Двухсолитонное решение одного нелинейного уравнения

Ж.Х. Жунусова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: zhzhkh@mail.ru

Аннотация

Рассмотрено интегрируемое нелинейное дифференциальное уравнение Янга-Миллса-Хиггса в искривленном пространстве-времени. С помощью метода преобразования Дарбу второй степени найдено двухсолитонное решение данного уравнения. Для этого использовано ранее полученное с помощью метода преобразования Дарбу первой степени односолитонное решение. Отмечено, что односолитонное решение удовлетворяет преставлению Лакса вышеназванного дифференциального уравнения в частных производных. Для найденного решения вычислен след поля Хиггса.

Построение n-солитонных решений в случае искривленного пространства-времени является актуальной проблемой, так как эти решения многомерных уравнении имеют физическое приложение, позволяют построить геометрическую интерпретацию и изучить динамику солитона [1]-[3]. Найдем двухсолитонное решение уравнения Янга-Миллса-Хиггса с помощью метода преобразования Дарбу второй степени. Двухсолитонное решение $(\Phi^{(2)}, A_u^{(2)}, A_v^{(2)}, A_r^{(2)})$ находим композицией преобразования Дарбу первой степени, т.е. используем односолитонное решение $(\Phi^{(1)}, A_u^{(1)}, A_v^{(1)}, A_r^{(1)})$ [4].

Пусть M - трехмерное многообразие Лоренца с метрикой $\tilde{g}$, A_μ - калибровочный потенциал, Φ - скалярное поле Хиггса, последние из которых принимают значения в алгебре Ли группы G. Положим, что G является матричной группой Ли. Обозначим область Ω :{(2+1)-мерное пространство-времени анти де Ситтера, являющегося универсальным пространством вложения гиперболоида $U^2+V^2-X^2-Y^2=1$ в $R^{2,2}$ с метрикой $ds^2=-dU^2-dV^2+dX^2+dY^2$}. Определим новые координаты с помощью формул

$$r=\frac{1}{U+X}, \quad x=\frac{Y}{U+X}, \quad t=-\frac{V}{U+X}, \tag{1}$$

тогда часть (2+1) - мерного пространства-времени анти де Ситтера с $U+X>0$ представляется координатами Пуанкаре (r,x,t) с $r>0$ и метрика в этом случае есть

$$ds^2=r^{-2}(-dt^2+dr^2+dx^2)=r^{-2}(dr^2+dudv), \tag{2}$$

где $u=x+t, \quad v=x-t$. Поля уравнения Янга-Миллса-Хиггса в области Ω удовлетворяют уравнению Янга-Миллса-Хиггса [5]

$$D\Phi=*F, \tag{3}$$

которое в терминах координат запишется в виде

$$D_\mu\Phi=\frac{1}{2\sqrt{|\tilde{g}|}}\tilde{g}_{\mu\nu}\epsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где

$$D_\mu\Phi=\partial_\mu\Phi+[A_\mu,\Phi], \quad [A_\mu,\Phi]=A_\mu\Phi-\Phi A_\mu, \quad \partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \{F_{\mu\nu}\}, F_{\mu\nu}=[D_\mu,D_\nu]. \tag{5}$$

является кривизной, соответствующей $\{A_\mu\}$.

Уравнение (4) является интегрируемой системой (в смысле существования для него представления Лакса), если метрика $\tilde{g}$ имеет постоянную кривизну [5]. В нашем случае кривизна является отрицательной. С помощью координат Пуанкаре (1) уравнение (4) примет вид

$$D_u\Phi = rF_{ur}, \quad D_v\Phi = -rF_{vr}, \quad D_r\Phi = -2rF_{uv}. \tag{6}$$

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений имеет представление Лакса [5]

$$(rD_r + \Phi - 2(\xi - u)D_u)\psi = 0, \quad (2D_v + \frac{\xi - u}{r}D_r - \frac{\xi - u}{r^2}\Phi)\psi = 0, \tag{7}$$

где

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + A_\mu\psi \tag{8}$$

и ξ является комплексным спектральным параметром. Таким образом, (7) является условием интегрируемости выше определенной системы (6). Приведем следующую теорему [4].

