Задача Коши для модели реагирующей смеси газов в пористой среде

Ж.А. Искендерова, А.М. Токторбаев
КНУ им.Ж.Баласагына, Ошский государственный университет,
Бишкек, Ош, Кыргызстан
e-mail: ain7@list.ru

Аннотация

Исследуется задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов в пористой среде. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют разные пределы на бесконечности. Доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

1. Постановка задачи и основной результат. Исследуется система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad v=\frac{1}{p}, \quad \frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\chi}{v}\frac{\partial c}{\partial x})-cg,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\mu}{v}\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial x}(r\frac{\theta}{v}), \tag{1}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\lambda_1(\theta)}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\lambda_2(\theta)}{v}\theta\frac{\partial c}{\partial x})-r\frac{\theta}{v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{v}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\delta cg.$$

Рассмотрим движение смеси в полосе: $\Pi=\{(x,t) : x\in R, 0<t<T\}$, $R=(-\infty,\infty)$ Начальные условия записываются в виде:

$$u|_{t=0}=u_0(x), \theta|_{t=0}=\theta_0(x), c|_{t=0}=c_0(x), v|_{t=0}=v_0(x), \tag{2}$$

$0<c_0(x)\le 1, 0<m_0\le (v_0(x),\theta_0(x))\le M_0<\infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty}u_0(x)=u_0^1, \lim_{x\to+\infty}u_0(x)=u_0^2, u_0^1<u_0^2,$$
$$\lim_{x\to-\infty}v_0(x)=v_0^1, \lim_{x\to+\infty}v_0(x)=v_0^2, v_0^1\ne v_0^2, \tag{3}$$
$$\lim_{x\to-\infty}c_0(x)=c_0^1, \lim_{x\to+\infty}c_0(x)=c_0^2, c_0^1\ne c_0^2,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\theta_0(x)=\theta_0^1, \lim_{x\to+\infty}\theta_0(x)=\theta_0^2, \theta_0^1\ne \theta_0^2.$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x)$, $f(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$0<C_1^{-1}<\psi(x)<C_1, \lim_{|x|\to\infty}v_0(x)\psi(x)=1, \psi'(x)\in W_2^1(R),$$
$$|f(x)|<C_2<\infty, \lim_{x\to-\infty}f(x)=u_0^1, \lim_{x\to+\infty}f(x)=u_0^2,$$
$$0<f'(x)\le C_3, f'(x)\in W_2^1(R), f'(x)\in L_1(R), \tag{4}$$
$$0<C_4^{-1}<\varphi(x)<C_4, \lim_{|x|\to\infty}\theta_0(x)\varphi(x)=1, \varphi'(x)\in W_2^1(R),$$
$$1\le\gamma(x)<C_5<\infty, \lim_{|x|\to\infty}c_0(x)\gamma(x)=1, \gamma'(x)\in W_2^1(R).$$

$$(\varphi'(x))^2 < \eta f'(x), 0 < \eta < 1. \tag{5}$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\lambda_1(\theta) = \alpha\theta$, $\lambda_2(\theta) = \beta\theta^{1/2}$, α, $\beta = const > 0$, *начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и* $(u_0 - f, v_0\psi - 1, \theta_0\varphi - 1, c_0\gamma - 1) \in W_1^2(R)$. *Функция* $g(p,c,\theta)$ *является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по* $(\varphi\theta)^{1/2}$, *кроме того, удовлетворяет условию Липшица и* $g(p,c,1) = 0$. *Тогда в полосе* $\Pi = R \times (0,T)$ *с произвольной конечной высотой* $T, 0 < T < \infty$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), причем*

$$(v\psi - 1) \in L_\infty(0,T; W_1^2(R)), (\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t},) \in L_2(\Pi),$$

$$(u - f, \theta\varphi - 1, c\gamma - 1) \in L_\infty(0,T; W_1^2(R)) \cap L_2(0,T; W_2^2(R)),$$

$0 < c(x,t) \leq 1$, $v(x,t)$, $\theta(x,t)$ - *строгоположительные, ограниченныефункции.*

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме: а) выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C, C_i, N_i, K_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения; б) доказывается локальная теорема существования аналогично [2, 3, 4]; в) на основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$. Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в лагранжевых координатах. Введение их описано в [2].

Следуя [2, 3], разобьем числовую ось и соответственно полосу на конечные отрезки и прямоугольники:

2. Априорные оценки. Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x,t)$, $\theta(x,t)$ неотрицательны и $0 < c(x,t) \leq 1$.

