\omega(\varepsilon)} \begin{vmatrix} Q_1(0,\varepsilon) & Q_2(0,\varepsilon) & \alpha - P(0,\varepsilon) \\ Q_1(t_0,\varepsilon) & Q_2(t_0,\varepsilon) & \beta - P(t_0,\varepsilon) \\ Q_1(1,\varepsilon) & Q_2(1,\varepsilon) & \gamma - P(1,\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot Q_3(t,\varepsilon).$$

Отсюда, для решения задачи (1), (2) окончательно получаем следующую формулу:

$$y(t,\varepsilon) = (\alpha - P(0,\varepsilon))\,\Psi_1(t,\varepsilon) + (\beta - P(t_0,\varepsilon))\,\Psi_2(t,\varepsilon) + (\gamma - P(1,\varepsilon))\,\Psi_3(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \quad (23)$$

где функции $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ выражаются формулой

$$\Psi_i(t,\varepsilon) = \frac{\omega_i(t,\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \quad i = 1,2,3. \quad (24)$$

Здесь $\omega(\varepsilon) \neq 0$ из условия V, $\omega_i(t,\varepsilon)$ - определитель, полученный из $\omega(\varepsilon)$ заменой его i-той строки строкой $Q_1(t,\varepsilon)$, $Q_2(t,\varepsilon)$, $Q_3(t,\varepsilon)$, а $P(t,\varepsilon)$ определяется формулой (22).

Заметим, что $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются решениями однородного сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения

$$L_\varepsilon \Psi = \int\limits_s^1 \big(H_0(t,x)\Psi_i(x,\varepsilon) + H_1(t,x)\Psi_i'(x,\varepsilon)\big)\,dx, \quad i = 1,2,3. \quad (25)$$

с краевыми условиями

$$H_i\Psi_j(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad i = 1,2,3, \quad j = 0,1,2. \quad (26)$$

Тем самым, доказана следующая

Теорема 6. Если справедливы условия I - V, то решение краевой задачи (1), (2) на отрезке [0,1] существует, единственно и представимо в виде (23), где $\Psi_i(t,\varepsilon)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ выражаются формулой (24), а $P(t,\varepsilon)$ определяется формулой (22).

Список литературы

[1] *Атанбаев Н.С.* Об одной трехточечной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром. // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2000. №1(20). – С. 43-47.

[2] *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Санат, 1997. – 195 с.