Т е о р е м а 1. *Уравнение (6) имеет односолитонное решение в области Ω следующего вида*

$$A_u^{(1)} = 0, \quad A_v^{(1)} = -(\partial_v S)S^{-1} = \frac{1}{2r}(\partial_r S) - \frac{1}{2r^2}[\kappa\sigma_3, S], \tag{9a}$$

$$A_r^{(1)} = -\frac{1}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2r}(S\sigma_3 S^{-1} - \sigma_3) = -\frac{1}{2r}(\partial_u S + I), \tag{9b}$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{r}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2}(S\sigma_3 S^{-1} + \sigma_3) = -\partial_u S - I + \kappa\sigma_3, \tag{9c}$$

где

$$S = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{1 + |\sigma|^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\sigma} \\ \sigma & |\sigma|^2 \end{pmatrix} + \bar{\xi}_0 - u, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$\sigma = \sigma(\tau)$ - произвольная голоморфная функция, ξ_0 - произвольное комплексное число, $\xi \neq 0$, κ - произвольное действительное число, $\kappa \neq 0$, u - скалярная функция. При $\kappa = 0$, решение $(A_u^{(1)}, A_v^{(1)}, A_r^{(1)}, \Phi^{(1)} \in SU(2)$.

Это решение является локализованным решением при $\xi_0 = i$, $\tau = \omega(\xi_0), \sigma(\tau) = \tau$, а след поля Хиггса дается следующей формулой

$$-tr(\Phi^{(1)})^2 = \frac{8r^4 + 32\kappa(x+t)(x^2 - t^2)r^2 + 16\kappa r^4(x+t)}{((r^2 + x^2 - t^2)^2 + 2x^2 + 2t^2 + 1)^2} - 2\kappa^2 \tag{11}$$

Приведем $(A_u^{(1)}, A_v^{(1)}, A_r^{(1)}, \Phi^{(1)})$ удовлетворяющие представлению Лакса (7) [4].

$$A_u^{(1)} = RA_uR^{-1} - (\partial_u R)R^{-1}. \tag{12}$$

$$A_v^{(1)} = TA_vT^{-1} - (\partial_v T)T^{-1}. \tag{13}$$

$$A_r^{(1)} = \frac{1}{2}(TA_r - \partial_r T)T^{-1} + \frac{1}{2}(RA_r - \partial_r R)R^{-1} + \frac{1}{2r}(T\Phi T^{-1} - R\Phi R^{-1}). \tag{14}$$

$$\Phi^{(1)} = \frac{r}{2}(TA_r - \partial_r T)T^{-1} - \frac{r}{2}(RA_r - \partial_r R)R^{-1} + \frac{1}{2}(T\Phi T^{-1} + R\Phi R^{-1}). \tag{15}$$

Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_0 \end{pmatrix}, \tau = \omega(\xi_0), H = \begin{pmatrix} \alpha(\tau) & -\overline{\beta(\tau)} \\ \beta(\tau) & \overline{\alpha(\tau)} \end{pmatrix}, \sigma(\tau) = \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}, \tag{16}$$

Пусть Z будет 2×2 - матричной функцией (u,v,r), H будет решением представления Лакса (7). Тогда справедливы формулы

$$\partial_r S = H(\partial_r Z - \frac{2}{r}(\partial_u Z)(Z-u))H^{-1} + \frac{2}{r}S + \frac{2}{r}(\partial_u S)S - [A_r, S] + \frac{2}{r}[A_u, S]S - \frac{1}{r}[\Phi, S], \quad (17)$$

$$\partial_v S = H(Z_v + \frac{1}{2r}Z_r(Z-u))H^{-1} - \frac{1}{2r}S_r S - [A_v, S] - \frac{1}{2r}[A_r, S]S + \frac{1}{2r^2}[\Phi, S]S. \quad (18)$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Уравнение (6) имеет двухсолитонное решение в области* Ω *следующего вида*