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)\gamma(x)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad v = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{1}{\varphi\gamma v}\frac{\partial c}{\partial \xi}) - cg,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{1}{\varphi\gamma v}\frac{\partial c}{\partial \xi}) - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial p}{\partial \xi}, p = \frac{0}{v}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\theta}{\varphi\gamma v}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}) + \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\theta^{3/2}}{\varphi\gamma v}\frac{\partial c}{\partial\xi}) - \frac{1}{\varphi\gamma}p\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{1}{\varphi^2\gamma^2 v}(\frac{\partial u}{\partial \xi})^2 + cg.$$

ЛЕММА 1. *При выполнении условий теоремы справедлива оценка*

$$U(t) + \int_0^t W(\tau)\partial\tau \leq E = const > 0, t \in [0,T] \tag{7}$$

где

$$U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2}(u-f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + (\varphi\theta - ln\varphi\theta - 1) + (v\psi - lnv\psi - 1) \right\} \partial x,$$

$$W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{c_x^2}{v} + \frac{\theta}{v}f' + g\varphi(c\gamma - 1)^2 \right\} \partial x.$$

Доказательство: Умножим первое уравнение системы (6) на $\gamma(\psi-\frac{1}{v})$, второе на $\gamma(c\gamma-1)$, третье на $\varphi\gamma(u-f)$, третье на $\gamma(\varphi-\frac{1}{\theta})$, сложим и проинтегрируем по R:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\{\frac{1}{2}\varphi\gamma(u-f)^2+\frac{1}{2}(c\gamma-1)^2+\gamma(\varphi\theta-ln\varphi\theta-1)+\gamma(v\psi-lnv\psi-1)\}\partial\xi,+$$

$$+\int\left\{\frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma}+\frac{u_\xi^2}{v\theta\varphi\gamma}+\frac{c_\xi^2}{v\varphi^2}+\frac{\theta}{v}f'+g(c\gamma-1)^2\right\}\partial\xi= \tag{8}$$

$$=\int\frac{\psi}{\varphi\gamma}u_\xi\partial\xi+\int\frac{1}{\varphi v\gamma}u_\xi(f+\gamma-1)\partial\xi-\int\frac{\theta_\xi\varphi'}{v\varphi^3\gamma}\partial\xi-\int\frac{c_\xi c\gamma'}{v\varphi^2\gamma}\partial\xi+\int\frac{c_\xi(c\gamma-1)\varphi'}{v\varphi^3\gamma}\partial\xi+$$

$$+\int\frac{c_\xi\theta_\xi}{v\varphi^2\gamma\theta^{1/2}}\partial\xi+\int\frac{\theta^{1/2}c_\xi\varphi'}{v\varphi^3\gamma}\partial\xi-\int g(c\gamma-1)\partial\xi+\int cg\gamma\frac{\varphi\theta-1}{\theta}\partial\xi=\sum_{k=1}^{9}I_k$$

Оценим каждое I_k, используя интегрирование по частям, (4), (5), неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения.

$$I_3\le\delta_1\int\frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma}\partial\xi+C_{\delta1}\int\frac{\delta\theta f'}{v\theta\varphi^4\gamma}\partial\xi\le\delta_1\int\frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma}\partial\xi+C_{\delta1}\eta C_4^4\int\frac{\theta}{v}f'\partial\xi;$$

Заметим, что

$$\frac{|(v\psi)^{1/2}-1|}{(v\psi)^{1/2}\sqrt{v\psi-\ln v\psi-1}}\le C_8,\forall(x,t)\in\Pi.$$

Тогда

$$I_4=\int\frac{c_\xi\gamma'c\psi^{1/2}}{v^{1/2}\varphi^2\gamma}\partial\xi-\int\frac{c_\xi\gamma'c\psi^{1/2}((v\psi)^{1/2}-1)}{v^{1/2}\varphi^2\gamma(v\psi)^{1/2}\sqrt{v\psi-\ln v\psi-1}}\sqrt{v\psi-\ln v\psi-1}\partial\xi\le$$

$$\le\delta_2\int\frac{C_\xi^2}{v\varphi^2}\partial\xi+C_{\delta2}(\int(v\psi-\ln v\psi-1)\partial\xi+1);$$

$$I_5\le\delta_3\int\frac{C_\xi^2}{v\varphi^2}\partial\xi+C_{\delta3}(\int(v\psi-\ln v\psi-1)\partial\xi+\int\frac{1}{2}(c\gamma-1)^2\partial\xi+1);$$

$$I_6=+\int\frac{c_\xi\theta_\xi}{v\varphi^2\gamma\theta^{1/2}}\partial\xi\le\frac{1}{2}\int\frac{\theta_\xi^2}{v\theta\varphi^2\gamma}\partial\xi+\frac{1}{2}\int\frac{c_\xi^2}{v\varphi^2}\partial\xi;$$

$$I_7=\int\frac{\theta^{1/2}c_\xi\varphi'}{v\varphi^3\gamma}\partial\xi\le\delta_4\int\frac{c_\xi^2}{v\varphi^2}\partial\xi+C_{\delta4}\int\frac{\varphi'^2\theta}{v\varphi^4}\partial\xi\le\delta_4\int\frac{c_\xi^2}{v\varphi^2}\partial\xi+C_{\delta4}\eta C_4^4\int\frac{\theta}{v}f'\partial\xi.$$