$$A_u^{(2)} = 0, \quad A_v^{(2)} = \frac{2}{r^2}(\partial_u S + 1)S + \frac{1}{r^2}[\partial_u S, S] + \frac{2}{r^2}[S, \kappa\sigma_3], \quad (19a)$$

$$A_r^{(2)} = -\frac{2}{r}(\partial_u S + 1), \quad \Phi^{(2)} = 2(\partial_u S + 1) + \kappa\sigma_3, \quad (19b)$$

где

$$S = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{1+|\sigma|^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\sigma} \\ \sigma & |\sigma|^2 \end{pmatrix} + \bar{\xi}_0 - u, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\sigma = \sigma(\tau)$ *- произвольная голоморфная функция,* ξ_0 *- произвольное комплексное число,* $\xi \neq 0$, κ *- произвольное действительное число,* $\kappa \neq 0$, u *- скалярная функция.*

Это решение является локализованным решением при $\xi_0 = i$, $\tau = \omega(\xi_0), \sigma(\tau) = \tau$, *а след поля Хиггса дается следующей формулой*

$$-tr(\Phi^{(2)})^2 = \frac{32r^4 + 64\kappa(x+t)(x^2-t^2)r^2 + 32\kappa r^4(x+t)}{((r^2+x^2-t^2)^2 + 2x^2 + 2t^2 + 1)^2} + 2\kappa^2 \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Перепишем (12)-(15) в виде

$$A_u^{(1)} = 0, \quad A_v^{(1)} = \frac{1}{r^2}(\partial_u S + I)S - \frac{1}{r^2}[\kappa\sigma_3, S], \quad (21a)$$

$$A_r^{(1)} = -\frac{1}{r}(\partial_u S + I), \Phi^{(1)} = -(\partial_u S + I) + \kappa\sigma_3, \quad (21b)$$

и возьмем

$$R_1 = I, \quad T_1 = S. \quad (22)$$

Запишем (12) для двухсолитонного решения

$$A_u^{(2)} = R_1 A_u^{(1)} R_1^{-1} - (\partial_u R_1)R_1^{-1}. \quad (23)$$

Подставляя (21), (22) получим

$$A_u^{(2)} = 0. \quad (24)$$

Запишем (13) для двухсолитонного решения

$$A_v^{(2)} = T_1 A_v^{(1)} T_1^{-1} - (\partial_v T_1)T_1^{-1}. \quad (25)$$

Подставляя (21), (22) в (25) получим

$$A_v^{(2)} = S\{\frac{1}{r^2}S + \frac{1}{r^2}(\partial_u S)S - \frac{1}{r^2}[\kappa\sigma_3, S]\}S^{-1} - (\partial_v S)S^{-1} =$$

$$= S\frac{1}{r^2}SS^{-1} + \frac{1}{r^2}S(\partial_u S)SS^{-1} - \frac{1}{r^2}S[\kappa\sigma_3, S]S^{-1} - (\partial_v S)S^{-1} =$$

$$= \frac{1}{r^2}S + \frac{1}{r^2}S(\partial_u S) - \frac{1}{r^2}S\kappa\sigma_3 SS^{-1} + \frac{1}{r^2}SS\kappa\sigma_3 S^{-1} - (\partial_v S)S^{-1}.$$

Итак,

$$A_v^{(2)} = \frac{1}{r^2}S + \frac{1}{r^2}S(\partial_u S) - \frac{1}{r^2}S\kappa\sigma_3 + \frac{1}{r^2}S^2\kappa\sigma_3 S^{-1} - (\partial_v S)S^{-1}. \tag{26}$$

Запишем (14) для двухсолитонного решения

$$A_r^{(2)} = \frac{1}{2}(T_1 A_r^{(1)} - \partial_r T_1)T_1^{-1} + \frac{1}{2}(R_1 A_r^{(1)} - \partial_r R_1)R_1^{-1} + \frac{1}{2r}(T_1\Phi^{(1)}T_1^{-1} - R_1\Phi^{(1)}R^{-1}). \tag{27}$$

Подставляя (21), (22) имеем

$$A_r^{(2)} = \frac{1}{2}\{S(-\frac{1}{r}(\partial_u S + I)) - \partial_r S\}S^{-1} + \frac{1}{2}\{-\frac{1}{r}(\partial_u S + I)\} +$$

$$+\frac{1}{2r}\{S(-\partial_u S - I + \kappa\sigma_3)S^{-1} - (-\partial_u S - I + \kappa\sigma_3)\} =$$

$$= -\frac{1}{2}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{r} - \frac{1}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2r}S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \frac{1}{2r}\kappa\sigma_3.$$

Итак,

$$A_r^{(2)} = -\frac{1}{r}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{r} - \frac{1}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2r}S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \frac{1}{2r}\kappa\sigma_3. \tag{28}$$

Запишем (15) для двухсолитонного решения

$$\Phi^{(2)} = \frac{r}{2}(T_1 A_r^{(1)} - \partial_r T_1)T_1^{-1} - \frac{r}{2}(R_1 A_1^{(1)} - \partial_r R_1)R_1^{-1} + \frac{1}{2}(T_1\Phi^{(1)}T_1^{-1} + R_1\Phi^{(1)}R_1^{-1}). \tag{29}$$

Подставляя (21) имеем

$$\Phi^{(2)} = \frac{r}{2}\{S(-\frac{1}{r}(\partial_u S + 1)) - \partial_r S\}S^{-1} - \frac{r}{2}\{-\frac{1}{r}(\partial_u S + 1)\} +$$

$$+\frac{1}{2}\{S(-\partial_u S - 1 + \kappa\sigma_3)S^{-1} + (-\partial_u S - 1 + \kappa\sigma_3)\} =$$

$$= \frac{r}{2}\{-\frac{1}{r}S(\partial_u S) - \frac{1}{r}S - \partial_r S\}S^{-1} + \frac{1}{2}\partial_u S + \frac{1}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\{-S(\partial_u S)S^{-1} - SS^{-1} + S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \partial_u S - 1 + \kappa\sigma_3\} =$$

$$= -\frac{1}{2}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{r}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2}\partial_u S + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \frac{1}{2}\partial_u S - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa\sigma_3.$$

Итак,

$$\Phi^{(2)} = -S(\partial_u S)S^{-1} - 1 - \frac{r}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2}S\kappa\sigma_3 S^{-1} + \frac{1}{2}\kappa\sigma_3. \tag{30}$$

Используем (16), тогда выражения (17), (18) примут вид

$$\partial_r S = \frac{2}{r}S + \frac{2}{r}(\partial_u S)S - [A_r^{(1)}, S] - \frac{1}{r}[\Phi^{(1)}, S], \tag{31a}$$

$$\partial_v S = -\frac{1}{2r}(\partial_r S)S - [A_v^{(1)}, S] - \frac{1}{2r}[A_r^{(1)}, S]S + \frac{1}{2r^2}[\Phi^{(1)}, S]S, \tag{31b}$$

Подставив (31b) в (26) получим

$$A_v^{(2)} = \frac{1}{r^2}S + \frac{1}{r^2}S(\partial_u S) - \frac{1}{r^2}S\kappa\sigma_3 + \frac{1}{r^2}S^2\kappa\sigma_3 S^{-1} - \{-\frac{1}{2r}(\partial_r S)S-$$

$$-[A_v^{(1)}, S] - \frac{1}{2r}[A_r^{(1)}, S]S + \frac{1}{2r^2}[\Phi^{(1)}, S]S\}S^{-1} =$$

$$= (\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2})S + (\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2})S(\partial_u S)+$$

$$+(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2})S\kappa\sigma_3 + (\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2})(\partial_u S)S - \frac{2}{r^2}\kappa\sigma_3 S.$$

$$A_v^{(2)} = \frac{2}{r^2}S - \frac{1}{r^2}S(\partial_u S) + \frac{2}{r^2}S\kappa\sigma_3 + \frac{3}{r^2}(\partial_u S)S - \frac{2}{r^2}\kappa\sigma_3 S.$$