Остальные интегралы оцениваются аналогично [5]. Здесь $\delta_i>0(i=\overline{1,4})$ - произвольные положительные числа, $\sum\limits_{i=1}^{4}\delta_i<\frac{1}{2}$. Так как в (5) $0<\eta<1$ - произвольное число, выбираем его так, чтобы выполнялись неравенства $\eta<\frac{1}{4C_{\delta1}C_4^4},\eta<\frac{1}{4C_{\delta4}C_4^4}$. Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

3. Вспомогательное соотношение между искомыми функциями. Следуя [2, 3], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{\Omega}_N,\Pi=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\overline{Q}_N,$$

$$\Omega_N = x \mid N < x < N = 1, Q_N = \Omega_N \times (0,T), N = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (7) функции $(v\psi - \ln v\psi - 1), (\varphi\theta - \ln \varphi\varphi - 1)$ неотрицательны при $v > 0, \theta > 0$, то

$$U_N(t) + \int_0^t W_N(\tau)\partial\tau \leq E \tag{9}$$

где интегралы в определении U_N и W_N берутся по Ω_N.

Отсюда, согласно [2], существуют положительные постоянные $n(E)$, $M(E)$, не зависящие от N, такие что

$$\frac{n(E)}{C_1} \leq \int_N^{N+1} v(x,t)\partial x \leq M(E)C_1, \frac{n(E)}{C_4} \leq \int_N^{N+1} \theta(x,t)\partial x \leq M(E)C_4, \forall t \in [0,T]. \tag{10}$$

Из первого и третьего уравнений системы (1) выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_N$.

$$v(x,t) = I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[v_0(x) + \int_0^t \theta(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)\partial\tau], \tag{11}$$

где

$$I(t) = I_N(t) = \frac{v_0(a(t))}{v(a(t),t)} exp\{\int_0^t \theta(a(t),\tau)\partial\tau\},$$

$$B(x,t) = B_N(x,t) = exp\int_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi,t))\partial\xi.$$

Справедливы оценки:

$$0 < K_1^{-1} \leq B(x,t) \leq K_1, 0 < K_2^{-1} \leq I(t) \leq K_2, \forall x \in \overline{\Omega}_N, \forall t \in [0,T] \tag{12}$$

Доказательство следует из оценок (7) и представления (11).

4.Оценки для плотности (удельного объема) и температуры. Пусть $h(x,t)$ - непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t), m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t).$$

ЛЕММА 2. *При выполнении условий теоремы справедливы оценки*

$$m_v(t) \leq N_4, m_\theta(t) \leq N_5, \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Строгая положительность удельного объема следует из представления (11) с учетом условий теоремы и (7), а температуры из уравнения теплопроводности системы (1).

ЛЕММА 3. *При выполнении условий теоремы справедлива оценка*

$$M_v(t) \leq N_6, \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t M_\theta(t)\partial t \leq K_3, \forall t \in [0,T]. \tag{13}$$

Действительно, (13) следует из оценок (7), (9) и соотношения

$$\max_{\overline{\Omega}_N}\theta^{1/2}\le (M(E)C_4)^{1/2}+\int_N^{N+1}|\frac{\theta_x}{\theta^{1/2}}|\partial x\le C+(\int_N^{N+1}\frac{\theta_x^2}{v\theta}\partial x)^{1/2}(\int_N^{N+1}v\partial x)^{1/2}.$$

Из (11) с учетом оценок (12), (13) и условий теоремы, получим ограниченность удельного объема сверху.

5. Оценки для производных от искомых функций. Умножим второе уравнение системы (1) на $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{v})c_x$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{v}c_x^2\partial x+\int(\frac{1}{v}c_x)_x^2\partial x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2}c_x^2u_x\partial x+\int cg(\frac{1}{v}c_x)_x\partial x.$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, вложения, (9), липшицевость функции g по $(\varphi\theta)^{1/2}$, после некоторых преобразований выводим [8]:

$$\int\frac{1}{v}c_x^2\partial x+\int_0^t\int(\frac{1}{v}c_x)_x^2\partial x\partial\tau\le N_7,\forall t\in[0,T]. \tag{14}$$