Итак,

$$A_v^{(2)} = \frac{2}{r^2}(\partial_u S + 1)S + \frac{1}{r^2}[\partial_u S, S] + \frac{2}{r^2}[S, \kappa\sigma_3]. \tag{32}$$

Используя (31) преобразуем (28)

$$A_r^{(2)} = -\frac{1}{r}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\{\frac{2}{r}S + \frac{2}{r}(\partial_u S)S - [A_r^{(1)}, S] - \frac{1}{r}[\Phi^{(1)}, S]\}S^{-1}+$$

$$+\frac{1}{2r}S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \frac{1}{2r}\kappa\sigma_3 = -\frac{1}{r}S(\partial_u S)S^{-1} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r}SS^{-1} - \frac{1}{r}(\partial_u S)SS^{-1}+$$

$$+\frac{1}{2}[A_r^{(1)}, S]S^{-1} + \frac{1}{2r}[\Phi^{(1)}, S]S^{-1} + \frac{1}{2r}S\kappa\sigma_3 S^{-1} - \frac{1}{2r}\kappa\sigma_3 =$$

$$= -\frac{2}{r} - \frac{2}{r}(\partial_u S) - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = -\frac{2}{r} - \frac{2}{r}(\partial_u S).$$

Итак,

$$A_r^{(2)} = -\frac{2}{r}(\partial_u S + 1). \tag{33}$$

Используя (31) преобразуем (30),

$$\Phi^{(2)} = -S(\partial_u S)S^{-1} - I - \frac{1}{2}\{\frac{2}{r}S + \frac{2}{r}(\partial_u S)S - [A_r^{(1)}, S] - \frac{1}{r}[\Phi^{(1)}, S]\}S^{-1} + \frac{1}{2}S\kappa\sigma_3 S^{-1} + \frac{1}{2}\kappa\sigma_3 =$$

$$= -S(\partial_u S)S^{-1} - I - I - (\partial_u S) + \frac{r}{2}[A_r^{(1)}, S]S^{-1} + \frac{1}{2}[\Phi^{(1)}, S]S^{-1} + \frac{1}{2}S\kappa\sigma_3 S^{-1} + \frac{1}{2}\kappa\sigma_3 =$$

$$= -S(\partial_u S)S^{-1} - 2I - \partial_u S + \frac{r}{2}A_r^{(1)} - \frac{r}{2}SA_r^{(1)}S^{-1} + \frac{1}{2}\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}S\Phi^{(1)}S^{-1} + \frac{1}{2}S\kappa\sigma_3 S^{-1} + \frac{1}{2}\kappa\sigma_3 =$$

$$= -2(\partial_u S + 1) + \kappa\sigma_3.$$

Итак,

$$\Phi^{(2)} = -2(\partial_u S) - 2 + \kappa\sigma_3 \tag{34}$$

или

$$\Phi^{(2)} = \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi_0})}{(1 + |\sigma|^2)^2}\begin{pmatrix} (|\sigma|^2)_u & \bar{\sigma}^2\sigma_u - \bar{\sigma}_u \\ \sigma^2\bar{\sigma}_u - \sigma_u & -(|\sigma|^2)_u \end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Отсюда

$$(\Phi^{(2)})^2 = \begin{pmatrix} \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u + \kappa & \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(\bar{\sigma}^2\sigma_u - \bar{\sigma}_u) \\ \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(\sigma^2\bar{\sigma}_u - \sigma_u) & -[\frac{2(\xi_0 - \bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u + \kappa] \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+\kappa & \frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(\bar{\sigma}^2\sigma_u-\bar{\sigma}_u) \\ \frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(\sigma^2\bar{\sigma}_u-\sigma_u) & -[\frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+\kappa] \end{pmatrix} =$$

$$= \{[\frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+\kappa]^2 + \frac{4(\xi_0-\bar{\xi_0})^2}{(1+|\sigma|^2)^4}(\bar{\sigma}^2\sigma_u-\bar{\sigma}_u)(\sigma^2\bar{\sigma}_u-\sigma_u)\}I. \quad (36)$$

$$tr(\Phi^{(2)})^2 = [\frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+\kappa]^2 + \frac{4(\xi_0-\bar{\xi_0})^2}{(1+|\sigma|^2)^4}(\bar{\sigma}^2\sigma_u-\bar{\sigma}_u)(\sigma^2\bar{\sigma}_u-\sigma_u)+$$

$$+[\frac{2(\xi_0-\bar{\xi_0})}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+\kappa]^2 + \frac{4(\xi_0-\bar{\xi_0})^2}{(1+|\sigma|^2)^4}(\bar{\sigma}^2\sigma_u-\bar{\sigma}_u)(\sigma^2\bar{\sigma}_u-\sigma_u) =$$

$$= \frac{8(\xi_0-\bar{\xi_0})^2}{(1+|\sigma|^2)^4}\{(|\sigma|^2)_u^2+(\sigma^2\bar{\sigma}_u-\sigma_u)(\bar{\sigma}^2\sigma_u-\bar{\sigma}_u)\} + \frac{8(\xi_0-\bar{\xi_0})\kappa}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+2\kappa^2 =$$

$$= \frac{8(\xi_0-\bar{\xi_0})^2\kappa}{(1+|\sigma|^2)^4}\sigma\bar{\sigma}_u(1+|\sigma|^2)^2 + \frac{8(\xi_0-\bar{\xi_0})\kappa}{(1+|\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u+2\kappa^2. \quad (37)$$

После некоторых преобразований имеем

$$tr(\Phi^{(2)})^2 = -\frac{32r^4}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2} + \frac{32i(i\kappa)u(2uvr^2+r^4)}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2} + 2(i\kappa)^2 =$$

$$= -\frac{32r^4}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2} - \frac{32\kappa u(2uvr^2+r^4)}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2} - 2\kappa^2 =$$

$$= -\frac{32(r^4+\kappa u(2uvr^2+r^4))}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2} - 2\kappa^2. \quad (38)$$

Учтем, что $\kappa u(2uvr^2+r^4) = \kappa(x+t)(2(x^2-t^2)r^2+r^4) = 2\kappa(x+t)(x^2-t^2)r^2+\kappa r^4(x+t)$, тогда

$$tr(\Phi^{(2)})^2 = -\frac{32(r^4+2\kappa(x+t)(x^2-t^2)r^2+\kappa r^4(x+t))}{((r^2+x^2-t^2)^2+2x^2+2t^2+1)^2} - 2\kappa^2. \quad (39)$$

Итак,

$$-tr(\Phi^{(2)})^2 = \frac{32(r^4+2\kappa(x+t)(x^2-t^2)r^2+\kappa r^4(x+t))}{((r^2+x^2-t^2)^2+2x^2+2t^2+1)^2} + 2\kappa^2. \quad (40)$$

Теорема 2 доказана полностью.

Список литературы

[1] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* -М.: Наука, 1986. -527 с.

[2] Мырзакулов Р. *Спиновые системы и солитонная геометрия.* - Алматы.: Print-S, 2001. - 351 с.

[3] Блиев Н.К., Мырзакулов Р., Жунусова Ж.Х. *О солитонной геометрии (2+1)-измерений.* // Вестник НАН РК. -2000. N2. -С. 21-29.

[4] Жунусова Ж.Х. *Односолитонное решение уравнения Янга-Миллса-Хиггса.* // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. -2009. N4(63). -С. 4-8.

[5] Ward R S, Asian J. Math. **3**, 325. (1999).

[6] Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* -М.: Мир. 1997. -414 с.