Умножим четвертое уравнение системы (1) на $(u-f)$ и проинтегрируем по R :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(u-f)^2\partial x+\int\{\frac{u_x^2}{v}+\frac{\theta}{v}f'\}\partial x=\int\frac{1}{v}u_xf'\partial x+\int\frac{\theta}{v}u_x\partial x.$$

Оценивая правую часть по неравенству Коши, после интегрирования по t, с учетом (4), (7), (9), (13) выводим:

$$\int_0^t\|u_x\|^2\partial\tau\le N_8,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{15}$$

ЛЕММА 4. *При выполнении условий теоремы имеют место оценки*

$$\max_{0\le t\le T}\|v_x(t)\|\le N_9\ \ \forall t\in[0,T].$$

Доказательство. Второе уравнение системы (1) $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial lnv\psi}{\partial x})=\frac{\partial(u-f)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\theta}{v})$ умножим на $(lnv\psi)_x$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(lnv\psi)_x^2\partial x+\int\frac{\theta}{v}(lnv\psi)_x^2\partial x=\frac{\partial}{\partial t}\int(u-f)\frac{\partial lnv\psi}{\partial x}\partial x+\int\frac{1}{v}u_x^2\partial x+$$

$$\int\frac{1}{v}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial lnv\psi}{\partial x}\partial x-\int\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}f_x\partial x+\int\frac{\theta}{v}\frac{\partial lnv\psi}{\partial x}\frac{\psi_x}{\psi}\partial x. \tag{16}$$

Оценим интегралы в правой части (16), используя неравенства Гельдера, Юнга, Коши, неравенства вложения, полученные выше оценки. После некоторых преобразований и применения к полученному из (16) неравенству леммы Гроноулла имеем оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|(lnv\psi)_x\|^2\le C_{12}.$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. Умножим уравнения импульса и теплопроводности системы (1) на u_{xx} и $\psi(\psi\theta-1)$ соответственно и проинтегрируем по R :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|^2+\int\frac{u_{xx}^2}{v}\partial x=\int(\frac{v_x}{v^2}u_x+\frac{\theta_x}{v}-\frac{v_x}{v^2}\theta)u_{xx}\partial x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\theta-1\|^2+\int\frac{\theta\theta_x^2\varphi^2}{v}\partial x=\int(\frac{\theta\varphi_x\theta_x}{v}-\frac{2\varphi\varphi_x\theta^2\theta_x}{v})\partial x+ \tag{17}$$

$$+\int(\frac{\theta^{3/2}\varphi_x c_x}{v}-\frac{2\varphi\varphi_x\theta^{5/2}c_x}{v}+\frac{\theta^{3/2}\theta_x c_x\varphi^2}{v})\partial x+\int(-\frac{\varphi\theta}{v}u_x+\frac{\varphi}{v}u_x^2+cg)(\varphi\theta-1)\partial x.$$

Оценим интегралы в правой части первого равенства системы (17), используя известные неравенства и результаты. Тогда из (17) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2\le C_{13}(\|u_x\|^2+(M_\theta+1)+1)+C_{14}\int\frac{\theta\theta_x^2\phi^2}{v}\partial x, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\theta-1\|^2+C_{15}\int\frac{\theta\theta_x^2\varphi^2}{v}\partial x\le C_{16}M_{\{}\theta(\|u_x\|^2+1)+\|u_x\|^2(\|\varphi\theta-1\|^2+1)+1\}.$$

Умножая первое уравнение (18) на $\gamma=C_{15}C_{14}^{-1}$ и складывая со вторым, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|\varphi\theta-1\|^2+\gamma|u_x\|^2)+\gamma\|u_{xx}\|^2\le C_{17}\{M_\theta(\|u_x\|^2+1)+\|u_x\|^2(\|\varphi\theta-1\|^2+1)+1\}.$$

С учетом полученных ранее оценок, после применения леммы Гронуолла, заключаем

$$\max_{0\le t\le T}(\|\varphi\theta-1\|^2+\|u_x(t)\|^2)+\int_0^T\|u_{xx}(t)\|^2\partial t\le N_{10} \tag{19}$$

Из второго неравенства (18) и (19) вытекает оценка:

$$\int_0^T\|\theta_x(t)\|^2\partial t\le N_{11}$$

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично [3, 5].

Теорема полностью доказана.

Список литературы

[1] *Петров А.Н.* Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Там же. - 1993. - Вып.107. - С.112-123.

[2] *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 319 с.

[3] *Смагулов Ш.С., Дурмагамбетов А.А., Искендерова Д.А.* Задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Дифференц. уравнения. - 1993. - Т.29, № 2. - С. 337-348.

[4] *Искендерова Д.А.* Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Там же. - 2001. - № 3(26) - С. 62-67.

[5] *Искендерова Д.А., Токторбаев А.М.* Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Труды шестого совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. - Алматы, 2009. - С.183 - 190.